III.1 Ein Resultat aus der Variationsrechnung

In diesem Abschnitt wird zunächst die Definition eines Funktionals, d.h. einer Funktion von Funktionen, gegeben (§ III.1.1). Dann wird ein nützliches Ergebnis dargelegt, um die Funktionen, die eine bestimmte Funktional extremal machen, zu charakterisieren (§ III.1.2).

III.1.1 Funktional

Im mathematischen Sinne ist eine Funktion oder Abbildung f eine Beziehung, die jedem Element x einer (Definitions-)Menge genau ein Element $f(x)$ einer anderen Menge (Zielmenge) zuordnet. Im physikalischen Kontext ist die Definitionsmenge oft eine Untermenge — ein Gebiet — eines endlichdimensionalen (Vektor)Raums $\mathscr{V}$, insbesondere $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, oder $\mathbb{C}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Das gleiche gilt für die Zielmenge $\mathscr{V}'$.

Als *Funktional* bezeichnen Physiker eine Abbildung F, deren Definitionsmenge $\mathscr{V}$ ein unendlichdimensionaler Funktionenraum ist, während die Zielmenge $\mathscr{V}'$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist. Der Wert eines Funktionals F für eine Funktion $f \in \mathscr{V}$ wird mit $F[f]$, oder manchmal mit $F[f(x)]$, bezeichnet.

Im Folgenden wird die Zielmenge von Funktionalen immer $\mathbb{R}$ sein. Wiederum werden die Funktionen f der Definitionsmenge bestimmte Eigenschaften besitzen: meistens sind das (mindestens einmal) stetig differenzierbare Funktionen.

Beispiel 1: In diesem und den folgenden Beispielen ist die Definitionsmenge der jeweiligen Funktionale der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die automatisch stetig und integrierbar auf jedem endlichen Intervall sind.
Seien zwei reelle Zahlen $x_1 < x_2$; die Integration über das Intervall $[x_1, x_2]$ definiert ein Funktional:[28]

$$f \mapsto F[f] \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Beispiel 2: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Abbildung, die jeder Funktion f ihren Wert im Punkt x_0 zuordnet, ist ein Funktional:

$$f \mapsto F[f] \equiv f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\, f(x)\, \mathrm{d}x,$$

wobei in der zweiten Gleichung die Dirac[p]-δ-Distribution (s. Anhang C) eingeführt wurde.

Beispiel 3: Eine reelle Funktion $x \mapsto y(x)$ lässt sich günstig als Kurve in der (x, y)-Ebene darstellen. Wenn $x_1 < x_2$ zwei reelle Zahlen sind, dann ist die Länge $\ell[y]$ der Kurve $y(x)$ zwischen den Punkten $P_1 \equiv \big(x_1, y(x_1)\big)$ und $P_2 \equiv \big(x_2, y(x_2)\big)$ ein Funktional

$$\ell[y] \equiv \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}\ell = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \big[y'(x)\big]^2}\, \mathrm{d}x \tag{III.1}$$

wobei y' die Ableitung von y nach x bezeichnet.

[28] Mathematisch wird eher das Integral als Funktional mit bestimmten Eigenschaften (wie Linearität) definiert...

[p] P. A. M. Dirac, 1902–1984

Beispiel 4: Sei Φ eine reelle Funktion von drei reellen Argumenten und $x_1 < x_2$ zwei reelle Zahlen. Dann definiert die Formel

$$F[f] \equiv \int_{x_1}^{x_2} \Phi\big(x, f(x), f'(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

ein Funktional, das wir im nächsten Paragraphen wieder diskutieren werden.

III.1.2 Extremierung eines Funktionals

III.1.2 a Euler-Gleichung

Sei Φ eine stetig differenzierbare Funktion von drei reellen Variablen und $x_1 < x_2$ gegebene reelle Zahlen. Wir betrachten das Funktional

$$f \mapsto F[f] \equiv \int_{x_1}^{x_2} \Phi\big(x, f(x), f'(x)\big)\,\mathrm{d}x. \tag{III.2}$$

Dabei ist f eine stetig differenzierbare reelle Funktion f — mit Ableitung f' — auf dem Intervall $[x_1, x_2]$, deren Werte an den Grenzen gegeben sind: $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ mit vorgegebenen y_1 und y_2. Im Folgenden werden die partiellen Ableitungen von Φ nach ihrer Variablen mit $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial f$ und $\partial\Phi/\partial f'$ bezeichnet.

