

## III.2 Hamilton-Prinzip

In diesem Abschnitt wird eine Methode zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für ein (mechanisches) System beschrieben, die sich auch für Systeme eignet, in denen sich die genaue Form der Kräfte nicht einfach präzisieren lässt. Dabei wird eine Funktion der relevanten Freiheitsgrade des Systems „postuliert“, die Lagrange-Funktion, welche die ganze Information über die Dynamik des Systems enthält (§ III.2.1); die gesuchten Bewegungsgleichungen lassen sich dann durch Ableitungen der Lagrange-Funktion ausdrücken (§ III.2.2). Diese Konstruktion wird in § III.2.3 anhand ein paar erster einfacher Beispiele illustriert; insbesondere wird eine allgemeine Form der Lagrange-Funktion für Systeme mit konservativen Kräften gefunden. Der Formalismus wird dann auf den Fall von Systemen mit Zwangsbedingungen erweitert (§ III.2.4).

### III.2.1 Definitionen

#### III.2.1 a Verallgemeinerte Koordinaten

Sei ein System  $\Sigma$  aus  $N$  Massenpunkten. Die  $N$  Ortsvektoren  $\vec{x}_a(t)$  mit  $a \in \{1, \dots, N\}$  sind äquivalent zu  $3N$  Koordinaten. Wenn die Massenpunkte sich unabhängig voneinander bewegen können, dann besitzt das System genau  $s = 3N$  Freiheitsgrade.

In der Praxis untersucht man oft aber Probleme, in denen es (feste) Zusammenhänge zwischen den  $3N$  Koordinaten gibt: z.B. ist der Abstand zwischen zwei Massenpunkten festgelegt, oder die

Massenpunkte müssen auf irgendeiner Fläche bleiben. In solchen Fällen sind die  $3N$  Koordinaten der Positionen nicht unabhängig von einander, d.h. die Anzahl  $s$  der Freiheitsgrade des Systems ist kleiner als  $3N$ . Es ist daher in solchen Situationen sinnvoll, den Zustand des Systems mit nur  $s$  skalaren Größen zu charakterisieren, anstatt mit  $3N$ .

Somit führt man zur Charakterisierung eines mechanischen Systems  $s$  *verallgemeinerte* bzw. *generalisierte Koordinaten*  $q^1(t), q^2(t), \dots, q^s(t)$  ein, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

- i. Sie legen den Zustand des Systems eindeutig fest, d.h. jede Position  $\vec{x}_a(t)$  mit  $a \in \{1, \dots, N\}$  lässt sich als eine bestimmte Funktion — die auch mit  $\vec{x}_a$  bezeichnet wird — der Zeit und der  $s$  verallgemeinerten Koordinaten schreiben:

$$\vec{x}_a(t) = \vec{x}_a(t, q^1(t), \dots, q^s(t)) \quad \forall a \in \{1, \dots, N\}. \quad (\text{III.6})$$

- ii. Sie sind alle unabhängig voneinander, d.h. es existiert keine Funktion  $f$  von  $s+1$  Argumenten, für die  $f(t, q^1(t), \dots, q^s(t)) = 0$  für jede Zeit  $t$  gilt.

Die newtonschen Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung, so dass man neben den Positionen  $\vec{x}_a(t)$  noch die  $N$  Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{x}}_a(t)$  betrachten muss, um die Zeitentwicklung für  $t' > t$  zu bestimmen. Laut Gl. (III.6) sind diese Geschwindigkeiten Funktion von der Zeit  $t$ , den verallgemeinerten Koordinaten  $q^\alpha(t)$  für  $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ , und von deren Zeitableitungen. Dementsprechend muss man auch die  $s$  *verallgemeinerten Geschwindigkeiten*  $\{\dot{q}^\alpha(t)\}$  in Betracht ziehen.

