

III.2.4 Systeme mit Zwangsbedingungen

Oft können sich die individuellen Punkte eines Systems nicht uneingeschränkt unabhängig voneinander bewegen. Stattdessen müssen die Positionen oder die Geschwindigkeiten der Punkte gewissen Bedingungen genügen (§ III.2.4 a): beispielsweise müssen Abstände konstant bleiben, oder die Punkte müssen auf einer gegebenen Fläche, oder innerhalb eines gegebenen Volumens bleiben.

Diese Einschränkungen der Bewegung werden durch Zwangskräfte erzwungen, deren Form nicht immer einfach auszudrücken ist. Im Rahmen des Lagrange-Formalismus kann man die Bewegungsgleichungen formulieren, ohne die Zwangskräfte genau zu kennen, indem man geeignete verallgemeinerte Koordinaten verwendet (§ III.2.4 b).

III.2.4 a Zwangsbedingungen

A priori besitzt ein System aus N Massenpunkten $3N$ Freiheitsgrade für seine Bewegung, und zwar für jeden Massenpunkt drei (orthogonal zueinander) Bewegungsrichtungen, die sich als die insgesamt $3N$ Komponenten $x_a^i(t)$, $a \in \{1, \dots, N\}$, $i = 1, 2, 3$ der Ortsvektoren visualisieren lassen.

Sei angenommen, dass diese Massenpunkte Zwangskräften unterliegen. Diese schränken die Entwicklung des Systems ein, was sich mathematisch durch Gleichungen der Form

$$f_j(t, \vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), \dot{\vec{x}}_1(t), \dots, \dot{\vec{x}}_N(t)) = 0 \quad (\text{III.27})$$

ausdrücken lässt, wobei jede f_j eine genügend reguläre Funktion von $6N + 1$ Variablen ist. Wir werden annehmen, dass es r unabhängige solche Beziehungen gibt, d.h. $j \in \{1, \dots, r\}$.

Definition: Eine Gleichung der Form (III.27), in welcher nur die Zeit und die Positionen der Massenpunkte auftreten, heißt *holonome Zwangsbedingung* (oder *holonome Nebenbedingung*):

$$f_j(t, \vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t)) = 0, \quad (\text{III.28})$$

wobei f_j jetzt eine Funktion von $3N + 1$ Variablen ist.

Dank jeder holonomen Zwangsbedingung lässt sich eine der $3N$ räumlichen Koordinaten durch alle anderen (und die Zeit) ausdrücken, zumindest implizit. Ein System aus N Massenpunkten mit r holonomen Nebenbedingungen hat somit nur noch $s = 3N - r$ unabhängige Freiheitsgrade.

Bemerkungen:

* Einschränkungen der Bewegung können auch durch Ungleichungen ausgedrückt werden. Zum Beispiel lässt das Einsperren von Teilchen in einem gegebenen Volumen, z.B. in einem Behälter, mit Ungleichungen formulieren. Dabei handelt es sich um eine *nichtholonome Zwangsbedingung*.

* Man unterscheidet noch zwischen *skleronomen*, d.h. zeitunabhängigen, und *rheonomen*, d.h. zeitabhängigen, Zwangsbedingungen.

Beispiel 1: Gleitende Masse auf einer schiefen Ebene

Sei ein durch einen Massenpunkt modellierter Körper mit Masse m , der reibungslos auf einer Ebene unter dem Einfluss des Schwerfeldes $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ gleitet.

Wegen einer ersten Zwangsbedingung $f_1(t, \vec{x}(t)) \equiv x(t) = 0$ bleibt der Körper in der (y, z) -Ebene. Dazu bewegt er sich in der schiefen Ebene mit Neigungswinkel ϕ , so dass die kartesischen Koordinaten seiner Bahnkurve $z(t) = -y(t) \tan \phi$ erfüllen. Dementsprechend gibt es eine zweite Zwangsbedingung $f_2(t, \vec{x}(t)) \equiv z(t) - y(t) \tan \phi = 0$.

Da es $r = 2$ holonome Zwangsbedingungen gibt, bleibt nur $s = 3N - r = 1$ Freiheitsgrad übrig.