Wir wollen eine notwendige Bedingung dafür herleiten, dass das Funktional ein Extremum — Minimum oder Maximum — für eine Funktion f_0 hat. Das heißt, für alle Funktionen $f(x)$, die $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ erfüllen, gilt $F[f] \geq F[f_0]$ (falls F minimal für f_0) bzw. $F[f] \leq F[f_0]$ (Maximum für f_0).

Sei δf eine beliebige stetig differenzierbare Funktion $[x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, mit $\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$. Dann ist $\lambda \mapsto F[f_0 + \lambda\,\delta f]$ eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Damit F extremal in f_0 sei, muss die Ableitung dieser Funktion nach λ Null für $\lambda = 0$ sein:

$$\left.\frac{\mathrm{d}F[f_0+\lambda\,\delta f]}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0.$$

Das Einsetzen des Ausdrucks von $F[f_0+\lambda\,\delta f]$ als Integral [Gl. (III.2)] und das Vertauschen von Ableitung nach λ und Integration über x geben

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F[f_0+\lambda\,\delta f]}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\int_{x_1}^{x_2} \Phi\big(x, f_0(x)+\lambda\,\delta f(x), f_0'(x)+\lambda\,\delta f'(x)\big)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial f}\delta f(x) + \frac{\partial\Phi}{\partial f'}\delta f'(x)\right]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

wobei die partiellen Ableitungen in der zweiten Zeile im Punkt $\big(x, f_0(x)+\lambda\,\delta f(x), f_0'(x)+\lambda\,\delta f'(x)\big)$ zu berechnen sind.

Der zweite Summand im Integranden des letzten Integrals lässt sich mithilfe einer partiellen Integration umschreiben:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\Phi}{\partial f'}\delta f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial f'}\delta f(x)\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial f'}\right)\delta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Der integrierte Term verschwindet dank der Bedingung $\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$. Somit gilt

$$\frac{\mathrm{d}F[f_0+\lambda\,\delta f]}{\mathrm{d}\lambda} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial f'}\right)\right]\delta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies muss für $\lambda = 0$ verschwinden, d.h. wenn die partiellen Ableitungen im Integranden im Punkt $\big(x, f_0(x), f_0'(x)\big)$ ausgewertet sind. Da die Wahl der „Variation“ δf bis auf ihre Werte an den Intervallgrenzen beliebig ist, findet man einfach, dass die Differenz in den eckigen Klammern selbst identisch verschwinden muss,[29] d.h.

$$\frac{\partial\Phi\big(x,f_0(x),f_0'(x)\big)}{\partial f}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\Phi\big(x,f_0(x),f_0'(x)\big)}{\partial f'}\right)=0\quad\forall x\in[x_1,x_2].$$

Somit haben wir bewiesen das

Theorem: Sei Φ eine in allen ihren drei reellen Variablen stetig differenzierbare Funktion und x_1, x_2, y_1, y_2 gegebene reelle Zahlen mit $x_1<x_2$. Für stetig differenzierbare Funktionen $f:\ [x_1,x_2]\to\mathbb{R}$, die $f(x_1)=y_1$ und $f(x_2)=y_2$ erfüllen, wird das Funktional

$$F[f]=\int_{x_1}^{x_2}\Phi\big(x,f(x),f'(x)\big)\,\mathrm{d}x \tag{III.3a}$$

definiert. Wenn F ein Extremum für eine Funktion f_0 hat, dann erfüllt f_0 die *Euler-Gleichung*

$$\frac{\partial\Phi\big(x,f_0(x),f_0'(x)\big)}{\partial f}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\Phi\big(x,f_0(x),f_0'(x)\big)}{\partial f'}\right)\qquad\forall x\in[x_1,x_2]. \tag{III.3b}$$

Bemerkungen:

∗ Bei gegebener Φ ist die zugehörige Euler-Gleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in f_0.