Genau wie die Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{x}}_a(t)$  im Allgemeinen unabhängig von den Positionen  $\vec{x}_a(t)$  sind, gilt dies auch für die verallgemeinerten Geschwindigkeiten und Koordinaten.

Der Kürze halber werden die  $s$  generalisierten Koordinaten  $q^\alpha(t)$  bzw. Geschwindigkeiten  $\dot{q}^\alpha(t)$  kollektiv als ein  $s$ -dimensionaler Vektor  $\mathbf{q}(t)$  bzw.  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  bezeichnet.

Im allgemeinen Fall wird jedoch  $\mathbf{q}(t)$  kein Element eines physikalisch bedeutenden Vektorraums sein. Beispielsweise ist die Menge der möglichen Kugelkoordinaten  $(r, \theta, z)$  nicht  $\mathbb{R}^3$ , denn  $r$  ist immer nicht-negativ,  $r \geq 0$ . Die „Vektoren“  $\mathbf{q}(t)$  sind eher Punkte einer *Mannigfaltigkeit*<sup>(30)</sup> der Dimension  $s$ , die *Konfigurationsraum* genannt wird.

### Bemerkungen:

\* Während die Anzahl  $s$  der Freiheitsgrade für ein bestimmtes Problem eindeutig festgelegt ist, gilt das im Allgemeinen nicht für die verallgemeinerten Koordinaten  $q^\alpha(t)$ . Dies entspricht z.B. der Freiheit bei der Wahl von Koordinaten.

\* Wie es schon der Fall bei „üblichen“ Koordinaten ist, z.B. bei Kugelkoordinaten, haben verallgemeinerte Koordinaten nicht unbedingt die Dimension einer Länge.

### III.2.1 b Lagrange-Funktion. Wirkung

Jedem System aus  $s$  Freiheitsgraden kann eine reelle Funktion von  $2s + 1$  reellen Variablen zugeordnet werden, die *Lagrange-Funktion*  $\mathcal{L}$ , welche die Bewegung des Systems völlig bestimmt, und die physikalische Dimension einer Energie hat,  $[\mathcal{L}] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$ . Dabei nimmt die Funktion als Argumente die Zeit  $t$ , die  $s$  verallgemeinerten Koordinaten  $\{q^\alpha\}$  und die  $s$  verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\{\dot{q}^\alpha\}$ :

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (\text{III.7})$$

**Bemerkung:** Die Form der Lagrange-Funktion wird später angegeben, nachdem ihre Rolle in der Bestimmung der Bewegungsgleichungen eines Systems genauer präzisiert worden ist (vgl. § III.2.3).

<sup>(30)</sup>Eine (reelle) Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  ist ein Raum, der lokal dem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  ähnelt.

Es sei aber schon hier erwähnt, dass diese Form nicht eindeutig festgelegt ist, auch wenn die verallgemeinerten Koordinaten gewählt wurden. Dementsprechend hat die Lagrange-Funktion keine physikalische Bedeutung: sie stellt nur ein Hilfsmittel dar, um die Bewegungsgleichungen herzuleiten (§ III.2.2) oder um Konstanten der Bewegung zu finden (Abschn III.3).

Seien jetzt zwei Zeitpunkte  $t_1 < t_2$ . In der Zeitentwicklung des Systems sind seine verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten Funktionen der Zeit:  $\{q^\alpha(t)\}$ ,  $\{\dot{q}^\alpha(t)\}$ . Werden diese in die Lagrange-Funktion (III.7) eingesetzt, so kann sie als eine Funktion der Variablen  $t$  allein betrachtet werden:

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)). \quad (\text{III.8})$$

Das Integral dieser Funktion über das Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  definiert die *Wirkung*, die auch *Wirkungsintegral* genannt wird:

$$S[\mathbf{q}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt. \quad (\text{III.9})$$

In der Schreibweise wurde schon berücksichtigt, dass die Wirkung von den verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten  $\{q^\alpha(t)\}$ ,  $\{\dot{q}^\alpha(t)\}$  abhängt, so dass es sich um ein Funktional handelt — weshalb  $S[\mathbf{q}]$  auch als *Wirkungsfunktional* bezeichnet wird.