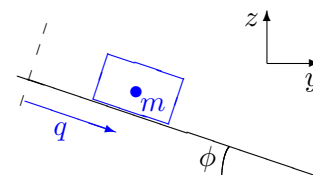


Abbildung III.1

Beispiel 2: Einfaches ebenes Pendel⁽³²⁾

Wir betrachten ein ebenes Pendel bestehend aus einer Punktmasse m am Ende eines masselosen Stabs mit fester Länge l ; das ganze System liegt im Schwerfeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Sei $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ die Trajektorie der Masse, wobei der Nullpunkt des kartesischen Koordinatensystems im Aufhängepunkt des Pendels genommen wird.

Das Pendel schwingt in der (y, z) -Ebene, d.h. $x(t) = 0$: dies lässt sich durch eine erste Zwangsbedingung $f_1(t, \vec{x}(t)) \equiv x(t) = 0$ ausdrücken.

Wiederum entspricht die Forderung einer festen Länge l einer zweiten Zwangsbedingung $f_2(t, \vec{x}(t)) \equiv y(t)^2 + z(t)^2 - l^2 = 0$.

Wie bei der gleitenden Masse bleibt somit nur ein Freiheitsgrad übrig, d.h. ein einziger Parameter soll reichen, um die Position des Pendels völlig zu charakterisieren.

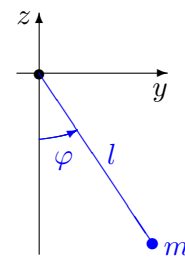


Abbildung III.2

III.2.4 b Lagrange-Formalismus für Systeme mit Zwangsbedingungen

Einer der Vorteile des Lagrange-Formalismus besteht darin, dass man Kräfte und insbesondere Zwangskräfte nicht explizit ausdrücken soll, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten. Zu diesem Zweck kann man einem relativ einfachen Rezept folgen⁽³³⁾

- Als erster Schritt muss man $s = 3N - r$ verallgemeinerte Koordinaten $\{q_1, \dots, q_s\} \equiv \mathbf{q}$ einführen. Diese sollen so gewählt werden, dass sie die Konfigurationen des Systems parametrisieren, welche die Zwangsbedingungen erfüllen. Dementsprechend sollen die $\{q^\alpha\}$ durch die Nebenbedingungen uneingeschränkt sein.
- Danach soll man die Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = T - V$, die man als Funktion von den kartesischen Ortskoordinaten kennt, durch die verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} und Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ ausdrücken. Dafür müssen die kartesischen Koordinaten als Funktionen der \mathbf{q} geschrieben werden.
In diesem Falle enthält das Potential V eigentlich nur die Beiträge, die nicht Zwangskräfte verursachen.
- Schließlich kann man die Euler-Lagrange-Gleichungen aufstellen und lösen — möglicherweise numerisch.

Beispiel 1: Gleitende Masse auf einer schiefen Ebene

Für den gleitenden Körper der Abb. III.1 ist die Bewegung eingeschränkt in die Richtung senkrecht zur schiefen Ebene und in die x -Richtung; entlang der Neigung der Ebene bleibt die Bewegung noch frei. Daher stellt die dargestellte Entfernung (aus einem beliebigen Referenzpunkt in der Ebene, der als Nullpunkt des kartesischen Koordinatensystems dient) q eine geeignete generalisierte Koordinate dar. Dann gelten

$$x(t) = 0, \quad y(t) = q(t) \cos \phi, \quad z(t) = -q(t) \sin \phi.$$

Die Zeitableitungen sind einfach und führen sofort zur kinetischen Energie

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} \dot{q}^2.$$

Wiederum lautet das Potential im Schwerfeld

$$V = mgz = -mgq \sin \phi.$$

⁽³²⁾Dieses System wird auch wegen der vielen Vereinfachungen (Annahmen einer punktförmigen Masse, eines masselosen Stabs) als „mathematisches Pendel“ bezeichnet.

⁽³³⁾Die „Begründung“ des Rezepts wird später hinzugefügt.

Dies gibt die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + mgq \sin \phi$$

mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = mg \sin \phi \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q},$$

so dass die Euler–Lagrange-Gleichung (III.11) zur Bewegungsgleichung

$$\ddot{q}(t) = g \sin \phi$$

führt, d.h. zur Gleichung einer gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegung.

