

IV.2 Starre Körper

Ein physikalischer Festkörper ist ein System aus vielen Atomen — für ein Stück auf menschlicher Skala, etwa 10^{23} – 10^{26} Atomen. Dementsprechend ist die Beschreibung als ein Mehrteilchensystem wie in Abschn. [III.1](#) unrealistisch. Stattdessen werden idealisierte Modelle des Festkörpers benutzt.

Das einfachste davon ist das Modell eines *starren Körpers*. Dabei handelt es sich um ein System aus (vielen) Massenpunkten m_a mit konstanten Abständen zueinander. Diese Zwangsbedingungen über die Abstände folgen aus inneren Kräften. Dank den letzteren bleibt die Anzahl der eigentlichen Freiheitsgrade im Modell trotz der hohen Teilchenzahl immer klein (§ [IV.2.1](#)). Für die Beschreibung der globalen Bewegung des Körpers ist eine Kenntnis der inneren Zwangskräfte nicht nötig. Deshalb eignet sich die Lagrange'sche Vorgehensweise besser als der newtonsche Formalismus, um die Bewegungsgleichungen für den starren Körper herzuleiten (§ [IV.2.2](#)).

Anstatt den Körper als eine Menge von diskreten punktförmigen Teilchen zu beschreiben, ist es auch günstig, das Modell eines *kontinuierlichen Mediums* einzuführen, z.B. um einige Eigenschaften zu berechnen, die in der Bewegung von Relevanz sind. Im Fall des starren Körpers ist das Kontinuum definitionsgemäß nicht deformierbar. Eine weitere Modellierung des physikalischen Festkörpers, die in diesem Kapitel nicht diskutiert wird, ist die eines verformbaren Kontinuums, in dessen Rahmen Eigenschaften wie Elastizität, Plastizität... untersucht werden können.

IV.2.1 Beschreibung des starren Körpers

IV.2.1 a Anzahl der Freiheitsgrade

Das Modell des starren Körpers reduziert die a priori große ($3N$) Anzahl der Freiheitsgrade eines N -Teilchen-Systems zu einer kleinen Anzahl, und zwar meistens nur 6 für die Fälle, wo die Vereinfachung von Nutzen ist.

Im Fall von zwei Massenpunkten 1 und 2 mit der Zwangsbedingung eines zeitlich konstanten Abstands $|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)|$ besitzt das System insgesamt $s = 3N - 1 = 5$ Freiheitsgrade. Diese können z.B. die drei Koordinaten des Schwerpunkts und zwei Winkel für die Orientierung des Verbindungsvektors zwischen 1 und 2 sein.

Für drei Massenpunkte 1, 2 und 3 gibt es drei Zwangsbedingungen über die Abstände, und zwar $|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)|$, $|\vec{x}_3(t) - \vec{x}_1(t)|$ und $|\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)|$. Unter deren Berücksichtigung bleiben im allgemeinen Fall $s = 3N - 3 = 6$ Freiheitsgrade übrig. Beispielsweise kann man drei Schwerpunktskoordinaten betrachten, zusammen mit drei Winkeln für die Orientierung im Raum der Ebene, in welcher die drei Massenpunkte liegen.

Fügt man einen vierten Massenpunkt hinzu, so ist seine Position durch 3 Zwangsbedingungen $|\vec{x}_4(t) - \vec{x}_1(t)|$, $|\vec{x}_4(t) - \vec{x}_2(t)|$ und $|\vec{x}_4(t) - \vec{x}_3(t)|$ völlig bestimmt — bis auf eine Spiegelung bezüglich der durch die drei ersten Punkte definierten Ebene. Somit gibt es immer noch 6 Freiheitsgrade.

Das gleiche gilt für eine beliebige Anzahl $N \geq 4$. Wenn man einen N -ten Massenpunkt zu $N - 1$ schon anwesenden Punkten addiert, dann bestimmen drei Zwangsbedingungen $|\vec{x}_N(t) - \vec{x}_1(t)|$, $|\vec{x}_N(t) - \vec{x}_2(t)|$ und $|\vec{x}_N(t) - \vec{x}_3(t)|$ seine Position: die weiteren Abstände sind dadurch automatisch festgelegt bzw. sind nicht unabhängig davon. Deshalb werden die drei möglichen Freiheitsgrade dieses zusätzlichen Massenpunkts durch genau drei Bedingungen annulliert, d.h. die Anzahl der Freiheitsgrade ändert sich nicht, und bleibt gleich 6.

Bemerkung: Im Sonderfall, wo die $N \geq 2$ Massenpunkte alle auf einer Geraden sitzen, gibt es eigentlich wie für $N = 2$ nur 5 Freiheitsgrade. Dieser Fall wird im Folgenden stillschweigend ausgeschlossen.

Kontinuumlimes

Dank der Unabhängigkeit der Anzahl von Freiheitsgraden von der Anzahl N von Massenpunkten für $N \geq 3$ kann man problemlos den Limes $N \rightarrow \infty$ betrachten, und danach zum Modell eines *Kontinuums* übergehen. Im letzteren Fall entspricht der starre Körper einem endlichen kontinuierlichen Volumen, das sich nicht verformen kann, wie z.B. eine Vollkugel. Dementsprechend werden einige Eigenschaften des Körpers durch stückweise stetige Funktionen vom Ort beschrieben — insbesondere durch eine Massendichte $\rho(\vec{r})$ —, die genau da ungleich Null sind, wo der Körper sich befindet.

Zur genaueren Definition des Grenzfalles sollte man das nicht-deformierbare kontinuierliche Medium zuerst als Zusammensetzung aus endlich vielen (N) kleinen Massenstücken m_a beschreiben, die sich relativ zu einander nicht bewegen; seien \vec{x}_a ihre Ortsvektoren. Ersetzt man die Massenstückchen durch Massenpunkte, so hat man einen starren Vielteilchen-Körper. Sei $M = \sum_a m_a$ die Gesamtmasse des Körpers.

Im *Kontinuumlimes* wird die Anzahl der Massenpunkte unendlich groß, $N \rightarrow \infty$, und ihre Massen werden verschwindend klein, $m_a \rightarrow 0$, bei festgehaltener Gesamtmasse M . Im Grenzfall werden die Summen über a , d.h. über alle Massenpunkte, durch Integrale über das durch den Körper besetzte Volumen \mathcal{V} ersetzt. Genauer schreibt man für jede Funktion f der Position

$$\sum_a m_a f(\vec{x}_a) \rightarrow \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) f(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (\text{IV.17})$$

mit der Massendichte ρ .