Die Wirkung hat die Dimension des Produkts von Energie und Zeit,  $[S] = \text{M L}^2 \text{T}^{-1}$ ; die zugehörige Einheit im SI-System ist das  $\text{J} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

### III.2.2 Hamilton-Prinzip. Euler–Lagrange-Gleichungen

Es seien  $t_1 < t_2$ . Bei dem *Hamilton-Prinzip* handelt es sich um ein *Extremalprinzip*, laut dem die Zeitentwicklung eines Systems im Intervall  $[t_1, t_2]$  so erfolgt, dass die physikalisch realisierten verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q}(t)$  und Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  das Wirkungsfunktional (III.9) extremal (oder „stationär“) machen. Dies wird oft kurz als

$$\text{Hamilton-Prinzip: } \delta S[\mathbf{q}] = 0 \quad (\text{III.10})$$

ausgedrückt.

Gemäß der Verallgemeinerung des in § III.1.2 a) angegebenen Theorems genügt dann das Integrand des Wirkungsintegrals, d.h. die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}$ , den Euler-Gleichungen (III.4b), die in diesem Kontext als *Euler–Lagrange-Gleichungen* bezeichnet werden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, s\}. \quad (\text{III.11})$$

Diese  $s$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die  $s$  verallgemeinerten Koordinaten stellen die Bewegungsgleichungen des Systems dar.

#### Bemerkungen:

\* Das Hamilton-Prinzip wird auch *Wirkungsprinzip*, *Prinzip der stationären Wirkung* oder, fehlerhaft, *Prinzip der kleinsten Wirkung* genannt.

Wiederum werden die Euler–Lagrange-Gleichungen (III.11) noch *Lagrange-Gleichungen zweiter Art* genannt.

\* Die Lagrange-Funktion für ein gegebenes System ist nicht eindeutig: wenn  $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  eine mögliche Lagrange-Funktion bezeichnet, dann ist

$$\mathcal{L}'(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \equiv \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \frac{d}{dt} \mathcal{M}(t, \mathbf{q}(t)) \quad (\text{III.12})$$

eine äquivalente Lagrange-Funktion, die zu denselben Euler–Lagrange-Gleichungen führt, wobei  $\mathcal{M}$  eine beliebige stetig differenzierbare Funktion der Zeit und der generalisierten Koordinaten ist.

Beweis: Das mit  $\mathcal{L}'$  berechnete Wirkungsintegral lautet

$$S'[\mathbf{q}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt = S[\mathbf{q}] + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{M}(t, \mathbf{q}(t))}{dt} dt = S[\mathbf{q}] + \mathcal{M}(t_2, \mathbf{q}(t_2)) - \mathcal{M}(t_1, \mathbf{q}(t_1)).$$

Unter Variationen  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + \delta\mathbf{q}$ , mit  $\delta\mathbf{q}(t_1) = \delta\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{0}$  bleiben die zwei letzten Terme unverändert, d.h. sie haben keinen Einfluss auf die Position des Extremums bzw. auf die Euler–Lagrange-Gleichungen.  $\square$

Alternativ kann man die totale Ableitung nach der Zeit  $d\mathcal{M}(t, \mathbf{q}(t))/dt$  durch die partiellen Ableitungen (nach  $t$  und nach den  $q^\alpha$ ) ausdrücken. Dann findet man, dass der zusätzliche Term in der Lagrange-Funktion Beiträge zu den beiden Seiten der Euler–Lagrange-Gleichungen liefert, die sich gegenseitig kompensieren.

Die Invarianz der Bewegungsgleichungen unter Transformationen (III.12) wird manchmal als *Eichinvarianz* bezeichnet, und eine derartige Transformation als *Eichtransformation*.

