III.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Im Rahmen des newtonschen Formalismus sind Erhaltungsgrößen bzw. Erhaltungssätze schöne Konstrukte, deren Ursprung aber unklar bleibt: Gleichungen werden manipuliert, Größen werden eingeführt, auf erster Sicht gibt es aber keine tiefere unterliegende, gemeinsame Begründung für die Existenz der verschiedenen Konstanten der Bewegung.

Im Lagrange-Formalismus lässt sich eine solche globale Erklärung für die Erhaltungssätze einfacher erkennen. Somit spiegelt eine Erhaltungsgröße die Invarianz der theoretischen Beschreibung, und der Physik, unter bestimmten Transformationen der Koordinaten wider. Diese Invarianz entspricht einer *Symmetrie* des physikalischen Systems.

Dieser Zusammenhang zwischen Invarianz der Physik unter einigen Transformationen und Erhaltungsgrößen wird zunächst am Beispiel verschiedener Arten von Transformationen der Raumzeit-Koordinaten — Translationen in der Zeit oder im Raum und Drehungen — illustriert (§ III.3.1). Die Verallgemeinerung auf den Fall mehr abstrakter Transformationen wird dann in § III.3.2 skizziert, wobei der Begriff von Symmetrien im physikalischen Sinne genauer definiert wird.

III.3.1 Invarianz unter Raumzeit-Transformationen

Per Annahme ist die Raumzeit der klassischen Mechanik *zeitlich und räumlich homogen* und *räumlich isotrop*. Betrachte man ein idealisiertes Experiment — einschließlich der ganzen Umgebung, die dabei einen Einfluss hat —, das man beliebig verschieben, sowohl im Raum als in der Zeit, oder drehen kann. Dann soll das Ergebnis des Experiments weder von der Anfangszeit, noch von der Position oder der Orientierung im Raum abhängen. Die Modellierung dieses Experiments soll dann invariant unter zeitlichen und räumlichen Translationen und unter Drehungen sein. Daraus ergibt sich die Konstanz in der Bewegung der drei „klassischen“ Erhaltungsgrößen der newtonschen Mechanik, und zwar Energie, Impuls und Drehimpuls.

III.3.1 a Homogenität der Zeit und Energieerhaltung

Als erstes können wir die Folgerung der Invarianz unter Zeittranslationen untersuchen. Wir betrachten dementsprechend eine Theorie mit einer Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$, die nicht explizit von der

Zeit abhängt:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),$$

wobei die $\mathbf{q} = \{q^\alpha\}_{\alpha=1,\dots,s}$ verallgemeinerte Koordinaten sind.

Definiert man dann eine Größe, die *Energie* des Systems, durch

$$\boxed{E \equiv \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial\mathcal{L}\big(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)\big)}{\partial\dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha(t) - \mathcal{L}\big(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)\big),} \tag{III.36a}$$

so ist diese eine Erhaltungsgröße

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0.} \tag{III.36b}$$

Anders gesagt folgt Energieerhaltung in einem physikalischen System aus der Invarianz des Systems unter Zeitverschiebungen.

Beweis: das einfache Ableiten der Definition (III.36a) nach der Zeit gibt

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha\right) - \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha\right) - \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t},$$

wobei die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ und ihre partielle Ableitungen im Punkt $\big(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)\big)$ auszuwerten sind, bevor die totale Zeitableitung gebildet wird. Der erste Term auf der rechten Seite kann mithilfe der Produktregel und der Euler–Lagrange-Gleichung (III.11) transformiert werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha}\frac{\mathrm{d}\dot{q}^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha}\ddot{q}^\alpha \quad \text{für jedes } \alpha.$$

Wiederum lässt sich der zweite Term mithilfe der Kettenregel umschreiben:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^\alpha}\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha}\frac{\mathrm{d}\dot{q}^\alpha}{\mathrm{d}t}\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha}\ddot{q}^\alpha\right).$$

Somit ist die Differenz der beiden Terme genau Null. □

Bemerkung: Unter Verwendung der verallgemeinerten Impulse (III.17) lässt sich die Energie noch als

$$E \equiv \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha\big(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)\big)\dot{q}^\alpha(t) - \mathcal{L}\big(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)\big) \tag{III.36c}$$

schreiben.

