Kapitel IV

Lagrange-Formalismus: Anwendungen

In diesem Kapitel werden einige längeren Anwendungen des in Kap III eingeführten Lagrange-Formalismus vorgestellt.

IV.1 Kleine Schwingungen

In der Physik, oder in der mathematischen Modellierung eines physikalischen Systems, kommt oft das folgende Problem vor. Gegeben ein mechanisches System, beschrieben durch eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, ist die Lösung der Bewegungsgleichungen für bestimmte Anfangsbedingungen bekannt. Sei $\mathbf{q}^{(0)}(t)$ diese Lösung. Das System — in der Praxis entweder das gleiche oder eine Kopie davon, wobei alle relevanten Nebenbedingungen gleich bleiben — wird irgendwie leicht „gestört“, entsprechend z.B. einer kleiner Änderung der Anfangsbedingungen. Die Frage ist dann, was ist die neue Lösung $\mathbf{q}(t)$ der Bewegungsgleichungen für das gestörte System?

Intuitiv kann man sich vorstellen, dass in manchen Fällen $\mathbf{q}(t)$ „in der Nähe“[39] der ungestörten Lösung $\mathbf{q}^{(0)}(t)$ bleibt. Andererseits kann eine kleine Störung auch manchmal zu einer großen Änderung führen, wie z.B. wenn eine Kugel auf dem schmalen Gipfel eines Hügels ein wenig verschoben ist, und damit anfängt, hinabzurollen.

Dieser Abschnitt befasst sich mit diesem Problem der kleinen Auslenkungen aus einer Bezugslösung, erstens für ein System mit einem einzigen Freiheitsgrad (§ IV.1.1), dann für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden (§ IV.1.2). Dabei werden die beiden oben diskutierten Verhalten gefunden. Im letzteren Fall mit $s > 1$ Freiheitsgraden wird auch gezeigt, dass auch wenn diese unter einander gekoppelt sind, jedoch kann man immer s Linearkombinationen ihrer kleinen Variationen finden, die sich unabhängig von einander bewegen.

Der Einfachheit halber beschränken sich die Diskussionen auf Systeme mit einer zeitunabhängigen Lagrange-Funktion und mit konservativen Kräften.Darüber hinaus wird angenommen, dass die Referenzlösung eine „Gleichgewichtslösung“ der Euler–Lagrange-Gleichungen darstellt, d.h. sie ist stationär ($\mathbf{q}^{(0)}$ ist zeitunabhängig), woraus sofort $\dot{\mathbf{q}}^{(0)}(t) = 0$ folgt.

IV.1.1 Eindimensionales Problem

Wir betrachten zuerst ein physikalisches System mit einem einzigen Freiheitsgrad q. Dies kann z.B. die eindimensionale Bewegung eines Massenpunkts sein, oder eine mehrdimensionale Bewegung

[39] Um diese qualitative Redensart mehr quantitativ auszudrücken, sollte man einen Abstand in einem Funktionenraum einführen, was hier nicht gemacht wird.

mit genug Zwangsbedingungen, damit am Ende nur $s = 1$ Freiheitsgrad übrig bleibt.

Es wird angenommen, dass das System invariant unter zeitlichen Translationen ist, d.h. dass seine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ nicht von der Zeit abhängt. Für diese wird die Form

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\lambda(q)}{2}\dot{q}^2 - V(q) \tag{IV.1}$$

angenommen mit einer kinetischen Energie, die quadratisch von der generalisierten Geschwindigkeit abhängt. Dabei sind λ und V genug reguläre Funktionen einer reellen Variablen.

Sei $q^{(0)}(t) \equiv q_0$ mit $q_0 \in \mathbb{R}$ eine stationäre Lösung der assoziierten Euler–Lagrange-Gleichung, d.h. $\dot{q}^{(0)}(t) = 0$. Es wird angenommen, dass $\lambda(q_0)$ ungleich Null ist. Damit die konstante Funktion $q^{(0)}$ wirklich eine Gleichgewichtslösung darstellt, soll das Potential ein Extremum bei q_0 haben

$$V'(q_0) = 0, \tag{IV.2}$$

wobei der Strich die Ableitung nach der verallgemeinerten Koordinate bezeichnet. D.h., die generalisierte Kraft verschwindet in diesem Punkt.

Die Euler–Lagrange-Gleichung (III.11) lautet hier

$$\lambda\big(q(t)\big)\,\ddot{q}(t) + \lambda'\big(q(t)\big)\,\dot{q}(t)^2 = \frac{\lambda'\big(q(t)\big)}{2}\dot{q}(t)^2 - V'\big(q(t)\big),$$

so dass $\dot{q}^{(0)}(t) = 0$ und daher $\ddot{q}^{(0)}(t) = 0$ automatisch zur Bedingung (IV.2) führen.

Wir betrachten nun eine kleine, zeitabhängige Variation der generalisierten Koordinate um den Gleichgewichtswert

$$q(t) \equiv q^{(0)}(t) + \delta q(t) = q_0 + \delta q(t), \tag{IV.3}$$

wobei $\delta q(t)$ „klein“ sein soll, d.h. höhere Potenzen $[\delta q(t)]^n$ sollen viel kleiner als die niedrigeren Ordnungen sein. Die Zeitableitung $\delta\dot{q}(t)$ wird als kleine Größe der gleichen Ordnung wie $\delta q(t)$ betrachtet.