\* Die Euler–Lagrange-Gleichungen (III.11) sind *Form-invariant* oder *kovariant* unter den gleichzeitigen Transformationen

$$q^\alpha \rightarrow q^{\alpha'} = q^{\alpha'}(t, \mathbf{q}) \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, s, \quad (\text{III.13a})$$

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \rightarrow \mathcal{L}'(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}') \equiv \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t, \mathbf{q}'), \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}')), \quad (\text{III.13b})$$

wobei die Transformation ein *Diffeomorphismus* ist, d.h. eine beliebig oft differenzierbare ( $\mathcal{C}^\infty$ ) bijektive Abbildung, deren Umkehrfunktion

$$q^\alpha = q^\alpha(t, \mathbf{q}') \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, s \quad (\text{III.14})$$

auch  $\mathcal{C}^\infty$  ist. Die Transformation (III.13a) stellt ein Koordinatenwechsel dar.

Beweis: Unter Verwendung der Kettenregel lautet die verallgemeinerte Geschwindigkeit  $\dot{q}^{\alpha'}$

$$\dot{q}^{\alpha'}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{d}{dt} q^{\alpha'}(t, \mathbf{q}) = \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial t} + \sum_{\beta} \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^{\beta}} \frac{dq^{\beta}}{dt} = \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial t} + \sum_{\beta} \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^{\beta}} \dot{q}^{\beta}. \quad (\text{III.15a})$$

Somit ist jede  $\dot{q}^{\alpha'}$  eine lineare Funktion der verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$ , obwohl die Koordinate  $q^{\alpha'}$  unabhängig davon ist. Ähnlich folgt aus Gl. (III.14) und der Kettenregel

$$\dot{q}^{\alpha}(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}') = \frac{d}{dt} q^{\alpha}(t, \mathbf{q}') = \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial t} + \sum_{\beta'} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{\beta'}} \frac{dq^{\beta'}}{dt} = \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial t} + \sum_{\beta'} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{\beta'}} \dot{q}^{\beta'}. \quad (\text{III.15b})$$

Seien  $\alpha, \beta \in \{1, \dots, s\}$ . Auf Gl. (III.15a) bzw. (III.15b) liest man die partielle Ableitung von  $\dot{q}^{\alpha'}$  nach  $\dot{q}^{\beta}$  bzw. von  $\dot{q}^{\alpha}$  nach  $\dot{q}^{\beta'}$ , und zwar

$$\frac{\partial \dot{q}^{\alpha'}}{\partial \dot{q}^{\beta}} = \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^{\beta}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \dot{q}^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta'}} = \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{\beta'}}. \quad (\text{III.16})$$

Sei  $\mathcal{L}'(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}') \equiv \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t, \mathbf{q}'), \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}'))$ . Dank der Kettenregel lautet die partielle Ableitung dieser Funktion nach  $\dot{q}^{\beta'}$  mit  $\beta \in \{1, \dots, s\}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}')}{\partial \dot{q}^{\beta'}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\beta'}} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t, \mathbf{q}'), \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}')) = \sum_{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \frac{\partial \dot{q}^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta'}},$$

denn die  $\{q^{\alpha}\}$  sind unabhängig von  $\dot{q}^{\beta'}$ . Die totale Zeitableitung dieser partiellen Ableitung folgt dann aus der Produktregel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}')}{\partial \dot{q}^{\beta'}} = \sum_{\beta} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \frac{\partial \dot{q}^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta'}} \right) = \sum_{\beta} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right) \frac{\partial \dot{q}^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta'}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta'}} \right) \right].$$

Der erste Term in den eckigen Klammern lässt sich mit den Euler–Lagrange-Gleichungen für  $\mathcal{L}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}$$

umschreiben. Dank Gl. (III.16) kann  $\partial \dot{q}^\alpha / \partial \dot{q}^{\beta'}$  durch  $\partial q^\alpha / \partial q^{\beta'}$  ersetzt werden. Das Austausch der Ableitungen nach  $t$  und  $q^{\beta'}$  gibt dann