Bemerkung: Schreibt man

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a m_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a),$$

wobei $\delta^{(3)}$ die dreidimensionale Dirac-Distribution ⁽⁴⁰⁾ bezeichnet, so kann man ein System aus diskreten Massenpunkten in der Sprache des Kontinuums beschreiben.

IV.2.1 b Kinematik des starren Körpers

Zur Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers ist es sinnvoll, zwei unterschiedliche Bezugssysteme mit zugehörigen kartesischen Koordinatensystemen einzuführen. Somit betrachtet man einerseits ein raumfestes Inertialsystem \mathcal{B}_I , entsprechend z.B. einem inertialen Beobachter, der die Bewegung des Körpers misst, ohne sich damit zu bewegen. Ortsvektoren relativ zu diesem System werden hiernach mit Großbuchstaben bezeichnet, wie z.B. $\{\vec{X}_a(t)\}$ für die Ortsvektoren der individuellen Massenpunkte des starren Körpers.

Andererseits wird auch ein körperfestes Bezugssystem \mathcal{B} eingeführt, das sich zusammen mit dem starren Körper bewegt. Insbesondere ist \mathcal{B} nicht unbedingt inertial, weil die Bewegung des Körpers beschleunigt relativ zu \mathcal{B}_I sein kann. In \mathcal{B} wird dann ein Koordinatensystem gewählt, insbesondere ein Ursprungspunkt O , dessen Position bezüglich \mathcal{B}_I mit $\vec{X}(t)$ bezeichnet wird. Ortsvektoren relativ zu \mathcal{B} werden mit Kleinbuchstaben denotiert, z.B. \vec{x}_a für die Positionen der Massenpunkte des starren Körpers, die definitionsgemäß zeitunabhängig sind.

Bemerkung: Der Nullpunkt O kann prinzipiell beliebig gewählt werden. Wie wir hiernach sehen werden [s. Diskussion unten Gl. ^(IV.22)], gibt es in der Praxis „bessere“ Wähle, die zu einer einfacheren Form der kinetischen Energie bzw. der Bewegungsgleichungen des Körpers führen.

Drei der für die Beschreibung des starren Körpers nötigen 6 Freiheitsgrade beschreiben die Translationsbewegung des Ursprungspunkts O von \mathcal{B} relativ zu \mathcal{B}_I . Die drei anderen entsprechen z.B. den Winkeln der Drehungen, die von den Achsen des Koordinatensystems in \mathcal{B}_I zu den Koordinatenachsen von \mathcal{B} führen (vgl. § ^(IV.2.1 c)).

Unter Verwendung der oben eingeführten Notationen kann die Position eines Massenpunkts a des starren Körpers bezüglich des Inertialsystems als

$$\vec{X}_a(t) = \vec{X}(t) + \mathcal{R}(t)\vec{x}_a \quad (\text{IV.18})$$

geschrieben werden. Dabei ist $\mathcal{R}(t)$ die zeitabhängige 3×3 -Drehmatrix, die die Koordinatenachsen von \mathcal{B} in jene von \mathcal{B}_I transformiert. Eine Ableitung nach der Zeit gibt nun die Geschwindigkeit des Massenpunkts relativ zu \mathcal{B}_I [vgl. Gl. ^(I.46)]

$$\dot{\vec{X}}_a(t) = \dot{\vec{X}}(t) + \mathcal{R}(t)[\vec{\omega}(t) \times \vec{x}_a] \quad (\text{IV.19})$$

wobei $\vec{x}_a = \vec{0}$ benutzt wurde. Dabei ist $\vec{\omega}(t)$ die Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung des starren Körpers. Da der letztere sich definitionsgemäß nicht deformieren kann, ist $\vec{\omega}(t)$ die gleiche für alle Punkte a des Körpers.

IV.2.1 c Euler-Winkel

Die Orientierung der Achsen (x, y, z) des körperfesten Bezugssystems relativ zu denen (X, Y, Z) des raumfesten Bezugssystems kann mithilfe von drei Winkeln φ , θ und ψ , den *Euler-Winkeln*, beschrieben werden ⁽⁴¹⁾

Zur Beschreibung wird der Einfachheit angenommen, dass die zwei Systeme den gleichen Nullpunkt haben, s. Abb. ^(IV.2) Dann schneiden sich die (x, y) -Ebene und die (X, Y) -Ebene in einer Geraden K , der sog. *Knotenlinie*. Konstruktionsgemäß ist diese orthogonal zu den z - und Z -Achsen.

⁽⁴⁰⁾ $\delta^{(3)}(\vec{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) von \vec{r} , vgl. Anhang ^(C)

⁽⁴¹⁾ Anstatt φ, θ, ψ werden die Euler-Winkel auch oft mit α, β, γ bezeichnet, entsprechend der Reihenfolge der Drehungen.

