IV.1.2 Multidimensionales Problem

Sei jetzt ein physikalisches System mit $s > 1$ Freiheitsgraden, denen verallgemeinerte Koordinaten $q^1, \ldots, q^s$ — kollektiv mit $\mathbf{q}$ bezeichnet — zugeordnet sind. Für die Lagrange-Funktion wird die zeitunabhängige Form

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{q})\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - V(\mathbf{q}) \tag{IV.7}$$

angenommen, wobei $\lambda_{\alpha\beta}$ symmetrisch unter dem Austausch von α und β ist.

Falls $\lambda_{\alpha\beta}$ nicht symmetrisch ist, trägt eigentlich nur der symmetrische Anteil $\frac{1}{2}(\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha})$ zur kinetischen Energie bei, während der antisymmetrische Anteil $\frac{1}{2}(\lambda_{\alpha\beta} - \lambda_{\beta\alpha})$ sich in der Summe über alle Werte von α und β kürzt.

Sei $\mathbf{q}^{(0)}(t) \equiv \mathbf{q}_0 \equiv \{q_0^\alpha\}_{\alpha=1,\dots,s}$ eine Gleichgewichtslösung, d.h. eine stationäre Lösung der Bewegungsgleichungen. Dann hat das Potential V automatisch ein Extremum bei $\mathbf{q}_0$, d.h.

$$\frac{\partial V(\mathbf{q}_0)}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \in \{1,\dots,s\}, \tag{IV.8}$$

so dass die verallgemeinerte Kraft für die Gleichgewichtslösung Null ist.

Betrachtet man jetzt eine kleine Variation

$$q^\alpha(t) = q_0^\alpha + \delta q^\alpha(t) \tag{IV.9}$$

der Trajektorie im Konfigurationsraum, so gibt eine Taylor-Entwicklung der Lagrange-Funktion bis zur zweiten Ordnung in den δq^α und $\delta \dot{q}^\alpha$

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0) \delta\dot{q}^\alpha\, \delta\dot{q}^\beta - V(\mathbf{q}_0) - \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial V(\mathbf{q}_0)}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha - \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{q}_0)}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \delta q^\alpha\, \delta q^\beta.$$

Unter Verwendung der Bedingungen (IV.8) und nach Einführung der kurzen Notationen

$$m_{\alpha\beta} \equiv \lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_0), \qquad k_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2 V(\mathbf{q}_0)}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \tag{IV.10a}$$

bleibt

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \simeq \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \frac{m_{\alpha\beta}}{2} \delta\dot{q}^\alpha\, \delta\dot{q}^\beta - \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \frac{k_{\alpha\beta}}{2} \delta q^\alpha\, \delta q^\beta - V(\mathbf{q}_0). \tag{IV.10b}$$

Wie in § IV.1.1 ist die Lagrange-Funktion quadratisch in den verallgemeinerten Koordinaten und den zugehörigen Geschwindigkeiten ohne Mischterm zwischen den beiden. Dafür sind die verschiedenen Koordinaten miteinander gekoppelt und das gleiche gilt für die Geschwindigkeiten.

Die Lagrange-Funktion (IV.10b) kann noch in Matrixschreibweise geschrieben werden. Sei m bzw. k die $s \times s$-Matrix mit Elementen $m_{\alpha\beta}$ bzw. $k_{\alpha\beta}$. Beide Matrizen sind symmetrisch, d.h. $\mathsf{m} = \mathsf{m}^\mathsf{T}$ und $\mathsf{k} = \mathsf{k}^\mathsf{T}$: einerseits wurde angenommen, dass die $f_{\alpha\beta}$ symmetrisch sind, woraus die Symmetrie von m folgt. Andererseits sind die $k_{\alpha\beta}$ die zweiten Ableitungen einer Funktion — die wir implizit als mindestens zweimal kontinuierlich differenzierbar annehmen —, und somit ebenfalls symmetrisch.