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\beta'}} \right) = \frac{\partial}{\partial q^{\beta'}} \frac{dq^\alpha}{dt} = \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial q^{\beta'}}.$$

Insgesamt gilt somit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}')}{\partial \dot{q}^{\beta'}} = \sum_{\beta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\beta'}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial q^{\beta'}} \right) = \frac{\partial}{\partial q^{\beta'}} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t, \mathbf{q}'), \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}')) = \frac{\partial \mathcal{L}'(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}')}{\partial q^{\beta'}}$$

wobei die zweite Gleichheit aus der Kettenregel folgt.  $\square$

Diese Form-Invarianz ist wichtig, denn sie bedeutet, dass die Euler–Lagrange-Gleichungen die gleiche Form annehmen, wenn man die verallgemeinerten Koordinaten (diffeomorph) transformiert. Somit ist die Wahl der Koordinaten „beliebig“.

**Definition:** Der *verallgemeinerte Impuls* oder (zu  $q^\alpha$ ) *kanonisch konjugierte Impuls* wird als

$$p_\alpha(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (\text{III.17})$$

definiert.

Falls die Lagrange-Funktion nicht explizit von einer verallgemeinerten Koordinaten  $q^\alpha$  abhängt, dann folgt sofort aus der entsprechenden Euler–Lagrange-Gleichung, dass der zugehörige generalisierte Impuls  $p_\alpha$  eine Erhaltungsgröße ist (vgl. auch § III.3.1 b).

### III.2.3 Erste Beispiele

#### III.2.3 a Freier Massenpunkt

Als mögliche Lagrange-Funktion für einen freien Massenpunkt mit Masse  $m$  und Position  $\vec{x}(t)$  kann man folgende Funktion annehmen:

$$\mathcal{L}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2. \quad (\text{III.18})$$

Dabei sind die generalisierten Koordinaten  $q^\alpha$  die kartesischen Koordinaten  $x^i$  mit  $\alpha = i = 1, \dots, 3$ , so dass die zugehörigen verallgemeinerten Geschwindigkeiten einfach  $\dot{q}^\alpha = \dot{x}^i$  sind.

Wegen der Gleichheit

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})}{\partial \dot{x}^i} = m \dot{x}^i$$

ist der mit  $x^i$  assoziierte verallgemeinerte Impuls einfach die  $i$ -te Komponente des kinetischen Impulses  $\vec{p} = m \dot{\vec{x}}$ . Wiederum gilt  $\partial \mathcal{L} / \partial x^i = 0$ . Dann drücken die assoziierten Euler–Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t))}{\partial \dot{x}^i} = m \ddot{x}^i(t) = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t))}{\partial x^i}$$

die Erhaltung des kinetischen Impulses in der Bewegung aus, d.h. man findet das erste newtonsche Gesetz (I.13) wieder.

#### III.2.3 b System aus Massenpunkten mit konservativen Kräften

Für ein System aus  $N$  Massenpunkten, die miteinander über konservative Kräfte wechselwirken, kann man als generalisierte Koordinaten wieder die kartesischen Koordinaten der Ortsvektoren

betrachten, d.h.  $q^\alpha = x_a^j$ , wobei  $x_a^i$  die  $i$ -te Koordinate der Position des Massenpunkts  $a$  bezeichnet. Dann lautet eine mögliche Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(t, \{\vec{x}_a\}, \{\dot{\vec{x}}_a\}) = \sum_{a=1}^N \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 - V(\{\vec{x}_a\}) = T - V \quad (\text{III.19})$$

mit der kinetischen Energie  $T$  und dem Potential  $V$ .