Beispiel: Sei ein System mit der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{s}\lambda_{\beta\gamma}(\mathbf{q})\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma - V(\mathbf{q}), \tag{III.37}$$

d.h. mit einer kinetischen Energie, die quadratisch in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\{\dot{q}^\alpha\}$ ist. Dabei sollen die möglicherweise $\mathbf{q}$-abhängigen Koeffizienten $\lambda_{\beta\gamma}$ symmetrisch unter dem Austausch von β und γ sein: $\lambda_{\beta\gamma} = \lambda_{\gamma\beta}$ für alle $\beta,\, \gamma \in \{1,\dots,s\}$.

Der Leserin sind schon zwei Beispiele von kinetischen Termen dieser Form bekannt. Wenn die verallgemeinerten Koordinaten $\{q^\beta\}$ die kartesischen Komponenten $\{x_a^i\}$ von Massenpunkten sind, dann lautet die kinetische Energie

$$\sum_a \frac{1}{2}m_a\dot{\vec{x}}_a^2 = \sum_a\sum_i \frac{1}{2}m_a\big(\dot{x}_a^i\big)^2 = \frac{1}{2}\sum_\beta m_\beta(\dot{q}^\beta)^2,$$

was ein Spezialfall der Gl. (III.37) mit $\lambda_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}m_\beta\,\delta_{\beta\gamma}$ darstellt, wobei $\delta_{\beta\gamma}$ das Kronecker-Symbol ist.

Beschreibt man einen Massenpunkt m, dessen Bewegung in einer Ebene stattfindet, mit Polarkoordinaten (r,θ), so lautet seine kinetische Energie (vgl. § II.2.3 c)

$$T=\frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\big).$$

Setzt man $q^1\equiv r$, $q^2\equiv\theta$, so ist dies noch gleich $\frac{1}{2}\big[m(\dot{q}^1)^2+m(q^1)^2(\dot{q}^2)^2\big]$, d.h. der Form (III.37) mit $\lambda_{11}=m$, $\lambda_{22}=m(q^1)^2$ — in diesem Fall also **q**-abhängig — und $\lambda_{12}=\lambda_{21}=0$.

Das Einsetzen der Lagrange-Funktion (III.37) in die Definition (III.36a) gibt

$$E=\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}^\alpha\frac{\partial}{\partial\dot{q}^\alpha}\left(\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{s}\lambda_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma-V\right)-\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{s}\lambda_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma+V.$$

Einerseits hängt das Potential nicht von der generalisierten Geschwindigkeiten ab, $\partial V/\partial\dot{q}^\alpha=0$ für alle $\alpha\in\{1,\dots,s\}$, so dass der zweite Term in den Klammern keinen Beitrag liefert. Andererseits gilt unter Verwendung der Produktregel

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}^\alpha\frac{\partial}{\partial\dot{q}^\alpha}\left(\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{s}\lambda_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma\right)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}^\alpha\sum_{\beta,\gamma=1}^{s}\lambda_{\beta\gamma}\big(\delta_{\alpha\beta}\dot{q}^\gamma+\dot{q}^\beta\delta_{\alpha\gamma}\big)=\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{s}\lambda_{\beta\gamma}\big(\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma+\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma\big)=2T.$$

Insgesamt ergibt sich daher

$$E=\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{s}\lambda_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma+V=T+V.$$

Man erkennt die bekannte Definition der Gesamtenergie.

III.3.1 b Homogenität des Raums und Impulserhaltung

In diesem Paragraphen wird dem Zusammenhang zwischen Invarianz unter räumlichen Translationen und Impulserhaltung diskutiert.