Die Taylor-Entwicklung der Lagrange-Funktion (IV.1) um den Punkt $(q = q_0, \dot{q} = 0)$ bis zur zweiten Ordnung lautet

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(q_0 + \zeta, \eta\big) &= \frac{\lambda(q_0 + \zeta)}{2}\eta^2 - V(q_0 + \zeta)\\ &= \frac{\lambda(q_0)}{2}\eta^2 - V(q_0) - V'(q_0)\zeta - \frac{V''(q_0)}{2}\zeta^2 + \mathcal{O}\big(\zeta^3, \zeta^2\eta, \zeta\eta^2, \eta^3\big).\end{aligned} \tag{IV.4}$$

Dabei tragen die höheren Terme in ζ in der Taylor-Entwicklung von $\lambda(q_0 + \zeta)$ nicht bei, weil η^2 schon zweiter Ordnung ist. Mit $\zeta = \delta q(t)$, $\eta = \delta\dot{q}$ und unter Berücksichtigung der Bedingung (IV.2) ergibt sich

$$\mathcal{L}\big(q_0 + \delta q, \delta\dot{q}\big) \simeq \frac{\lambda(q_0)}{2}(\delta\dot{q})^2 - V(q_0) - \frac{V''(q_0)}{2}(\delta q)^2, \tag{IV.5}$$

wobei die vernachlässigten Terme der Ordnung $\mathcal{O}\big((\delta q)^3\big)$ sind. D.h. die Lagrange-Funktion ist quadratisch in der verallgemeinerten Koordinate und der zugehörigen Geschwindigkeit, ohne Mischterm. Der zweite Term auf der rechten Seite ist eine Konstante, und trägt daher nicht zu den Bewegungsgleichungen bei.

Die Aussage „$\delta q(t)$ soll klein sein“ ist in der Tat sehr schlampig: da $q(t)$, und somit $\delta q(t)$, im Allgemeinen eine physikalische Dimension besitzen kann, hängt sein Zahlenwert von der gewählten Einheit ab, so dass $\delta q(t)$ nicht „klein“ sein kann, sondern nur klein gegenüber einem Referenzwert. Eine mathematisch mehr präzise Formulierung lautet wie folgt.
Sei $q_1(t)$ beliebig und $|\varepsilon| \ll 1$: dann darf ε „klein“ genannt werden. Setzt man nun $\zeta = \varepsilon q_1(t)$ und $\eta = \varepsilon\dot{q}_1(t)$ in Eq. (IV.4) ein, so findet man

$$\mathcal{L}\big(q_0 + \varepsilon q_1, \varepsilon\dot{q}_1\big) \sim \frac{\lambda(q_0)}{2}(\varepsilon\dot{q}_1)^2 - V(q_0) - V'(q_0)\varepsilon q_1 - \frac{V''(q_0)}{2}(\varepsilon q_1)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Mit $\varepsilon q_1 = \delta q$ und $\varepsilon\dot{q}_1 = \delta\dot{q}$ ist dies genau Gl. (IV.5).

Ausgehend von der Lagrange-Funktion (IV.5) und unter Verwendung von $\partial/\partial q = \partial/\partial(\delta q)$ und $\partial/\partial\dot{q} = \partial/\partial(\delta\dot{q})$ lauten die partiellen Ableitungen auf beiden Seiten der Euler–Lagrange-Gleichung (III.11)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = -V''(q_0)\,\delta q, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \lambda(q_0)\,\delta\dot{q}.$$

Nach einer Zeitableitung des letzteren Terms lautet die Bewegungsgleichung schließlich

$$\delta\ddot{q}(t) = -\frac{V''(q_0)}{\lambda(q_0)}\,\delta q(t). \tag{IV.6}$$

Je nach dem Zahlenwert des konstanten Verhältnisses $V''(q_0)/\lambda(q_0) > 0$ — oder eigentlich von $V''(q_0)$, weil $\lambda(q_0)$ in physikalischen Problemen immer nicht-negativ ist, wie hiernach angenommen wird — lassen sich drei Fälle unterscheiden.

- Für $V''(q_0) > 0$ kann man $\omega^2 \equiv V''(q_0)/\lambda(q_0)$ definieren. Dann ist Gl. (IV.6) die Bewegungsgleichung eines *harmonischen Oszillators* mit Kreisfrequenz ω.

  Die allgemeine Lösung der Gleichung

  $$\delta q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

  mit Konstanten A und B, die von den Anfangsbedingungen abhängen, bleibt begrenzt: das System führt kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage q_0 durch, die somit *stabil* ist.

- Für $V''(q_0) < 0$ kann man $\kappa^2 \equiv -V''(q_0)/\lambda(q_0)$ einführen. Dann ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung der Form

  $$\delta q(t) = A\,\mathrm{e}^{\kappa t} + B\,\mathrm{e}^{-\kappa t}.$$

  Einer der beiden Terme — der erste falls $\kappa > 0$ ist — wächst exponentiell schnell mit der Zeit und ist daher unbegrenzt, d.h. bleibt nicht in der Nähe der Gleichgewichtslösung, die *instabil* ist.

  > Wegen des Wachstums wird $\delta q(t)$ nicht mehr „klein" bleiben, so dass die Näherungen, die zur Bewegungsgleichung führen, nicht mehr gelten. Anstatt unendlich zu wachsen, wird wahrscheinlich eine andere (Gleichgewichts)Lösung in endlichem Abstand von q_0 gefunden.

- Für $V''(q_0) = 0$ führt die approximative Bewegungsgleichung (IV.6) zu einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, d.h. wieder unbegrenzt. Jedoch die höheren Terme in der Taylor-Entwicklung könnten dieses Verhalten ändern.