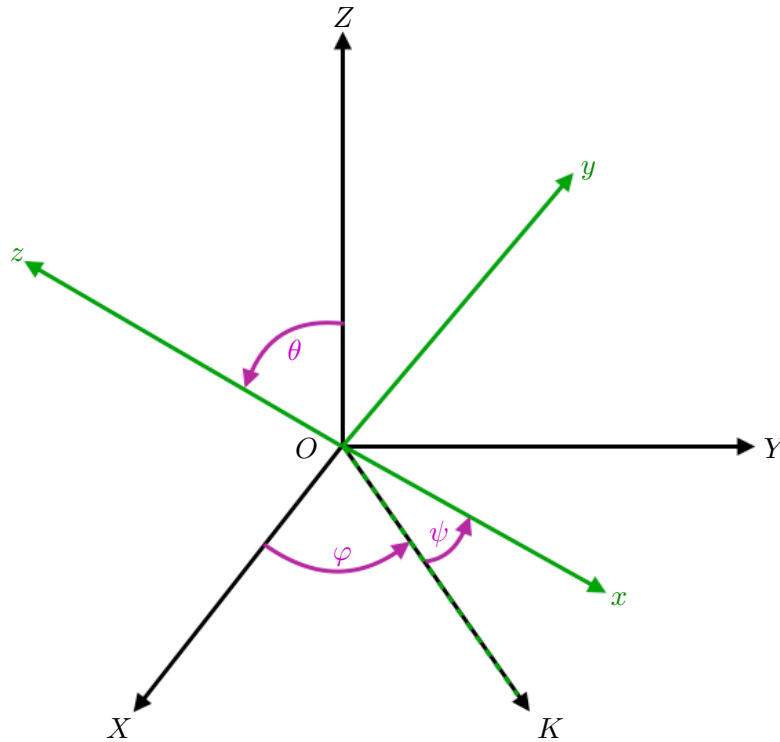


Abbildung IV.2 – Euler-Winkel

Der erste Euler-Winkel φ ist der Winkel — gemessen in Richtung der Y -Achse — zwischen der X -Achse und der Knotenlinie K , entsprechend einer Drehung $\mathcal{R}_Z(\varphi)$ um die Z -Achse: in Matrixform gilt

$$\mathcal{R}_Z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Euler-Winkel θ ist der Winkel zwischen der Z -Achse und der z -Achse, entsprechend einer Drehung $\mathcal{R}_K(\theta)$ um die Gerade K :

$$\mathcal{R}_K(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dabei ist aufzupassen, dass $\mathcal{R}_K(\theta)$ nicht auf die Komponenten von Vektoren auf den (X, Y, Z) -Achsen wirkt, sondern auf die Komponenten entlang Achsen (K, K_\perp, Z) , wobei K_\perp senkrecht auf K und der Z -Achse steht.

Schließlich ist der dritte Euler-Winkel ψ der Winkel zwischen der Knotenlinie K und der x -Achse, entsprechend einer Drehung $\mathcal{R}_z(\psi)$ um die z -Achse:

$$\mathcal{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt ist die Drehung \mathcal{R} , die das (X, Y, Z) -System in das (x, y, z) -System transformiert, das Produkt aus den drei Drehungen. Unter Verwendung der kürzeren Notationen $c_\varphi \equiv \cos \varphi$, $s_\varphi \equiv \sin \varphi$, usw. findet man

$$\mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi) \equiv \mathcal{R}_z(\psi) \mathcal{R}_K(\theta) \mathcal{R}_Z(\varphi) = \begin{pmatrix} c_\varphi c_\psi - s_\varphi c_\theta s_\psi & s_\varphi c_\psi + c_\varphi c_\theta s_\psi & s_\theta s_\psi \\ -s_\varphi c_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi & c_\varphi c_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi & s_\theta c_\psi \\ s_\varphi s_\theta & -c_\varphi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.20})$$

Diese Drehmatrix gibt den Zusammenhang zwischen den Ortsvektoren \vec{R} bzw. \vec{r} eines Punkts relativ zu \mathcal{B}_I bzw. \mathcal{B} :

$$\vec{r} = \mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi) \vec{R}. \quad (\text{IV.21a})$$

d.h.

$$\vec{R} = \mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi)^\top \vec{r}. \quad (\text{IV.21b})$$

IV.2.2 Bewegungsgleichungen

IV.2.2 a Kinetische Energie

Die kinetische Energie des starren Körpers bezüglich des Inertialsystems \mathcal{B}_I ist die Summe aus der kinetischen Energien der individuellen Massenpunkte, d.h.

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{X}}_a(t)^2.$$

Dabei kann der Ausdruck (IV.19) der Geschwindigkeit $\dot{\vec{X}}_a(t)$ substituiert werden

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\dot{\vec{X}}(t) + \mathcal{R}(t) [\vec{\omega}(t) \times \vec{x}_a] \right)^2.$$

Die Berechnung des (Betrags)Quadrats liefert dann

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{X}}(t)^2 + \dot{\vec{X}}(t) \cdot \left(\mathcal{R}(t) [\vec{\omega}(t) \times \sum_a m_a \vec{x}_a] \right) + \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\mathcal{R}(t) [\vec{\omega}(t) \times \vec{x}_a] \right)^2 \\ &\equiv T_{\text{Trans.}} + T_{\text{Misch.}} + T_{\text{Rot.}} \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

Der erste Term lässt sich mithilfe der Gesamtmasse einfach als $T_{\text{Trans.}} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}(t)^2$ umschreiben: diese *Translationsenergie* entspricht der kinetischen Energie eines Massenpunkts der Masse M , der sich im Ursprungspunkt O des körperfesten Bezugssystems befindet.

Bei dem zweiten Beitrag $T_{\text{Misch.}}$ in Gl. (IV.22) handelt es sich um einen Mischterm, der sowohl von der Translationsbewegung des starren Körpers als von seiner Rotationsbewegung abhängt. Dieser Term verschwindet in zwei Fällen: wenn der Nullpunkt O in \mathcal{B}_I ruht, d.h. falls $\dot{\vec{X}}(t) = \vec{0}$, oder wenn O genau im Schwerpunkt des starren Körpers liegt, so dass $\sum_a m_a \vec{x}_a = \vec{0}$ gilt. Hiernach wird meistens angenommen, dass einer dieser beiden Möglichkeiten erfüllt ist.

Der dritte Term in Gl. (IV.22) ist die *Rotationsenergie* des starren Körpers. Deren Ausdruck lässt sich zuerst vereinfachen, indem man die Invarianz des Skalarprodukts zweier Vektoren, und daher des Betragsquadrats eines Vektors, unter Drehungen benutzt:

$$T_{\text{Rot.}} = \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\mathcal{R}(t) [\vec{\omega}(t) \times \vec{x}_a] \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_a m_a [\vec{\omega}(t) \times \vec{x}_a]^2. \quad (\text{IV.23})$$

Das Betragsquadrat kann noch mithilfe einiger Manipulationen umgeschrieben werden. Führt man z.B. die kartesischen Koordinaten $\omega^i(t)$, x_a^i der Vektoren $\vec{\omega}(t)$ und \vec{x}_a ein, so gilt

$$[\vec{\omega}(t) \times \vec{x}_a]^2 = [\vec{\omega}(t) \times \vec{x}_a]^k [\vec{\omega}(t) \times \vec{x}_a]^k = [\epsilon^{kij} \omega^i(t) x_a^j] [\epsilon^{klm} \omega^l(t) x_a^m],$$

wobei Summen über k , i , j , l und m von 1 bis 3 nicht geschrieben wurden. Fängt man mit der Summe über k an, so führt die Identität $\epsilon^{kij} \epsilon^{klm} = \delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}$ zu

$$[\vec{\omega}(t) \times \vec{x}_a]^2 = (\delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}) \omega^i(t) \omega^l(t) x_a^j x_a^m.$$

