

II.2.3 Kepler-Problem

Die newtonsche Gravitationskraft zwischen zwei Massenpunkten mit Massen m_1 , m_2 ist eine konservative Zentralkraft, gegeben durch

$$\vec{F}(|\vec{x}|) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{x}|^2} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = -\vec{\nabla} V(|\vec{x}|) \quad (\text{II.43a})$$

mit dem Potential

$$V(|\vec{x}|) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{x}|}. \quad (\text{II.43b})$$

Dabei bezeichnet \vec{x} der Abstandsvektor zwischen den Massen und G_N die newtonsche Gravitationskonstante, $G_N \simeq 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Ziel dieses Abschnitt ist die Untersuchung der einfachsten möglichen Bewegungen, zu denen dieses Potential führen kann, und insbesondere die Herleitung der drei durch Kepler⁽¹⁾ experimentell ermittelten Gesetze. Zu diesem Zweck wird die Bewegung zweier Massenpunkte betrachtet, die über das Potential (II.43b) miteinander wechselwirken, während sie keiner äußeren Kraft unterliegen. Diese Fragestellung wird als *Kepler-Problem* bezeichnet.

Bemerkung: Das Gravitationspotential ist nur bis auf eine additive Konstante definiert, die bei der Gradientenbildung nicht beiträgt. In Gl. (II.43b) wurde diese Konstante so gewählt, dass das Potential für unendlich große Abstände, also wenn die Kraft Null ist, verschwindet.

II.2.3 a Vorbereitungen

In Übereinstimmung mit den allgemeinen Ergebnissen des § II.2.1 kann man die triviale Bewegung des Schwerpunkts von der mehr interessanten Relativbewegung separieren, wobei die letztere die Zeitänderung der Relativkoordinate \vec{x} für ein fiktives Teilchen mit der reduzierten Masse μ ist.

Da es sich bei dem newtonschen Potential (II.43b) um ein Zentralpotential handelt, ist der Drehimpuls $\vec{\ell}$ für die Relativbewegung erhalten. Insbesondere ist seine Richtung konstant. Da sowohl $\vec{x}(t)$ als $\dot{\vec{x}}(t)$ senkrecht auf $\vec{\ell}$ sind, bleibt die Bahnkurve in einer Ebene senkrecht auf $\vec{\ell}$ — der sog. Ekliptik. Dementsprechend lohnt es sich, ein Koordinatensystem zu wählen, in dem die Richtung von $\vec{\ell}$ entlang einer der Achse ist, z.B. der z -Achse.

Die Wahl der Koordinaten in der Bewegungsebene bleibt noch offen. Man kann zuerst feste kartesische Basisvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y einführen, und dementsprechend die Bahnkurve durch $(x(t), y(t))$ parametrisieren. Da das Wechselwirkungspotential (II.43b) nur vom Abstand $r(t) \equiv |\vec{x}(t)|$ zum Kraftzentrum abhängt, ist es sinnvoll, eine Parametrisierung der Bahnkurve zu wählen, in dem dieser Abstand eine direkte Rolle spielt. Dazu dient noch der Winkel $\theta(t)$ der Relativkoordinate relativ zu einer festen Richtung, z.B. zur x -Achse, zur Charakterisierung von $\vec{x}(t)$.

Somit lautet die Relativkoordinate

$$\vec{x}(t) = r(t) \vec{e}_r(t), \quad (\text{II.44})$$

wobei die instantane Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_r(t)$ in Radialrichtung von der Position des (fiktiven) bewegten Körpers und damit indirekt von der Zeit abhängt: bezüglich der Basisvektoren eines festen kartesischen Koordinatensystems gilt

$$\vec{e}_r(t) = \cos \theta(t) \vec{e}_x + \sin \theta(t) \vec{e}_y. \quad (\text{II.45a})$$

Man bezeichnet mit $\vec{e}_\theta(t)$ einen orthogonal auf $\vec{e}_r(t)$ stehenden Einheitsvektor in der Bewegungsebene (s. Abb. II.2)

$$\vec{e}_\theta(t) = -\sin \theta(t) \vec{e}_x + \cos \theta(t) \vec{e}_y, \quad (\text{II.45b})$$

so dass $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$ und $\vec{e}_z(t) \equiv \vec{e}_r(t) \times \vec{e}_\theta(t)$ die Basisvektoren eines *mitbewegten Koordinatensystems* bilden, wobei $\vec{e}_z(t)$ hier eigentlich zeitunabhängig ist.