Führt man nun die s-dimensionalen Spaltenvektoren $\delta\mathbf{q}$ bzw. $\delta\dot{\mathbf{q}}$ mit Komponenten $\{\delta q^\alpha\}$ bzw. $\{\delta\dot{q}^\alpha\}$ ein, und dementsprechend die Zeilenvektoren $\delta\mathbf{q}^\mathsf{T}$ und $\delta\dot{\mathbf{q}}^\mathsf{T}$, so lässt sich Gl. (IV.10b) noch in der kürzeren Form

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \simeq \frac{1}{2} \delta\dot{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\, \mathsf{m}\, \delta\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \delta\mathbf{q}^\mathsf{T}\, \mathsf{k}\, \delta\mathbf{q} - V(\mathbf{q}_0) \tag{IV.10c}$$

schreiben. Ab jetzt werden wir die Konstante $-V(\mathbf{q}_0)$, die keine Rolle in den Bewegungsgleichungen spielt, weglassen.

Als symmetrische reelle Matrizen sind m und k diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Im Folgenden wird gezeigt, dass sie in der Tat gleichzeitig diagonalisierbar sind, und zwar auf Kosten einer geeigneten Wahl von verallgemeinerten Koordinaten.

Zuerst kann man die Matrix m diagonalisieren: da m symmetrisch ist, existieren eine orthogonale $s \times s$-Matrix $\mathscr{R}$ und eine diagonale Matrix

$$\mathsf{m}_D \equiv \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & m_{s-1} & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & m_s \end{pmatrix} \equiv \operatorname{diag}(m_1, \dots, m_s)$$

derart, dass sie

$$\mathsf{m}_D = \mathscr{R}\, \mathsf{m}\, \mathscr{R}^\mathsf{T}$$

erfüllen, wobei die Eigenwerte $\{m_\alpha\}$ alle reell sind. Eigentlich werden in praktischen Fällen die $\{m_\alpha\}$ sogar positiv sein: $m_\alpha > 0$. Da $\mathscr{R}$ eine Drehmatrix ist, gilt für ihre Inverse $\mathscr{R}^{-1} = \mathscr{R}^\mathsf{T}$, und man hat äquivalent

$$\mathsf{m} = \mathscr{R}^\mathsf{T}\,\mathsf{m}_D\,\mathscr{R},$$

so dass nach Einsetzen in Gl. (IV.10c)

$$\mathcal{L}\big(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\big) = \frac{1}{2}\delta\dot{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\mathscr{R}^\mathsf{T}\,\mathsf{m}_D\,\mathscr{R}\,\delta\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{q}^\mathsf{T}\,\mathsf{k}\,\delta\mathbf{q}.$$

Sei $\delta\mathbf{q}' \equiv \mathscr{R}\,\delta\mathbf{q}$, entsprechend einem Koordinatenwechsel — hier handelt es sich um eine einfache Drehung — im Raum der verallgemeinerten Koordinaten. Da die Matrix m, wie ihre Elemente, nicht von der Zeit abhängt, ist es auch der Fall der Drehmatrix $\mathscr{R}$. Somit gilt $\delta\dot{\mathbf{q}}' = \mathscr{R}\,\delta\dot{\mathbf{q}}$. Dann erhält man für die Lagrange-Funktion in den neuen Variablen

$$\mathcal{L}\big(\delta\mathbf{q}',\delta\dot{\mathbf{q}}'\big) = \frac{1}{2}\delta\dot{\mathbf{q}}'^\mathsf{T}\,\mathsf{m}_D\,\delta\dot{\mathbf{q}}' + \frac{1}{2}\delta\mathbf{q}'^\mathsf{T}\mathscr{R}\,\mathsf{k}\,\mathscr{R}^\mathsf{T}\,\delta\mathbf{q}'. \tag{IV.11}$$