Die Summen über l und m liefern dann

$$[\vec{\omega}(t) \times \vec{x}_a]^2 = \omega^i(t) \left[(\vec{x}_a)^2 \delta^{ij} - x_a^i x_a^j \right] \omega^j(t), \quad (\text{IV.24})$$

wobei im ersten Term $\omega^i(t)\omega^j(t) = \omega^i(t)\delta^{ij}\omega^j(t)$ benutzt wurde. Dieses Resultat kann in Gl. (IV.23) eingesetzt werden. Dann lautet die Rotationsenergie

$$T_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega^i(t) I^{ij} \omega^j(t) \quad (\text{IV.25})$$

mit

$$I^{ij} \equiv \sum_a m_a \left[(\vec{x}_a)^2 \delta^{ij} - x_a^i x_a^j \right] \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3, \quad (\text{IV.26a})$$

wobei die Summe über alle Massenpunkte des starren Körpers läuft. Gemäß dem Rezept (IV.17) gilt im Grenzfall eines kontinuierlichen Körpers

$$I^{ij} \equiv \int \rho(\vec{r}) [\vec{r}^2 \delta^{ij} - x^i x^j] d^3\vec{r} \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.26b})$$

mit den kartesischen Komponenten $\{x^i\}_{i=1,2,3}$ des Vektors \vec{r} . Der Integrationsbereich ist entweder das durch den starren Körper besetzte Volumen \mathcal{V} , oder kann der ganze Raum \mathbb{R}^3 sein, unter Verwendung der Konvention, dass $\rho(\vec{r}) = 0$ für \vec{r} außerhalb \mathcal{V} .

Alternative Herleitung der Gl. (IV.24): Das Betragsquadrat auf der linken Seite kann als Spatprodukt interpretiert werden und in der Form

$$(\vec{\omega} \times \vec{x}_a)^2 = (\vec{\omega} \times \vec{x}_a) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}_a) = [\vec{x}_a \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_a)] \cdot \vec{\omega} = [(\vec{x}_a \cdot \vec{x}_a) \vec{\omega} - (\vec{x}_a \cdot \vec{\omega}) \vec{x}_a] \cdot \vec{\omega}$$

umgeschrieben werden, wobei die Zeitabhängigkeit von $\vec{\omega}$ der Kurze halber nicht geschrieben wurde. Dies vereinfacht sich noch zu

$$(\vec{\omega} \times \vec{x}_a)^2 = \vec{x}_a^2 \vec{\omega}^2 - (\vec{x}_a \cdot \vec{\omega})^2,$$

was äquivalent zu Gl. (IV.24) ist. \square

Insgesamt lautet die kinetische Energie des starren Körpers bezüglich des Inertialsystems \mathcal{B}_I

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}(t)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega^i(t) I^{ij} \omega^j(t). \quad (\text{IV.27})$$

Dabei ist $\vec{X}(t)$ die Position in \mathcal{B}_I entweder des Schwerpunkts des starren Körpers oder eines Punkts davon, der sich relativ zu \mathcal{B}_I nicht bewegt. Im letzteren Fall wird die Translationsenergie in Gl. (IV.27) auch Null sein.

Im Gegensatz zur Gesamtmasse, deren Wert unabhängig vom Koordinatensystem ist, hängen die durch Gl. (IV.26) definierten Zahlen I^{ij} von der Wahl des körperfesten Koordinatensystems ab, insbesondere von dessen Nullpunkt. Wie in § IV.2.2 c unten argumentiert wird, sind die I^{ij} die kartesischen Komponenten eines Tensors zweiter Stufe \mathbf{I} , der *Trägheitstensor* genannt wird.

IV.2.2b Bewegungsgleichungen

Entsprechend den 6 Freiheitsgraden eines starren Körpers wählt man als verallgemeinerte Koordinaten für die Beschreibung seiner Bewegung einerseits die 3 kartesischen Koordinaten X^i des Ortsvektors \vec{X} eines bestimmten Punkts des Körpers und andererseits drei Winkel φ^i ; die letzteren beschreiben Drehungen des starren Körpers um drei zueinander senkrechte x^i -Achsen, die relativ zum Körper fest bleiben. Die zugehörigen verallgemeinerten Geschwindigkeiten sind \dot{X}^i und $\dot{\varphi}^i$: die drei $\dot{\varphi}^i$ sind die kartesischen Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\dot{\varphi}}$ des Körpers.

Die Standard-Lagrange-Funktion des starren Körpers lautet dann

$$\mathcal{L}(\{X^i\}, \{\varphi^i\}, \{\dot{X}^i\}, \{\dot{\varphi}^i\}) = \frac{M}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{X}^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \dot{\varphi}^i I^{ij} \dot{\varphi}^j - V(\{X^i\}, \{\varphi^i\}), \quad (\text{IV.28})$$

mit einem Potential V . Dabei sind die I^{ij} die Komponenten des Trägheitstensors bezüglich der körperfesten Drehachsen, die den drei Winkeln φ^i entsprechen. Ausgehend von dieser Lagrange-Funktion liefern die Euler–Lagrange-Gleichungen (III.11) die Bewegungsgleichungen des starren Körpers.

Translationsbewegung des starren Körpers

Betrachten wir zuerst die Bewegungsgleichung für die Koordinaten X^i . Laut der Definition (III.17) ist der zu X^i kanonisch konjugierte Impuls durch

$$p^i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^i} = M \dot{X}^i \quad (\text{IV.29a})$$

gegeben. Dies ist offensichtlich die i -te kartesische Komponente des Gesamtimpulses $\vec{p} = M \dot{\vec{X}}$ des starren Körpers. Dann lautet die damit assoziierte Euler–Lagrange-Gleichung

$$\frac{dp^i}{dt} = M \ddot{X}^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^i} = -\frac{\partial V}{\partial X^i}. \quad (\text{IV.29b})$$

Auf der rechten Seite ist $-\partial V/\partial X^i$ die i -te Komponente der Gesamtkraft auf den starren Körper. Falls $\vec{X}(t)$ die Position im Inertialsystem \mathcal{B}_I des Schwerpunkts des Körpers ist, entspricht Gl. (IV.29b) dem üblichen Schwerpunktsatz (II.12) für ein Mehrteilchensystem.