Definition: Eine verallgemeinerte Koordinate q^α heißt *zyklische Koordinate*, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit davon abhängt, d.h.

$$\frac{\partial\mathcal{L}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial q^\alpha}=0. \tag{III.38}$$

Falls eine generalisierte Koordinate q^α zyklisch ist, dann ist die Lagrange-Funktion invariant unter den Translationen $q^\alpha\to q^\alpha+c$ mit $c\in\mathbb{R}$. Dann ist der dazu kanonisch konjugierte Impuls

$$\boxed{p_\alpha\equiv\frac{\partial\mathcal{L}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial\dot{q}^\alpha}} \tag{III.17}$$

ausgewertet im Punkt $\big(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)\big)$ eine Konstante der Bewegung, d.h.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t}=0.} \tag{III.39}$$

Beispiel: Sei ein System aus N Massenpunkten mit nur inneren Zentralkräften, die aus dem Potential

$$V(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N)=\sum_{1\le a<b\le N}V_{ab}\big(|\vec{x}_a-\vec{x}_b|\big)$$

abgeleitet werden können [vgl. Gl. (II.18)].

Wählt man als verallgemeinerte Koordinaten zum einen (die drei kartesischen Koordinaten von) $\vec{x}_1$, und zum anderen die Relativkoordinaten $\vec{x}_{a1}\equiv\vec{x}_a-\vec{x}_1$, so lautet die Lagrange-Funktion des Systems

$$\mathcal{L}=T-V=\frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^2+\sum_{a=2}^{N}\frac{m_a}{2}\big[\dot{\vec{x}}_{a1}+\dot{\vec{x}}_1\big]^2-\sum_{1\le a<b\le N}V_{ab}\big(|\vec{x}_{a1}-\vec{x}_{b1}|\big).$$

Diese Lagrange-Funktion ist unabhängig von jeder der drei kartesischen Komponenten x_1^i von $\vec{x}_1$, die somit zyklische Koordinaten sind. Demzufolge sind die zugehörigen verallgemeinerten Impulse p_i, $i = 1,2,3$ Erhaltungsgrößen:

$$p_i \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_1^i} = m_1\dot{x}_1^i + \sum_{a=2}^{N} m_a\big(\dot{x}_{a1}^i + \dot{x}_1^i\big) = m_1\dot{x}_1^i + \sum_{a=2}^{N} m_a\dot{x}_a^i,$$

wobei die Unabhängigkeit der Variablen $\dot{x}_1^i$ und $\dot{x}_{a1}^i$ benutzt wurde. Das heißt, die Erhaltungsgröße ist hier die i-te Komponente des Gesamtimpulses des Systems.

III.3.1 c Isotropie des Raums und Drehimpulserhaltung

Wir betrachten jetzt ein System aus Massenpunkten mit Positionen $\vec{x}_a(t)$, dessen Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ invariant unter Drehungen ist. Eine solche Invarianz folgt aus der Isotropie des Raums in Abwesenheit eines externen Feldes — z.B. eines Magnet- oder Schwerefeldes —, das eine bevorzugte Richtung auswählen würde.

Sei $\vec{p}_a$ der zu $\vec{x}_a$ kanonisch konjugierte Impuls. Dann ist der Gesamtdrehimpuls

$$\boxed{\vec{L} \equiv \sum_a \vec{x}_a(t) \times \vec{p}_a(t)} \tag{III.40}$$

eine Erhaltungsgröße, d.h.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0.} \tag{III.41}$$

Zum Beweis dieses Ergebnisses, betrachte man eine beliebige infinitesimale Drehung mit Winkel $\delta\varphi$ um eine Achse mit Einheitsvektor $\vec{e}_{\delta\varphi}$. Sei $\overrightarrow{\delta\varphi} \equiv \delta\varphi\,\vec{e}_{\delta\varphi}$. Die Änderung der Position eines Massenpunkts, die aus der Anwendung der Drehung resultiert, lautet dann

$$\delta\vec{x}_a = \overrightarrow{\delta\varphi} \times \vec{x}_a. \tag{III.42}$$