Drückt man den kinetischen Term durch die (Zeitableitungen der) Komponenten $\{\delta q^{\alpha'}\}$ aus, die Linearkombinationen der ursprünglichen verallgemeinerten Koordinaten $\{\delta q^\beta\}$ sind, so sieht man explizit, dass die kinetische Energie jetzt keinen Mischterm enthält:

$$\mathcal{L}\big(\delta\mathbf{q}',\delta\dot{\mathbf{q}}'\big) = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{m_\alpha}{2}\big(\delta\dot{q}^{\alpha'}\big)^2 + \frac{1}{2}\delta\mathbf{q}'^\mathsf{T}\mathscr{R}\,\mathsf{k}\,\mathscr{R}^\mathsf{T}\,\delta\mathbf{q}'.$$

Dagegen wird der Potential-Term im Allgemeinen noch nicht-diagonal sein.

Um den letzteren zu diagonalisieren, ohne dabei die Diagonalform der kinetischen Energie zu zerstören, kann man nicht direkt eine zweite Drehung durchführen. Stattdessen soll man zunächst neue verallgemeinerte Koordinaten $Q^{\alpha'} \equiv \sqrt{m_\alpha}\,\delta q^{\alpha'}$ einführen, entsprechend einer Reskalierung der $\delta q^{\alpha'}$, wobei der Skalierungsfaktor unterschiedlich für jede Koordinate ist. Das ist ja möglich, denn die generalisierten Koordinaten keine „absolute“ Zahlenwerte von Vektorkomponenten sind, sondern parametrisieren sie die möglichen Konfigurationen der Freiheitsgrade.

Führt man die zeitunabhängigen diagonalen Matrizen

$$\mathsf{m}_D^{1/2} \equiv \mathrm{diag}(\sqrt{m_1},\dots,\sqrt{m_s}) \quad \text{und} \quad \mathsf{m}_D^{-1/2} \equiv \mathrm{diag}(1/\sqrt{m_1},\dots,1/\sqrt{m_s})$$

ein, wobei die Exponenten $1/2$, $-1/2$ als eine Notation ohne Bedeutung zu sehen sind, so gelten

$$\mathbf{Q}' = \mathsf{m}_D^{1/2}\,\delta\mathbf{q}' \quad \text{und} \quad \delta\mathbf{q}' = \mathsf{m}_D^{-1/2}\,\mathbf{Q}',$$

wobei $\mathbf{Q}'$ der Spaltenvektor mit Komponenten $\{Q^{\alpha'}\}$ bezeichnet. Die Lagrange-Funktion lässt sich dann als Funktion der $\{Q^{\alpha'}\}$ und ihrer Zeitableitungen schreiben

$$\mathcal{L}\big(\mathbf{Q}',\dot{\mathbf{Q}}'\big) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{Q}}'^\mathsf{T}\dot{\mathbf{Q}}' - \frac{1}{2}\mathbf{Q}'^\mathsf{T}\mathsf{m}_D^{-1/2}\mathscr{R}\,\mathsf{k}\,\mathscr{R}^\mathsf{T}\,\mathsf{m}_D^{-1/2}\,\mathbf{Q}'. \tag{IV.12}$$

Wie sich einfach nachprüfen lässt, ist die Matrix $\mathsf{m}_D^{-1/2}\mathscr{R}\,\mathsf{k}\,\mathscr{R}^\mathsf{T}\,\mathsf{m}_D^{-1/2}$ symmetrisch:

$$\big[\mathsf{m}_D^{-1/2}\mathscr{R}\,\mathsf{k}\,\mathscr{R}^\mathsf{T}\,\mathsf{m}_D^{-1/2}\big]^\mathsf{T} = \big[\mathsf{m}_D^{-1/2}\big]^\mathsf{T}\mathscr{R}\,\mathsf{k}\,\mathscr{R}^\mathsf{T}\,\big[\mathsf{m}_D^{-1/2}\big]^\mathsf{T}.$$