Rotationsbewegung des starren Körpers

Benutzt man die auf Gl. (IV.26) offensichtliche Symmetrie $I^{ij} = I^{ji}$ für jedes mögliche Paar (i, j) , so findet man für den zu φ^i kanonisch konjugierten verallgemeinerten Impuls

$$L^i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^i} = \sum_{j=1}^3 I^{ij} \dot{\varphi}^j. \quad (\text{IV.30a})$$

Dies ist die i -te kartesische Komponente des *Eigendrehimpulses* des starren Körpers um den Nullpunkt von \mathcal{B} .

Die Zeitentwicklung dieses generalisierten Impulses wird durch die Euler–Lagrange-Gleichung

$$\frac{dL^i}{dt} = \sum_{j=1}^3 I^{ij} \ddot{\varphi}^j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi^i} \quad (\text{IV.30b})$$

gegeben, wobei die „verallgemeinerte Kraft“ auf der rechten Seite der Gleichung das *Drehmoment* ist.

Beispiel: Homogener dünner Stab als physikalisches Pendel

Sei ein homogener unendlich dünner Stab mit Länge ℓ und linearer Massendichte (d.h. Masse pro Längeneinheit) μ . Dementsprechend ist seine Gesamtmasse $M = \mu\ell$.

Ein Endpunkt des Stabs ist am Nullpunkt des Koordinatensystems eines raumfesten Inertialsystems aufgehängt. Der Stab kann sich in der (Y, Z) -Ebene, d.h. um die X -Achse, unter dem Einfluss des Schwerfeldes $-g \vec{e}_Z$ drehen. Somit bildet der Stab ein ebenes Pendel. (42)

Als körperfestes Koordinatensystem wird ein System mit dem Nullpunkt O im Aufhängepunkt, mit der x -Achse parallel zur X -Achse des raumfesten Systems und der y -Achse entlang des Stabs. Somit streckt sich der Stab von $y = 0$ bis $y = \ell$. Für dieses eindimensionale System kann man dann für eine beliebige Funktion f der Position

$$\int_V \rho(\vec{r}) f(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int_0^\ell \mu(y) f(x=0, y, z=0) dy$$

schreiben; mit $f \equiv 1$ ergibt sich z.B. die Gesamtmasse $M = \mu\ell$.

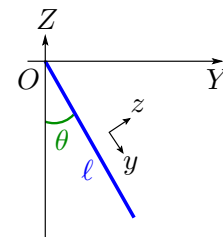


Abbildung IV.3

(42) Im Gegensatz zum „mathematischen Pendel“ des § III.2.4 mit masselosem Stab und Punktmasse am Ende wird dieses System mit massebehaftetem Stab „physikalisches Pendel“ genannt.

Wer nicht mit einer linearen Massendichte $\mu(y)$, sondern mit der üblichen Massendichte (pro Volumeneinheit) $\rho(\vec{r})$ arbeiten möchte, kann einfach $\rho(\vec{r}) = \mu(y) \delta(x) \delta(z)$ betrachten: mit dieser Massendichte ergibt sich genau die obige Gleichung.

Sei θ der Ablenkwinkel des Stabs aus der Lotrichtung. Da θ einer Drehung um die x -Achse entspricht, gilt in den Notationen der Gl. (IV.28)–(IV.30) (d.h. mit $x = x^1$) $\theta = \varphi^1$. Dann ist $\dot{\varphi}^1 = \dot{\theta}$: um eine Bewegungsgleichung für θ zu erhalten, sollte man Gl. (IV.30b) mit $i = 1$ benutzen. Da wir ausschließlich Rotationsbewegungen um die x -Achse betrachten wollen, lautet die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_X$, d.h. mit nur einer φ^1 -Komponente: $\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}^3 = 0$. Dementsprechend ist nur die Komponente I^{11} des Trägheitstensors um den Punkt O nötig, um Gl. (IV.30b) für $i = 1$ zu schreiben:

$$\frac{dL^1}{dt} = \sum_{j=1}^3 I^{1j} \dot{\varphi}^j = I^{11} \dot{\theta}.$$

Aus Gl. (IV.26b) folgt dann

$$I^{11} = \int_0^\ell \mu(y) y^2 dy = \frac{\mu \ell^3}{3} = \frac{M \ell^2}{3},$$

wobei $\vec{r}^2 \delta^{11} - (x)^2 = y^2$ wenn $x = z = 0$ benutzt wurde.

Betrachten wir jetzt das Potential des Stabs im Schwerfeld. Für ein kleines Massenelement μdy im Abstand y vom Aufhängepunkt, d.h. bei der Höhe $Z = -y \cos \theta$ (vgl. Abb. IV.3) lautet es $V = (\mu dy) g Z = -\mu g \cos \theta y dy$. Die potentielle Energie des ganzen Stabs ist dann

$$V = \int_0^\ell (-\mu g \cos \theta) y dy = -\mu g \frac{\ell^2}{2} \cos \theta = -Mg \frac{\ell \cos \theta}{2}.$$

Dabei erkennt man, dass $-\ell \cos \theta/2$ die Höhe des Schwerpunkts des Stabs ist: alles passiert, als ob die ganze Masse in diesem Schwerpunkt konzentriert wäre.

Schließlich ist die Bewegungsgleichung (IV.30b) für θ

$$I^{11} \ddot{\theta} = \frac{M \ell^2}{3} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -Mg \frac{\ell}{2} \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{3g}{2\ell} \sin \theta.$$

Diese Gleichung hat die gleiche Form wie die Bewegungsgleichung (III.30) des mathematischen Pendels und wird ähnlich gelöst.