Unter Nutzung der Kettenregel lautet die Änderung der Lagrange-Funktion für eine Variation $\delta\vec{x}_a$, $\delta\dot{\vec{x}}_a = \mathrm{d}(\delta\vec{x}_a)/\mathrm{d}t$ ihrer Variablen

$$\delta\mathcal{L} = \sum_a\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_a^i}\delta x_a^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_a^i}\delta\dot{x}_a^i\right).$$

Der erste Term in den Klammern lässt sich mithilfe der Euler–Lagrange-Gleichung (III.11) umschreiben:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_a\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_a^i}\right)\delta x_a^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_a^i}\delta\dot{x}_a^i\right] = \sum_a\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}p_{a,i}}{\mathrm{d}t}\delta x_a^i + p_{a,i}\delta\dot{x}_a^i\right),$$

wobei in der zweiten Gleichung die verallgemeinerten Impulse (III.17) eingeführt wurden. Dabei erkennt man in den Klammern die Zeitableitung des Produkts $p_{a,i}\delta x_a^i$, so dass die Summe über i einfach einem Skalarprodukt entspricht:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_a\cdot\delta\vec{x}_a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a \vec{p}_a\cdot\delta\vec{x}_a\right).$$

Fordert man dann, dass die Lagrange-Funktion invariant unter Drehungen bleibt, so ist dieser Variation $\delta\mathcal{L}$ Null für Variationen $\delta\vec{x}_a$ der Form (III.42), d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_a \vec{p}_a\cdot\left(\overrightarrow{\delta\varphi}\times\vec{x}_a\right)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_a \overrightarrow{\delta\varphi}\cdot(\vec{x}_a\times\vec{p}_a)\right] = 0,$$

wobei die erste Gleichheit aus der Invarianz des Spatprodukts unter zyklischen Permutationen folgt.

Da die Drehung zeitunabhängig ist, kann $\overrightarrow{\delta\varphi}$ aus der Ableitung herausgezogen werden. Daher soll die Gleichung

$$\overrightarrow{\delta\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_a \left(\vec{x}_a \times \vec{p}_a\right)\right] = 0$$

für eine beliebige infinitesimale Drehung, d.h. ein beliebiges $\overrightarrow{\delta\varphi}$, gelten: Dies ist nur dann möglich, wenn das zweite Multiplikand des Skalarprodukts verschwindet, was genau Gl. (III.42) entspricht.

Bemerkung: Falls ein System nicht invariant unter allen Drehungen ist, sondern nur unter den Drehungen um eine gegebene Achse, dann ist nur die Komponente des Drehimpulses entlang dieser Richtung erhalten.

III.3.2 Noether-Theorem

Die oben gefundenen Zusammenhänge zwischen Invarianz unter Zeittranslationen und Energieerhaltung, Invarianz unter räumlichen Translationen und Impulserhaltung, oder Invarianz unter Drehungen und Drehimpulserhaltung, sind alle Beispiele eines allgemeineren Theorems, die durch Emmy Noether[s] erfunden wurde. Hiernach wird eine mathematisch nicht-rigorose Version des Satzes dargestellt, ohne genaue Angabe der Annahmen und ohne Beweis.

III.3.2 a Symmetrien

Definition: Ein physikalisches System sei beschrieben durch verallgemeinerte Koordinaten $\mathbf{q}$. Ist seine Wirkung $S[\mathbf{q}]$ invariant unter einer bestimmten Koordinatentransformation

$$t \to t'(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \qquad , \qquad \mathbf{q} \to \mathbf{q}'(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{III.43}$$

so heißt die letztere *Symmetrietransformation*. Dann wird gesagt, dass das System die entsprechende *Symmetrie* besitzt.

Bemerkung: Dabei wird die Invarianz der Wirkung erfordert, nicht jene der Lagrange-Funktion, die eine stärkere Forderung bildet.