Deshalb kann sie diagonalisiert werden, d.h. es existiert eine zeitunabhängige diagonale Matrix $\mathsf{K}_D \equiv \mathrm{diag}(K_1,\dots,K_s)$ mit reellen $\{K_\alpha\}$ und eine s-dimensionale Drehmatrix $\mathscr{R}'$, die

$$\mathsf{m}_D^{-1/2}\mathscr{R}\,\mathsf{k}\,\mathscr{R}^\mathsf{T}\,\mathsf{m}_D^{-1/2} = \mathscr{R}'^\mathsf{T}\,\mathsf{K}_D\,\mathscr{R}'$$

erfüllen. Sei ein neuer Satz von s verallgemeinerten Koordinaten $\{Q^\alpha\}$, Linearkombinationen der $\{Q^{\beta'}\}$, definiert durch $\mathbf{Q} \equiv \mathscr{R}'\mathbf{Q}'$, woraus $\mathbf{Q}' = \mathscr{R}'^\mathsf{T}\mathbf{Q}$ folgt. Diese neuen Koordinaten bringen natürlich den Potential-Term der Lagrange-Funktion in Diagonalform.

Andererseits gilt

$$\dot{\mathbf{Q}}'^\mathsf{T}\dot{\mathbf{Q}}' = \dot{\mathbf{Q}}^\mathsf{T}\mathscr{R}'\mathscr{R}'^\mathsf{T}\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}}^\mathsf{T}\dot{\mathbf{Q}} = \sum_{\alpha=1}^{s}\big(\dot{Q}^\alpha\big)^2$$

für den kinetischen Anteil der Lagrange-Funktion, die insgesamt durch

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{Q}}^{\mathsf{T}}\dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\,\mathsf{K}_D\,\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\Big[\big(\dot{Q}^{\alpha}\big)^2 - K_\alpha(Q^\alpha)^2\Big] \tag{IV.13}$$

gegeben ist. Das heißt, die neuen verallgemeinerten Koordinaten $\{Q^\alpha\}$, deren Bewegungsgleichungen nach Anwendung der Euler–Lagrange-Gleichungen

$$\ddot{Q}_\alpha(t) = -K_\alpha Q^\alpha(t) \quad \text{für } \alpha = 1,\dots,s$$

lauten, sind jetzt entkoppelt von einander. Diese Variablen $\{Q^\alpha\}$ mit einer einfachen Bewegungsgleichung werden *Normalkoordinaten* oder auch *Normalmoden* genannt.

Für jede dieser Normalkoordinaten kann dann die Fallunterscheidung am Ende des § IV.1.1 wiederholt werden.
Somit entspricht der Fall $K_\alpha > 0$ einem harmonischen Oszillator mit Kreisfrequenz $\sqrt{K_\alpha}$, und das System ist stabil unter kleinen Variationen entlang der Richtung von Q^α. Dagegen ist das System instabil falls $K_\alpha < 0$, denn eine kleine Auslenkung kann zu einer großen Änderung führen. Schließlich ist das Potential „flach" entlang einer Richtung mit $K_\alpha = 0$, und die zugehörige verallgemeinerte Koordinate Q^α ist zyklisch — zumindest in der Näherung, in der Gl. (IV.13) gilt.

Beispiel: Gekoppelte harmonische Oszillatoren

Zur Illustration der Zerlegung in Normalmoden, d.h. des Übergangs aus der Form (IV.10b) der Lagrange-Funktion zur einfacheren Form (IV.13), betrachten wir das in Abb. IV.1 dargestellte System aus zwei gekoppelten identischen harmonischen Oszillatoren (Masse m, Stärke k'), wobei die Schwingungen entlang der x-Richtung stattfinden.