∗ Wenn die Funktion Φ bestimmte Bedingungen erfüllt, kann man auch zeigen, dass eine Lösung der Euler-Gleichung (III.3b) auch Lösung des Extremierungsproblems für F ist.

∗ Die Anwesenheit eines Extremums für das Funktional F wird (durch Physiker) oft mit der kurzen Schreibweise $\delta F[f]=0$ bezeichnet.

Das obige Theorem lässt sich auf den Fall eines Funktionals

$$F[f_1,\dots,f_s]=\int_{x_1}^{x_2}\Phi\big(x,f_1(x),f_1'(x),\dots,f_s(x),f_s'(x)\big)\,\mathrm{d}x \tag{III.4a}$$

von s skalaren Funktionen f_α, $\alpha=1,\dots,s$ verallgemeinern, wobei Φ jetzt eine stetig differenzierbare Funktion von $2s+1$ reellen Variablen ist. Wenn ein Satz $(f_1,\dots,f_s)$ das Funktional F minimiert oder maximiert, dann genügen die zugehörigen Funktionen den s Euler-Gleichungen

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f_\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial f_\alpha'}\right)\qquad\forall x\in[x_1,x_2] \tag{III.4b}$$

für jedes $\alpha\in\{1,\dots,s\}$.

Das Theorem kann auch verallgemeinert werden, um den Fall eines Funktionals zu berücksichtigen, dessen Argumente Funktionen mehrerer Variablen $x_1,\dots,x_p$ sind:

$$F[f]=\int_{\mathcal{D}}\Phi\left(x_1,\dots,x_p,f(x_1,\dots,x_p),\frac{\partial f(x_1,\dots,x_p)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(x_1,\dots,x_p)}{\partial x_p}\right)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_p, \tag{III.5a}$$

mit einem p-dimensionalen Integrationsgebiet $\mathcal{D}$. In dieser Definition ist Φ eine stetig differenzierbare Funktion von $2p+1$ reellen Variablen. Wenn eine Funktion f das Funktional F minimiert oder maximiert, dann erfüllt sie die Euler-Gleichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f}=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial(\partial f/\partial x_j)}\right)\qquad\forall x\in\mathcal{D}. \tag{III.5b}$$

Schließlich lässt sich auch die Extremierung von Funktionalen von N Funktionen von p Variablen behandeln, indem die zwei obigen Verallgemeinerungen kombiniert werden.

[29] Dies bildet das *Fundamentallemma der Variationsrechnung*.

III.1.2 b Beispiel

Als Anwendung der Euler-Gleichung können wir den (bekannten!) kürzesten Weg zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in der (x, y)-Ebene suchen. Das heißt, wir möchten die Kurve $f(x)$ finden, die $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ erfüllt und das Funktional

$$\ell[f] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\,\mathrm{d}x \tag{III.1}$$

minimiert. Dieses Funktional ist der Form (III.3a) mit $\Phi\big(x, f(x), f'(x)\big) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial f} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial f'} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}.$$

Leitet man die letztere nach x ab, so ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial f'}\right) = \frac{f''(x)}{\big(1 + [f'(x)]^2\big)^{3/2}},$$

wobei f'' die zweite Ableitung von f bezeichnet. Die Euler-Gleichung (III.3b) lautet dann

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial f'}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \frac{f''(x)}{\big(1 + [f'(x)]^2\big)^{3/2}}.$$

Dies gibt sofort $f''(x) = 0$: nach doppelter Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen in x_1 und x_2 kommt

$$f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

d.h. die Gleichung der Geraden zwischen den zwei Endpunkten, was zu erwarten war.

Bemerkung: Zur Berechnung der totalen Ableitung nach x von $\partial\Phi/\partial f'$ kann man entweder den Ausdruck der partiellen Ableitung direkt ableiten, oder die Kettenregel anwenden und dafür die drei zweiten Ableitungen $\partial^2\Phi/\partial x\,\partial f'$, $\partial^2\Phi/\partial f\,\partial f'$ und $\partial^2\Phi/\partial f'^2$ berechnen und mit jeweils $x' = 1$, $f'(x)$ und $f''(x)$ multiplizieren. Natürlich führen beide Wege zum gleichen Ergebnis.