Beispiel 2: Einfaches ebenes Pendel

Wir betrachten wieder das in Abb. III.2 dargestellte ebene Pendel. Die zwei Zwangsbedingungen schränken die (kartesische) z -Komponente und den Abstand vom Aufhängepunkt ein. Dagegen ist der Ablenkwinkel φ noch uneingeschränkt, und jede Konfiguration des System, welche die Nebenbedingungen erfüllt, kann mit diesem Winkel φ allein charakterisiert werden. Somit ist $q = \varphi$ eine gute Wahl für die (hier ist $s = 1$) verallgemeinerte Koordinate.

Dann lassen sich die kartesischen Koordinaten der Position $(x(t), y(t), z(t))$ einfach durch $\varphi(t)$ ausdrücken:

$$x(t) = 0, \quad y(t) = l \sin \varphi(t), \quad z(t) = -l \cos \varphi(t),$$

woraus dank der Kettenregel

$$\dot{x}(t) = 0, \quad \dot{y}(t) = l\dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t), \quad \dot{z}(t) = l\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t)$$

folgt. Ersetzt man diese kartesischen Koordinaten in den Ausdrücken der kinetischen Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2$$

und des Potentials

$$V = mgz = -mgl \cos \varphi,$$

so ergibt sich für die Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}(t, \varphi, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi. \quad (\text{III.29})$$

Die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion lauten dann

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}.$$

Diese Ableitungen sollen nun im Punkt $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ ausgewertet werden. Die zweite führt zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \ddot{\varphi}(t),$$

so dass die Euler–Lagrange-Gleichung (III.11) zur Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t) \quad (\text{III.30})$$

führt.

Der Vollständigkeit halber wird noch die Lösung der Gl. (III.30) dargelegt.

Für Schwingungen kleiner Amplitude, d.h. für $|\varphi(t)| \ll 1$, liefert eine Taylor-Entwicklung zur ersten Ordnung die Näherung $\sin \varphi(t) \sim \varphi(t)$, d.h. die Differentialgleichung (III.30) vereinfacht sich zur Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi(t) \quad \text{mit } \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}$$

eines harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz ω bzw. Periodendauer $\mathcal{T} = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$, deren allgemeine Lösung der Form

$$\varphi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ ist. Dabei sollen $|A|$ und $|B|$ viel kleiner als 1 sein, damit die Amplitude der Bewegung „klein“ bleibt.

Für Schwingungen beliebiger Amplitude lässt sich kein einfacher Ausdruck für die Funktion $\varphi(t)$ finden. Offensichtlich ist die Bewegung noch periodisch: sei \mathcal{T} die Periodendauer. Multipliziert man Gl. (III.30) mit $\dot{\varphi}(t)$ und integriert man über die Zeit, so kommt

$$\int_{t_0}^t \ddot{\varphi}(t') \dot{\varphi}(t') dt' = \frac{1}{2} [\dot{\varphi}(t)^2 - \dot{\varphi}(t_0)^2] = -\frac{g}{l} \int_{t_0}^t \sin \varphi(t') \dot{\varphi}(t') dt' = \frac{g}{l} [\cos \varphi(t) - \cos \varphi(t_0)],$$

wobei t_0 einen gegebenen Referenzzeitpunkt bezeichnet. Mit Anfangsbedingungen $\varphi(t_0) \equiv \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ stellt $|\varphi_0|$ die maximale Auslenkung des Pendels dar, d.h. für jede Zeit $t \geq t_0$ gilt $\varphi(t) \leq |\varphi_0|$ bzw. $\cos \varphi(t) \geq \cos \varphi_0$. Dann liefert die Separation der Variablen

$$dt = \pm \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}.$$

Wählt man z.B. $\varphi_0 > 0$, so nimmt $\varphi(t)$ während der ersten Halbperiode ab, und man soll die Gleichung mit dem $-$ Vorzeichen betrachten. Für $t = t_0 + \mathcal{T}/4$ erreicht das Pendel zum ersten Mal die Position $\varphi = 0$; nach Integration zwischen t_0 und $t \leq t_0 + \mathcal{T}/4$ ergibt sich

$$t - t_0 = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\varphi(t)}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (\text{III.31})$$