IV.2.2c Trägheitstensor

Um zu zeigen, dass die I^{ij} die (kartesischen) Komponenten eines Tensors bilden, soll man ihr Verhalten unter Drehungen untersuchen⁽⁴³⁾ Sei \mathcal{R} eine Drehmatrix. Unter ihrer Wirkung transformieren sich die Komponenten eines Ortsvektors bezüglich \mathcal{B} gemäß

$$x^i \rightarrow x^{i'} = \mathcal{R}^{i'}_i x^i.$$

Dementsprechend transformiert sich das Produkt $x^i x^j$ in $x^{i'} x^{j'} = \mathcal{R}^{j'}_j \mathcal{R}^{i'}_i x^i x^j$. Andererseits gilt

$$\mathcal{R}^{i'}_i \mathcal{R}^{j'}_j \delta^{ij} = \mathcal{R}^{i'}_i \delta^{ij} (\mathcal{R}^\top)_j^{j'} = \mathcal{R}^{i'}_i (\mathcal{R}^\top)_i^{j'} = \delta^{i'j'},$$

wobei \mathcal{R}^\top die zu \mathcal{R} transponierte Matrix bezeichnet, die gleichzeitig die inverse Drehmatrix \mathcal{R}^{-1} ist, wie in der letzten Gleichung benutzt wurde. Somit transformieren sich beide Terme mit Indizes in der Definition (IV.26) der I^{ij} gleich unter Drehungen, und zwar derart, dass I^{ij} sich insgesamt gemäß

$$I^{ij} \rightarrow I^{i'j'} = \mathcal{R}^{i'}_i \mathcal{R}^{j'}_j I^{ij} = \mathcal{R}^{i'}_i (\mathcal{R}^\top)_i^{j'} I^{ij} \quad (\text{IV.31})$$

transformiert, d.h. wie die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe.

In tensorieller Form lautet der Trägheitstensor

$$\mathbf{I} = \sum_a m_a [(\vec{x}_a)^2 \mathbf{g}^{-1} - \vec{x}_a \otimes \vec{x}_a] \quad (\text{IV.32a})$$

⁽⁴³⁾Einige Definitionen und Ergebnisse über Tensoren werden im Anhang A zusammengefasst.

falls der starrer Körper aus diskreten Massenpunkten besteht, oder

$$\mathbf{I} = \int \rho(\vec{r}) [\vec{r}^2 \mathbf{g}^{-1} - \vec{r} \otimes \vec{r}] \quad (\text{IV.32b})$$

für einen kontinuierlichen Körper. In diesen Formeln bezeichnet \otimes das Tensorprodukt (vgl. § A.1.3b, A.1.3c), während \mathbf{g}^{-1} der inverse metrische Tensor (vgl. § A.1.4) ist, dessen Komponenten in einer kartesischen Basis $g^{ij} = \delta^{ij}$ sind.

Identifiziert man den Tensor \mathbf{I} mit einer 3×3 -Matrix mit Elementen I^{ij} , die ebenfalls mit \mathbf{I} bezeichnet wird, so kann die letzte Gleichung noch in Matrixform als

$$\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}' = \mathcal{R} \mathbf{I} \mathcal{R}^T \quad (\text{IV.33})$$

geschrieben werden. Gleichmaßen gilt für die Rotationsenergie in Gl. (IV.27)

$$T_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2} \omega^i(t) I^{ij} \omega^j(t) = \frac{1}{2} \vec{\omega}(t)^T \mathbf{I} \vec{\omega}(t) \quad (\text{IV.34})$$

mit dem zu $\vec{\omega}(t)$ transponierten Zeilenvektor $\vec{\omega}(t)^T$. Für den Eigendrehimpuls (IV.30a) gilt

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}. \quad (\text{IV.35})$$

Entsprechend der tensoriellen Natur von \mathbf{I} können Rotationsenergie und Drehimpuls noch in „geometrischer“ Form geschrieben werden:

$$T_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}(t) \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}(t), \quad \vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$$

wobei \cdot die *Kontraktion* zweier Tensoren bezeichnet.

Trägheitsmoment

Sei \vec{e} der Einheitsvektor entlang einer beliebigen Richtung in \mathbb{R}^3 . Das *Trägheitsmoment* des starren Körpers bezüglich der (Dreh)Achse parallel zu dieser Richtung, die durch den Ursprungspunkt des körperfesten Bezugssystem geht, wird durch

$$I = e^i I^{ij} e^j = \vec{e}^T \mathbf{I} \vec{e} = \vec{e} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{e} \quad (\text{IV.36})$$

definiert, wobei $\{e^i\}_{i=1,2,3}$ die Koordinaten von \vec{e} bezeichnen. Beispielsweise ist das relevante Trägheitsmoment für eine Rotationsbewegung um eine Achse in Richtung des Basisvektors \vec{e}_3 einfach die Komponente $I^{33} = \vec{e}_3^T \mathbf{I} \vec{e}_3$. Dabei gilt

$$I^{33} = \sum_a m_a [(\vec{x}_a)^2 \delta^{33} - x_a^3 x_a^3] = \sum_a m_a [(x_a^1)^2 + (x_a^2)^2]$$

d.h. unter Einführung der Projektion $\vec{x}_{a,\perp}$ von \vec{x}_a auf der (x^1, x^2) -Ebene orthogonal zur Drehachse

$$I^{33} = \sum_a m_a (\vec{x}_{a,\perp})^2. \quad (\text{IV.37a})$$

Dabei ist $(\vec{x}_{a,\perp})^2$ das Quadrat des Abstands des Massenpunkts a von der Drehachse. Im Kontinuumslimites wird dieses Trägheitsmoment zu

$$I^{33} = \int \rho(\vec{r}) \vec{r}_\perp^2 d^3 \vec{r}. \quad (\text{IV.37b})$$

Für eine Rotationsbewegung mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$ um diese Richtung ist die Rotationsenergie $T_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2} I^{33} \omega^2$. Da I^{33} automatisch positiv ist, gilt das auch für diese kinetische Energie.

Beispiel: homogener Zylinder

Sei ein homogener Vollzylinder mit Massendichte ρ , Radius R und Höhe h . Dementsprechend ist seine Gesamtmasse $M = \pi R^2 h \rho$. Der Zylinder dreht sich um seine eigene Achse, welche die Richtung x^3 definiert.