Beispielsweise wurden in § III.3.1 verschiedene Symmetrietransformationen erwähnt, die die Wirkung physikalischer Systeme oft invariant lassen: Zeit- und Raumtranslationen, Drehungen. Dabei handelt es sich um sog. *kontinuierliche Symmetrien*, denn jede davon lässt sich durch einen Parameter beschreiben — Translationsparameter, Winkel der Drehung —, der seine Werte in einer „kontinuierlichen Menge“[37] annehmen kann.

Im Gegensatz dazu ist eine Punktspiegelung — wie z.B. die *Zeitumkehr* $t \to t' \equiv -t$ oder die *Raumspiegelung* $\vec{r} \to \vec{r}' \equiv -\vec{r}$ — keine kontinuierliche, sondern eine *diskrete Symmetrie*(-Transformation).

Im Fall einer kontinuierlichen Symmetrie existieren auch infinitesimale Transformationen

$$q^\alpha \to q^{\alpha'} = q^\alpha + \varepsilon Q^\alpha(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad \text{mit} \quad |\varepsilon| \ll 1 \tag{III.44}$$

der Koordinaten, die um den kleinen Parameter ε von der Identität abweichen. Dabei heißen die Funktionen Q^α die *Generatoren* der Koordinatentransformationen.

III.3.2 b Noether-Theorem

Ausgehend von kontinuierlichen Symmetrietransformationen kann man einen wichtigen Satz der mathematischen Physik beweisen, dessen Inhalt wir jetzt nur relativ informell formulieren.

Theorem (Noether-Theorem):

> *Mit jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems kann eine Erhaltungsgröße, die* Noether-Ladung*, assoziiert werden.* (III.45)

[37] D.h. eine Menge, die homöomorph zu einem zusammenhängenden Intervall bzw. Gebiet von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ ist.

[s] E. Noether, 1882–1935

Dazu erklärt noch der genauere Satz, wie die Erhaltungsgröße für eine bestimmte Symmetrie aussieht bzw. wie sie sich berechnen lässt. Die zugehörige Form werden wir jetzt finden, indem wir plausible Elemente eines Beweises darstellen.[38]

Dafür soll man eine infinitesimale Symmetrietransformation betrachten, hier der Einfachheit halber mit $t' = t$. Neben Gl. (III.44) gilt noch für die generalisierten Geschwindigkeiten

$$\dot{q}^\alpha \to \dot{q}^{\alpha'} = \dot{q}^\alpha + \varepsilon \dot{Q}^\alpha(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \tag{III.46}$$

Die Änderung der Lagrange-Funktion

$$\delta\mathcal{L}(t) \equiv \mathcal{L}\big(t, \mathbf{q}'(t), \dot{\mathbf{q}}'(t)\big) - \mathcal{L}\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big),$$

die aus den Transformationen (III.44), (III.46) folgt, kann auf zwei alternative Weisen geschrieben werden. Einerseits gilt

$$\delta\mathcal{L}(t) = \varepsilon \frac{\mathrm{d}f\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big)}{\mathrm{d}t} \tag{III.47}$$

mit einer Funktion f, deren genaue Form von jener der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ und von der Symmetrie abhängt. Der Faktor ε — es könnte theoretisch auch eine ganzzahlige Potenz davon sein — folgt daraus, dass die Variation $\delta\mathcal{L}$ verschwinden muss, wenn ε gegen Null geht. Dann multipliziert dieser Faktor eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten, die sich in der Form einer totalen Zeitableitung schreiben lässt, denn ein solcher Ansatz ist erlaubt, weil er die Wirkung invariant lässt: $S[\mathbf{q}] = S[\mathbf{q}']$, entsprechend der Forderung einer Symmetrietransformation.