Dabei kann der Term auf der rechten Seite auch als

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\varphi(t)}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} - \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}$$

geschrieben werden: dann gilt (34)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} &= \sqrt{\frac{l}{g}} F \left(\arcsin \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi(t)}{1 - \cos \varphi_0}}, \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi_0}{2}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} F \left(\arcsin \frac{\sin(\varphi(t)/2)}{\sin(\varphi_0/2)}, \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

wobei das *unvollständige elliptische Integral erster Art* F durch

$$F(\vartheta, k) \equiv \int_0^{\vartheta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\sin \vartheta} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

definiert ist. (35) Der Position $\varphi(t = t_0 + \mathcal{T}/4) = 0$ entspricht das Argument $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d.h. die Periode einer Schwingung wird durch

$$\frac{\mathcal{T}}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} F \left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sqrt{\frac{l}{g}} K \left(\sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (\text{III.34})$$

(34) Dies folgt aus Gl. 2.571-4 in Ref. [20].

(35) Die Funktionen F und K werden im Kap. 19 vom *NIST Handbook of Mathematical Functions* [21] diskutiert, dessen online Version unten <http://dlmf.nist.gov/> verfügbar ist.

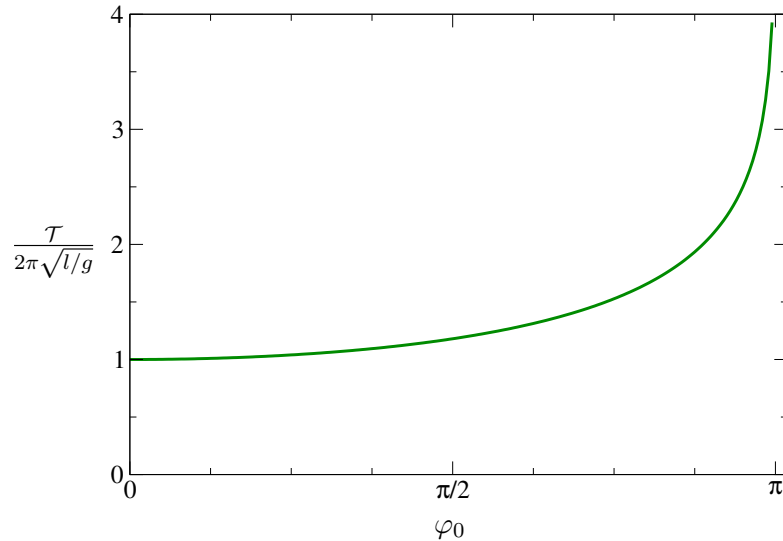


Abbildung III.3 – Periode (III.34) des einfachen Pendels, geteilt durch den Wert für kleine Schwingungen, in Abhängigkeit der maximalen Amplitude φ_0 .

gegeben, wobei $K(k) \equiv F(\frac{\pi}{2}, k)$ das *elliptische Integral erster Art* ist.⁽³⁵⁾ Für kleinen „elliptischen Modul“ $k \ll 1$ gilt $K(k) \sim \frac{\pi}{2}(1 + k^2/4)$, d.h. man findet $\mathcal{T} \sim 2\pi\sqrt{l/g}$ für Schwingungen mit kleiner Amplitude. Dagegen geht $K(k)$ im Limes $k \rightarrow 1^-$ gegen $+\infty$. Dementsprechend braucht das Pendel, ausgehend von der Anfangsposition $\varphi_0 \rightarrow \pi^-$, eine unendliche lange Zeit, um $\varphi = 0$ zu erreichen: die Position $\varphi_0 = \pi$ ist eine (instabile) Gleichgewichtsposition.