In Zylinderkoordinaten $(r, \theta, z \equiv x^3)$ ist der Abstand eines Punkts von der Drehachse genau gleich der Radialkoordinate r . Somit lautet das durch Gl. (IV.37b) gegebene Trägheitsmoment des Zylinders um diese Achse

$$I^{33} = \int_0^h \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho r^2 r \, dr \right) d\theta \right] dz = \rho \frac{\pi R^4 h}{2} = \frac{MR^2}{2}. \quad (\text{IV.38})$$

Das letztere Ergebnis ist unabhängig von der Höhe h (genauer ist diese versteckt in der Gesamtmasse), so dass es auch im Grenzfall einer unendlich dünnen Scheibe $h \rightarrow 0$ gilt.

Eigenschaften des Trägheitstensors

Wie schon erwähnt wurde ist der Trägheitstensor ein symmetrischer Tensor, d.h. $I^{ij} = I^{ji}$ für alle $i, j = 1, 2, 3$. Dies bedeutet zuerst, dass nur 6 seiner Komponenten unabhängig voneinander sind.

Ähnlich einer symmetrischen reellen Matrix besitzt ein symmetrischer reeller Tensor zweiter Stufe nur reelle Eigenwerte und ist orthogonal diagonalisierbar. Das heißt, man kann eine Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ finden, in welcher der Tensor, oder genauer seine Matrixdarstellung, die Diagonalform

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

annimmt, mit den reellen Eigenwerten I_1, I_2, I_3 der Matrix, die wie oben schon bemerkt alle positiv sind. Diese Eigenwerte werden *Hauptträgheitsmomente* des starren Körpers genannt, während die zugehörigen Eigenvektoren $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ Einheitsvektoren entlang der *Hauptträgheitsachsen* sind.

Im *Hauptachsensystem* — d.h. im Koordinatensystem, dessen Achsen die Hauptträgheitsachsen des starren Körpers sind — nimmt die Rotationsenergie des Körpers die einfache Form

$$T_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2} \left[I_1 (\omega^1)^2 + I_2 (\omega^2)^2 + I_3 (\omega^3)^2 \right]$$

an. Dann folgt aus Gl. (IV.35), dass wenn die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ entlang einer Hauptträgheitsachse ist, so ist der Drehimpuls auch parallel dazu.

Bemerkung: Genau wie der Trägheitstensor selber hängen seine Hauptträgheitselemente von der Wahl des Bezugspunkts O ab. Die folgende Eigenschaft bezieht sich auf den Fall, wo der Bezugspunkt im Schwerpunkt des starren Körpers ist.

Besitzt ein starrer Körper Symmetrien, wie z.B. Invarianz unter der Spiegelung bezüglich einer Ebene oder Rotationssymmetrie, so sind die entsprechenden Symmetrieelemente, insbesondere Symmetrieachsen, einfach mit den Hauptträgheitsachsen relativ zum Körperschwerpunkt verknüpft. Um dieses Ergebnis zu illustrieren, betrachten wir die nichtdiagonalen Elemente des Trägheitstensors, z.B. I^{12} . Die Definition (IV.26b) gibt

$$\begin{aligned} I^{12} &= \int \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta^{12} - x^1 x^2) d^3 \vec{r} = \int \rho(x^1, x^2, x^3) (-x^1 x^2) dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{2} \int \rho(x^1, x^2, x^3) (-x^1 x^2 - x^1 x^2) dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

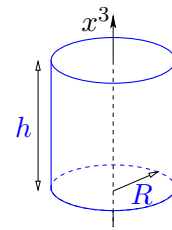


Abbildung IV.4

Wie unter Gl. (IV.26b) schon diskutiert wurde, kann der Integrationsbereich mit einer geeigneten Definition von ρ auf \mathbb{R}^3 erweitert werden, was wir hier annehmen. Führt man die Substitution $x^1 \rightarrow u \equiv -x^1$ für den zweiten Summanden in den Klammern, so ergibt sich

$$\begin{aligned} I^{12} &= \frac{1}{2} \left[-\int [\rho(x^1, x^2, x^3) x^1 x^2 dx^1 dx^2 dx^3 - \int \rho(-u, x^2, x^3) (-u) x^2 du dx^2 dx^3] \right] \\ &= \frac{1}{2} \int [-\rho(x^1, x^2, x^3) + \rho(-x^1, x^2, x^3)] x^1 x^2 dx^1 dx^2 dx^3, \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Integrationsvariable u des zweiten Terms in x^1 umbenannt wurde. Falls der starre Körper symmetrisch unter Spiegelungen bezüglich der Ebene $x^1 = 0$ ist, so dass $\rho(-x^1, x^2, x^3) = \rho(x^1, x^2, x^3)$ für alle Werte von x^2, x^3 , dann ist $I^{12} = 0$.

Allgemeiner findet man, dass die Symmetrieachsen des starren Körpers, falls einige vorhanden sind, auch seine Hauptträgheitsachsen sind.

Klassifikation von Trägheitstensoren

Je nach den Werten der Hauptträgheitsmomente lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- Für $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$ sind die Eigenvektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und somit die Hauptträgheitsachsen eindeutig⁽⁴⁴⁾ definiert. Dann spricht man von einem „unsymmetrischen Kreisel“.

Ein einfaches Beispiel davon ist ein homogener Quader, dessen Kanten unterschiedliche Längen $a \neq b \neq c \neq a$ haben: die Symmetrieachsen des Quaders sind seine Hauptträgheitsachsen (relativ zum Schwerpunkt), die zugehörigen Trägheitsmomente sind unterschiedlich.

- Für $I_1 = I_2 \neq I_3$ ist der Eigenvektor \vec{e}_3 bzw. die entsprechende Hauptachse eindeutig definiert. Dagegen gibt es Entartung in der (x^1, x^2) -Ebene, in welcher jedes Paar von orthogonalen Achsen als Hauptträgheitsachsen betrachtet werden kann. Dies entspricht dem Modell des *symmetrischen Kreisels*.

Beispiele sind ein eindimensionaler Stab parallel zur x^3 -Achse: $x^1 = x^2 = 0$ geben sofort $I^{33} = 0$ und $I^{11} = I^{22} \neq 0$; oder ein homogener Zylinder (im allgemeinen Fall), insbesondere eine zweidimensionale Scheibe in der Ebene $x^3 = 0$, für die man einfach $I^{11} = I^{22} = \frac{1}{2} I^{33}$ nachprüft.