Andererseits liefert die Kettenregel für die Variation von $\mathcal{L}$ unter kleinen Variationen $\{\delta q^\alpha\}$, $\{\delta\dot{q}^\alpha\}$ ihrer Argumente die Gleichung

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha} \delta\dot{q}^\alpha \right) = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^\alpha} Q^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha} \dot{Q}^\alpha \right),$$

wobei in der zweiten Gleichung die aus den Transformationen (III.44), (III.46) folgenden Variationen δq^α, $\delta\dot{q}^\alpha$ benutzt wurden. Die Euler–Lagrange-Gleichungen (III.11) und die Produktregel geben dann

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{s} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha} \right) Q^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha} \dot{Q}^\alpha \right] = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha} Q^\alpha \right),$$

d.h. noch

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha} Q^\alpha \right). \tag{III.48}$$

Subtrahiert man schließlich Gl. (III.47) von Gl. (III.48), so ergibt sich

$$\varepsilon \frac{\mathrm{d}\mathcal{Q}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{Q} \equiv \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha} Q^\alpha - f. \tag{III.49}$$

Da die linke Gleichung für jede infinitesimale Transformation, d.h. für ein beliebiges ε, gilt, muss die hier definierte Noether-Ladung $\mathcal{Q}$ eine Konstante der Bewegung sein. □

Beispiel 1: Räumliche Translation

Sei q^β eine zyklische Koordinate (vgl. § III.3.1 b). Dann ist die Lagrange-Funktion des Systems invariant unter Translationen $q^\beta \to q^{\beta'} = q^\beta + c$ dieser Koordinate, wobei $c = \varepsilon$ für eine infinitesimale Transformation. Für die anderen Koordinaten q^α mit $\alpha \neq \beta$ betrachten wir die Identitätstransformation $q^\alpha \to q^{\alpha'} = q^\alpha$.

Identifiziert man diese Transformationen mit Gl. (III.44), so ist der Generator in diesem Fall einfach $Q^\alpha = \delta_{\alpha\beta}$, woraus nach Ableitung $\dot{Q}^\alpha = 0$ für alle α folgt. Wegen der angenommenen Zyklizität

[38] Ein ausführlicher Beweis „für Physiker“ befindet sich in (fast) jedem Lehrbuch zur theoretischen Mechanik. Wer mathematische Genauigkeit sehen möchte, kann sie z.B. im Kap. 4 von Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics* [1] finden.

der Koordinate ist die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ invariant unter einer (infinitesimalen) Transformation, d.h. $f = 0$ in Gl. (III.47).

Laut Gl. (III.49) lautet die zugehörige Erhaltungsgröße

$$\mathcal{Q} = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta_{\alpha\beta} = p_\beta,$$

d.h. wir finden noch einmal, dass die Invarianz unter räumlichen Transformationen die Erhaltung des Impulses impliziert.

Beispiel 2: Zeitliche Translation

Als zweites Beispiel betrachten wir ein System, dessen Wirkung invariant unter den gleichzeitigen Transformationen

$$t \to t' = t + \tau \quad , \quad q^\alpha \to q^{\alpha'}(t') = q^\alpha(t')$$

ist, wobei $\tau \in \mathbb{R}$. Dank einer Taylor-Entwicklung gilt $q^{\alpha'}(t') = q^\alpha(t+\varepsilon) = q^\alpha + \varepsilon \dot{q}^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, so dass die Generatoren der (infinitesimalen) Transformationen [Gl. (III.44)] durch $Q^\alpha = \dot{q}^\alpha$ gegeben sind.

Da $t' = t + \varepsilon$ gibt eine zweite Taylor-Entwicklung

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}\big(t', \mathbf{q}'(t), \dot{\mathbf{q}}'(t)\big) - \mathcal{L}\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big) = \varepsilon \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big)}{\mathrm{d}t} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

d.h. $f = \mathcal{L}$ in Gl. (III.48). Insgesamt ist die erhaltene Noether-Ladung gegeben durch

$$\mathcal{Q} = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha - \mathcal{L} = E.$$

Somit wird das Ergebnis des § III.3.1 a wieder gefunden.