Aus Gl. (III.31), (III.32) und (III.34) folgt (für $t - t_0 \leq \mathcal{T}/4$)

$$t - t_0 = \frac{\mathcal{T}}{4} - \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\arcsin \frac{\sin(\varphi(t)/2)}{\sin(\varphi_0/2)}, \sin \frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Diese Beziehung kann invertiert werden mithilfe der durch $\operatorname{am}(F(\vartheta, k), k) \equiv \vartheta$ definierten *Jacobi-schen Amplitude*^(r) die somit eine Umkehrfunktion des unvollständigen elliptischen Integrals erster Art ist.⁽³⁶⁾

$$\arcsin \frac{\sin(\varphi(t)/2)}{\sin(\varphi_0/2)} = \operatorname{am}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{\mathcal{T}}{4} - t + t_0\right), \sin \frac{\varphi_0}{2}\right),$$

und daher

$$\sin \frac{\varphi(t)}{2} = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \sin\left[\operatorname{am}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{\mathcal{T}}{4} - t + t_0\right), \sin \frac{\varphi_0}{2}\right)\right].$$

Dabei definiert der Sinus der Jacobi-Amplitude den *sinus amplitudinis* $\operatorname{sn}(z, k) \equiv \sin \operatorname{am}(z, k)$ für $z \in \mathbb{C}$.⁽³⁶⁾ Somit kann die Position $\varphi(t)$ des Pendels für die Anfangsbedingungen $\varphi(t_0) \equiv \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ durch den letzteren ausgedrückt werden:

$$\varphi(t) = 2 \arcsin\left[\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{\mathcal{T}}{4} - t + t_0\right)\right)\right] \quad \text{für } 0 \leq t - t_0 \leq \frac{\mathcal{T}}{4}. \quad (\text{III.35})$$

Der Verlauf von $\varphi(t)$ für verschiedene Werte der Amplitude φ_0 der Schwingung wird gezeigt in Abb. III.4. Für den Vergleich wird $\varphi(t)$ durch φ_0 geteilt, während die Zeitvariable t durch die Periode (III.34) normiert wird — für $\varphi_0 = 1, 99\pi/2$ ist \mathcal{T} etwa 4 mal größer als für kleine Schwingungen. Für die Letzteren mit $\varphi_0 \ll 1$ findet man das harmonische Verhalten wieder. Dagegen bleibt im Limes $\varphi_0 \rightarrow \pi$ der Winkel $\varphi(t)$ viel länger in der Nähe von φ_0 , bevor es schnell durch 0 geht, um wieder länger in der Nähe von $-\varphi_0$ zu bleiben.

⁽³⁶⁾Die Jacobischen elliptischen Funktionen, insbesondere am und sn , werden im Kap. 22 vom *NIST Handbook of Mathematical Functions* vorgestellt [21].

^(r)C. G. JACOBI, 1804–1851

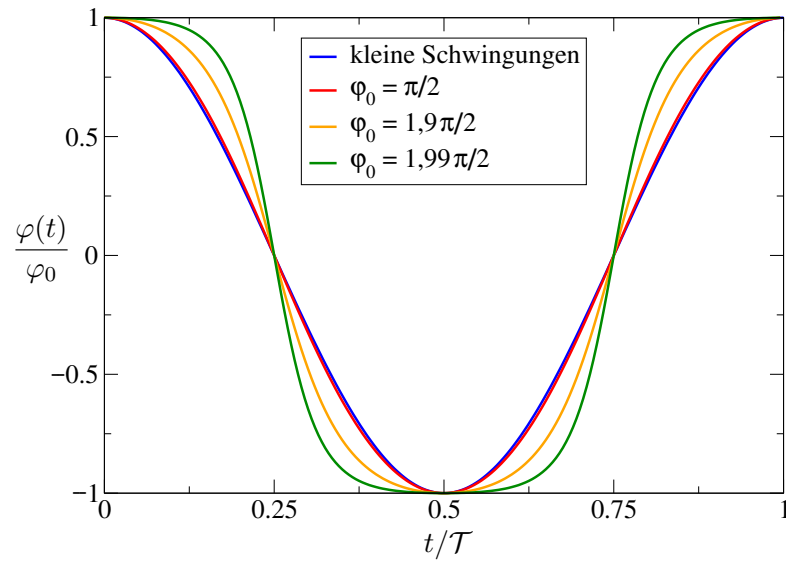


Abbildung III.4 – Zeitabhängigkeit (III.35) des Winkels des einfachen Pendels, geteilt durch die maximale Amplitude φ_0 . Die Zeitvariable wird durch die Periode (III.34) der Schwingung normiert.