- Für $I_1 = I_2 = I_3$ sind die Achsen jedes Koordinatensystems Hauptträgheitsachsen, entsprechend einem *Kugelkreisel*.

Dies ist z.B. der triviale Fall des Trägheitstensors einer homogenen Kugel um drei Achsen, die durch ihren Schwerpunkt verläuft. Falls der Radius der Kugel verschwindet, d.h. die Kugel wird zu einem Punkt, ist $\mathbf{I} = \mathbf{0}$: somit verschwinden der Eigendrehimpuls und die Rotationsenergie eines Massenpunkts, wie bisher stillschweigend angenommen wurde!

Offensichtlich sind die drei (Haupt)Trägheitsmomente eines homogenen Würfels um seine drei Symmetrieachsen alle gleich, d.h. der Matrixdarstellung des Trägheitstensors \mathbf{I} ist in der zugehörigen Basis proportional zur Einheitsmatrix. Dann gilt dies noch in jeder beliebigen Basis, so dass die Momente um jedes Triplet von Achsen, die durch seinen Schwerpunkt gehen, sind alle gleich.

Während die Unabhängigkeit des Trägheitsmoments von der Richtung einer durch den Schwerpunkt durchlaufenden Drehachse intuitiv im Fall der Kugel ist, wirkt sie bei dem Würfel überraschend. Dabei ist unser⁽⁴⁵⁾ Intuition falsch, denn wir stellen uns die ganzen Massenverteilungen $\rho(\vec{r})$ vor — die offensichtlich unterschiedlich für eine Kugel und einen Würfel sind —, während das Trägheitsmoment bzw. der Trägheitstensor nur einem sehr geringen Anteil der in dieser Massenverteilungen enthaltenen Information entspricht. Für die Rotationsbewegung der Körper reicht aber diese Information aus.

⁽⁴⁴⁾ ... bis auf ein Minus Zeichen für die Einheitseigenvektoren.

⁽⁴⁵⁾ ... oder zumindest die des Autors!

Steinerscher Satz

Trägheitsmomente um die Symmetrieachsen eines starren Körpers — d.h. entsprechend dem Fall, wo der Ursprungspunkt des Koordinatensystems in der Definition (IV.26) im Schwerpunkt des Körpers liegt — sind unter Betrachtung der betreffenden Symmetrie meist einfacher zu berechnen. Oft dreht sich der starre Körper aber um eine Achse, die nicht durch seinen Schwerpunkt durchläuft. Anstatt das Trägheitsmoment um die verschobene Drehachse explizit aus Definition (IV.26) zu berechnen, ist es dann schneller, das folgende Resultat zu benutzen.

Theorem (Satz von Steiner^(t)):

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit Masse M um eine beliebige Achse im Abstand L von seinem Schwerpunkt ist gegeben durch die Summe aus ML^2 und dem Trägheitsmoment des Körpers um die parallele Drehachse, die durch den Schwerpunkt geht. (IV.40a)

Bezeichnet man mit I bzw. I' das Drehmoment um eine durch den Schwerpunkt durchlaufende Drehachse bzw. um eine dazu parallele Achse im Abstand L vom Schwerpunkt, so lautet der Steinersche Satz

$$I' = I + ML^2. \quad (\text{IV.40b})$$

Zum Beweis dieses Satzes betrachte man neben dem körperfesten Bezugssystem \mathcal{B} mit Ursprung im Schwerpunkt des starren Körpers ein zweites körperfestes Bezugssystem \mathcal{B}' , dessen Nullpunkt um \vec{b} relativ zu \mathcal{B} verschoben ist, während die Koordinatenachsen von \mathcal{B}' parallel zu denen von \mathcal{B} bleiben. Dann gilt für die Position jedes (Massen)Punkts⁽⁴⁶⁾ des starren Körpers relativ zu beiden Bezugssystemen $\vec{x}'_a = \vec{x}_a - \vec{b}$. Dies gibt für den Trägheitstensor relativ zu \mathcal{B}'

$$\begin{aligned} I'^{ij} &= \sum_a m_a \left[(\vec{x}'_a)^2 \delta^{ij} - x'^i_a x'^j_a \right] = \sum_a m_a \left[(\vec{x}_a - \vec{b})^2 \delta^{ij} - (x^i_a - b^i)(x^j_a - b^j) \right] \\ &= I^{ij} - 2\delta^{ij} \vec{b} \cdot \sum_a m_a \vec{x}_a + b^i \sum_a m_a x^j_a + b^j \sum_a m_a x^i_a + \sum_a m_a (b^2 \delta^{ij} - b^i b^j). \end{aligned}$$

Dabei verschwinden der zweite, der dritte und der vierte Beiträge der zweiten Zeile, und die Summe der Massen im fünften Term kann durch die Gesamtmasse ersetzt werden. Somit ergibt sich die tensorielle Form des Steinerschen Satzes:

$$I'^{ij} = I^{ij} + M(\vec{b}^2 \delta^{ij} - b^i b^j). \quad (\text{IV.40c})$$

Um das Drehmoment um eine gegebene Achse zu erhalten, multipliziert man diese Gleichung mit den Komponenten des Einheitsvektors in Richtung der Achse, vgl. Gl. (IV.36), woraus sich Gl. (IV.40b) ergibt.

Beispiel: homogener Zylinder (2)

Wir betrachten nochmals den homogenen Vollzylinder (Masse M , Radius R) der Abb. (IV.4), der sich jetzt um eine Achse drehen soll, die parallel zu seiner Symmetrieachse ist, um den Abstand L aber verschoben ist.

Dann ist gemäß dem Steinerschen Satz (IV.40) das Trägheitsmoment des Zylinders um diese Achse

$$I'^{33} = I^{33} + ML^2 = \frac{MR^2}{2} + ML^2,$$

wobei der Ausdruck (IV.38) des Trägheitsmoments um die Symmetrieachse benutzt wurde.

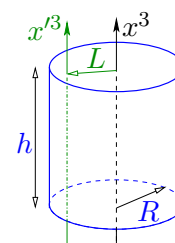


Abbildung IV.5

⁽⁴⁶⁾Hier wird der Beweis für ein System aus diskreten Massenpunkten dargelegt. Der Beweis lässt sich ohne Schwierigkeit auf den Fall eines kontinuierlichen Systems übersetzen.

^(t)J. STEINER, 1796–1863