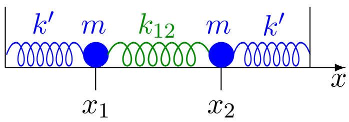

Abbildung IV.1

Seien x_1 und x_2 die Auslenkungen der beiden Massen aus ihren jeweiligen Ruhelagen. Die (Standard-)Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ des Systems ist

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k' x_1^2 - \frac{1}{2}k' x_2^2 - \frac{1}{2}k_{12}(x_2 - x_1)^2. \tag{IV.14}$$

Dabei spielen die Ablenkungen x_1, x_2 die Rolle der „kleinen Variationen" $\{\delta q^\alpha\}$ des allgemeinen Formalismus. Das angenommene Potential ist schon quadratisch in diesen Ablenkungen, entsprechend dem Modell des harmonischen Oszillators. Das heißt, hier ist keine Taylor-Entwicklung in x_1, x_2 bis zur zweiten Ordnung nötig, weil die Lagrange-Funktion [s. auch Gl. (IV.15a) unten] schon der Form (IV.10b) ist.

Diese Lagrange-Funktion lässt sich noch als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 + k_{12}x_1x_2 \tag{IV.15a}$$

schreiben, wobei $k \equiv k' + k_{12}$. Dies ist der Form (IV.11): der kinetische Term ist schon in Diagonalform, die potentielle Energie noch nicht. In Matrixform lautet dies noch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{x}_1 & \dot{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & -k_{12} \\ -k_{12} & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}. \tag{IV.15b}$$

Sei nun $Q^{1'} \equiv \sqrt{m}x_1$, $Q^{2'} \equiv \sqrt{m}x_2$. Definiert man

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \quad \text{und} \quad \omega_1^2 \equiv \frac{k_{12}}{m},$$

so lässt sich die Lagrange-Funktion als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{Q}^{1'} & \dot{Q}^{2'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{Q}^{1'}\\ \dot{Q}^{2'}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}Q^{1'} & Q^{2'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_0^2 & -\omega_1^2\\ -\omega_1^2 & \omega_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^{1'}\\ Q^{2'}\end{pmatrix}$$

umschreiben, d.h. wie in Gl. (IV.12). Jetzt soll die Matrix

$$\mathsf{M} \equiv \begin{pmatrix}\omega_0^2 & -\omega_1^2\\ -\omega_1^2 & \omega_0^2\end{pmatrix}$$

diagonalisiert werden. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det\left(\mathsf{M} - \lambda \mathbb{1}_2\right) = \left(\omega_0^2 - \lambda\right)^2 - \left(\omega_1^2\right)^2$$

sind die Eigenwerte von M, und zwar $\lambda_1 = \omega_0^2 - \omega_1^2$ und $\lambda_2 = \omega_0^2 + \omega_1^2$. Die zugehörigen (hier auf 1 normierten) Eigenvektoren sind

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\mathsf{M} = \mathscr{R}'^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}\omega_0^2-\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_0^2+\omega_1^2\end{pmatrix}\mathscr{R}' \quad \text{mit} \quad \mathscr{R}' \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Schließlich sind die Normalmoden Q^1, Q^2 durch

$$\begin{pmatrix}Q^1\\ Q^2\end{pmatrix} = \mathscr{R}'\begin{pmatrix}Q^{1'}\\ Q^{2'}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}Q^{1'}+Q^{2'}\\ Q^{2'}-Q^{1'}\end{pmatrix}$$

gegeben. Somit ist Q^1 proportional zur Schwerpunktkoordinate $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und Q^2 zur Relativkoordinate $x_2 - x_1$. Die entsprechenden Bewegungsgleichungen lauten

$$\ddot{Q}^1 = -\lambda_1 Q^1 = -\frac{k'}{m}Q^1 \quad \text{und} \quad \ddot{Q}^2 = -\lambda_2 Q^2 = -\frac{k' + 2k_{12}}{m}Q^2.$$

Wie erwartet sind diese Gleichungen entkoppelt. Da k' und $k' + 2k_{12}$ beide positiv sind, sind die Bewegungen von Q^1 und Q^2 harmonische Schwingungen.