Schreibt man nämlich die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_a^i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_a^i} \right) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, 3\} \text{ und } a \in \{1, \dots, N\},$$

so gilt einerseits, genau wie im obigen Fall des freien Massenpunkts,  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}_a^i = m \dot{x}_a^i$ . Daraus ergibt sich sofort

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(t, \{\vec{x}_a(t)\}, \{\dot{\vec{x}}_a(t)\})}{\partial \dot{x}_a^i} = m \ddot{x}_a^i(t).$$

Andererseits beträgt die Ableitung nach  $x_a^i$  auf der linken Seite der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_a^i} = - \frac{\partial V}{\partial x_a^i} = F_a^i,$$

wobei  $F_a^i$  die  $i$ -te Komponente der Kraft auf den  $a$ -ten Massenpunkt bezeichnet. Insgesamt findet man somit

$$m \ddot{x}_a^i(t) = F_a^i(t), \quad \text{für } i \in \{1, \dots, 3\} \text{ und } a \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{III.20})$$

d.h. genau die  $i$ -te Komponente der aus dem zweiten newtonschen Gesetz bekannten Bewegungsgleichung für den  $a$ -ten Massenpunkt.

### III.2.3 c System aus Massenpunkten mit nicht-konservativen Kräften

Falls die Massenpunkte eines System miteinander über nicht-konservative Kräfte wechselwirken, kann man generell keine allgemein geltende zugehörige Lagrange-Funktion schreiben. In zwei Fällen sind jedoch Erweiterungen der Lagrange-Funktion (III.19) möglich, und zwar einerseits für Kräfte, die aus einem verallgemeinerten, Zeit- und Geschwindigkeitsabhängigen Potential abgeleitet werden können, andererseits für Reibungskräfte proportional zur Geschwindigkeit.

#### Kräfte aus einem generalisierten Potential

Betrachten wir eine nicht-konservative Kraft  $\vec{F}_{\text{n.-k.}}$  auf einen Massenpunkt derart, dass ihre kartesischen Komponenten in der Form

$$F_{\text{n.-k.}}^i(t) = - \frac{\partial U(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t))}{\partial x^i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t))}{\partial \dot{x}^i} \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.21a})$$

geschrieben werden können, wobei  $x^i(t)$  bzw.  $\dot{x}^i(t)$  die  $i$ -te Komponente der Position bzw. der Geschwindigkeit des Massenpunkts bezeichnet. Dabei ist  $U$  ein *verallgemeinertes Potential*, das nicht nur von den Positionen, sondern auch von den Geschwindigkeiten abhängt.

Vektoriell kann man schreiben

$$\vec{F}_{\text{n.-k.}}(t) = - \vec{\nabla}_{\vec{r}} U(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) + \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} U(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)), \quad (\text{III.21b})$$

wobei  $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$  bzw.  $\vec{\nabla}_{\vec{v}}$  den Gradienten bezüglich der Orts- bzw. Geschwindigkeitskoordinaten bezeichnet.

Sei zudem  $V$  das Potential, aus dem die konservativen Kräfte  $\vec{F}$  auf den Massenpunkt folgen.

Dann stellt

$$\mathcal{L}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = T - V - U = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) - U(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) \quad (\text{III.22})$$

eine geeignete Lagrange-Funktion für den Massenpunkt dar. Die daraus folgenden Euler–Lagrange-Gleichungen nehmen nämlich die Form:

$$m\ddot{x}^i(t) = F^i(t) + F_{\text{n.-k.}}^i(t) \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

an.

**Beispiel:** Sei  $\Phi$  bzw.  $\vec{A}$  eine reelle bzw. vektorielle Funktion von Zeit und Ort. Man kann eine Lagrange-Funktion für einen Massenpunkt mit Position  $\vec{x}$  und Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}$  durch

$$U(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = q\Phi(t, \vec{x}) - q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) \quad (\text{III.23a})$$

definieren, mit einer für den Massenpunkt charakteristischen Zahl  $q$ . Über die Beziehung (III.21b) führt dieses verallgemeinerte Potential zur Kraft

$$\vec{F}_{\text{n.-k.}}(t) = q \left( -\vec{\nabla}\Phi(t, \vec{x}(t)) - \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x}(t))}{\partial t} + \dot{\vec{x}}(t) \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}(t))] \right). \quad (\text{III.23b})$$

Definiert man  $\vec{E} \equiv -\vec{\nabla}\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$  und  $\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , dann ist dies genau die Lorentz-Kraft, die eine Punktladung  $q$  in einem elektromagnetischen Feld  $(\vec{E}, \vec{B})$  erfährt. <sup>(31)</sup>

**Bemerkung:** Wie in § I.1.3b schon bemerkt wurde leistet der „magnetische Anteil“  $q\dot{\vec{x}}(t) \times \vec{B}$  der Lorentz-Kraft keine Arbeit. Diese Aussage entspricht genau der Tatsache, dass die Lorentz-Kraft sich aus einem verallgemeinerten Potential über Gl. (III.21a) ableiten lässt.

### Reibungskräfte

Im Gegensatz zu konservativen Kräften oder zur Lorentz-Kraft hängt die Arbeit von Reibungskräften zwischen zwei Punkten von der genauen Trajektorie ab. Dementsprechend kann man kein generalisiertes Potential finden, mit dessen Hilfe Reibungskräfte über Gl. (III.21a) abgeleitet werden können.

Für die Stokessche Reibungskraft (vgl. Beispiel in § I.2.2), die proportional zur Geschwindigkeit ist, kann man eine Funktion einführen, deren Ableitung die Kraft ist. Im Fall der Kraft auf einen Massenpunkt mit Position bzw. Geschwindigkeit  $\vec{x}$  bzw.  $\dot{\vec{x}}$  definiert man die *Rayleigh* <sup>(q)</sup>-*Dissipationsfunktion*

$$\mathcal{D}(\dot{\vec{x}}) \equiv \sum_{i=1}^3 \gamma_i (\dot{x}^i)^2 \quad (\text{III.24})$$

mit positiven Koeffizienten  $\gamma_i$ . Nach Ableitung nach der Komponente  $\dot{x}^i$  der Geschwindigkeit folgt

$$-\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}^i} = -\gamma_i \dot{x}^i, \quad (\text{III.25})$$

hier ohne Summe über den doppelt auftretenden Index  $i$ , d.h. eine Stokessche Reibungskraft mit unterschiedlichen Reibungskoeffizienten in den drei Richtungen.

Führt man dann generalisierte Koordinaten  $\mathbf{q}(t)$  ein, so lässt sich die Dissipationsfunktion durch diese über  $\mathcal{D}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{D}(\{\dot{\vec{x}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\})$  ausdrücken. Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten werden dann „modifizierte Lagrange-Gleichungen“ postuliert:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) + \frac{\partial \mathcal{D}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))}{\partial \dot{q}^\alpha}, \quad (\text{III.26})$$

die das richtige Ergebnis liefern. Es muss aber betont werden, dass sich die Gleichungen (III.26) im Gegensatz zu den üblichen Euler–Lagrange-Gleichungen nicht aus einem Extremalprinzip herleiten lassen. In diesem Sinne ist die obige Konstruktion ziemlich künstlich.

<sup>(31)</sup>Die Kräfte auf elektrische Ladungen und Stromverteilungen in einem nicht-dynamischen elektromagnetischen Feld werden in Abschn. XIII.1 detaillierter diskutiert.

<sup>(q)</sup>J. W. Strutt, Lord RAYLEIGH, 1842–1919

**Bemerkung:** Das Interessante bei der Rayleigh-Dissipationsfunktion liegt daran, dass die instantane Leistung, welche der Massenpunkt gegen die Reibungskraft verrichten muss, gleich  $2\mathcal{D}$  ist.