Die Ableitung der Gl. (II.45a) nach der Zeit gibt⁽²¹⁾

$$\frac{d\vec{e}_r(t)}{dt} = -\frac{d\theta(t)}{dt} \sin \theta(t) \vec{e}_x + \frac{d\theta(t)}{dt} \cos \theta(t) \vec{e}_y = \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta(t). \quad (\text{II.46a})$$

⁽²¹⁾Auf ähnliche Weise gilt

$$\frac{d\vec{e}_\theta(t)}{dt} = -\frac{d\theta(t)}{dt} \cos \theta(t) \vec{e}_x - \frac{d\theta(t)}{dt} \sin \theta(t) \vec{e}_y = -\dot{\theta}(t) \vec{e}_r(t). \quad (\text{II.46b})$$

⁽¹⁾J. KEPLER, 1571–1630

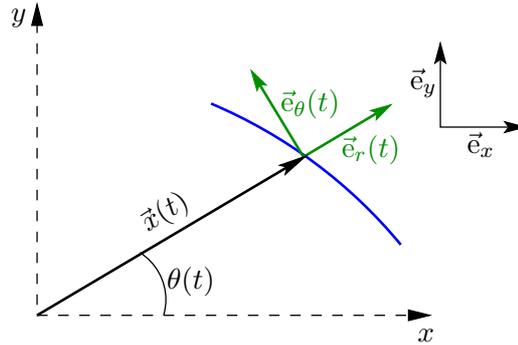


Abbildung II.2

Somit lautet die Relativgeschwindigkeit, unter Verwendung der Kettenregel beim Ableiten der Gl. (II.44)

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \vec{e}_r(t) + r(t) \frac{d\vec{e}_r(t)}{dt} = \dot{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta(t). \quad (II.47)$$

Schließlich ist der Drehimpuls der Relativbewegung gegeben durch

$$\vec{\ell}(t) \equiv \vec{x}(t) \times \mu \dot{\vec{x}}(t) = \mu r(t)^2 \dot{\theta}(t) \vec{e}_z \quad (II.48)$$

mit konstanter Richtung und dem konstanten Betrag

$$\ell \equiv |\vec{\ell}(t)| = \mu r(t)^2 \dot{\theta}(t). \quad (II.49)$$

II.2.3 b Zweites Keplersches Gesetz

In dem Intervall zwischen zwei sukzessiven Zeitpunkten t und $t + dt$ ändert sich der Polarwinkel $\theta(t)$ der Bahnkurve um $d\varphi \simeq \dot{\theta}(t) dt$. Die Ortsvektoren $\vec{x}(t)$ und $\vec{x}(t+dt)$ und die Bahnkurve grenzen ein Flächenelement ab, dessen Flächeninhalt annähernd durch

$$dS = \frac{1}{2} r(t) r(t) d\theta = \frac{r(t)^2}{2} \frac{d\theta(t)}{dt} dt$$

gegeben ist.

Ersetzt man die Zeitableitung $\dot{\theta}(t)$ mithilfe der Gl. (II.49), so kommt der „Flächensatz“

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2\mu} = \text{Konstante}, \quad (II.50)$$

d.h. (zweites Keplersches Gesetz)

Der Ortsvektor (von dem Stern zum Planeten) überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen. (II.51)

Dabei beziehen sich die Worte zwischen Klammern auf den historischen durch Kepler betrachteten Fall eines Planeten um einen viel schwereren Stern, $m_2 \gg m_1$. Im Fall zweier (ungefähr) gleich schweren Körper, wie z.B. die zwei Sterne eines Doppelsternsystems, geht die Relativkoordinate von einem Stern zum anderen.

Bemerkung: In der Herleitung dieses Ergebnisses wurde die Form des Potentials $V(r)$ nicht benutzt, d.h. der Flächensatz gilt für jedes Zentralkraftproblem.

II.2.3 c Bahnkurve. Erstes und drittes Keplersches Gesetz

Da die newtonsche Gravitationskraft konservativ ist, ist die Gesamtenergie

$$E = T(t) + V(t) = \frac{1}{2} \mu \left[\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right]^2 + V(r(t))$$

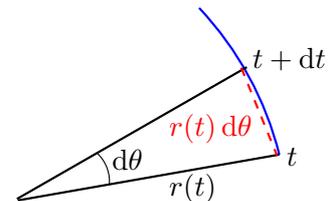


Abbildung II.3

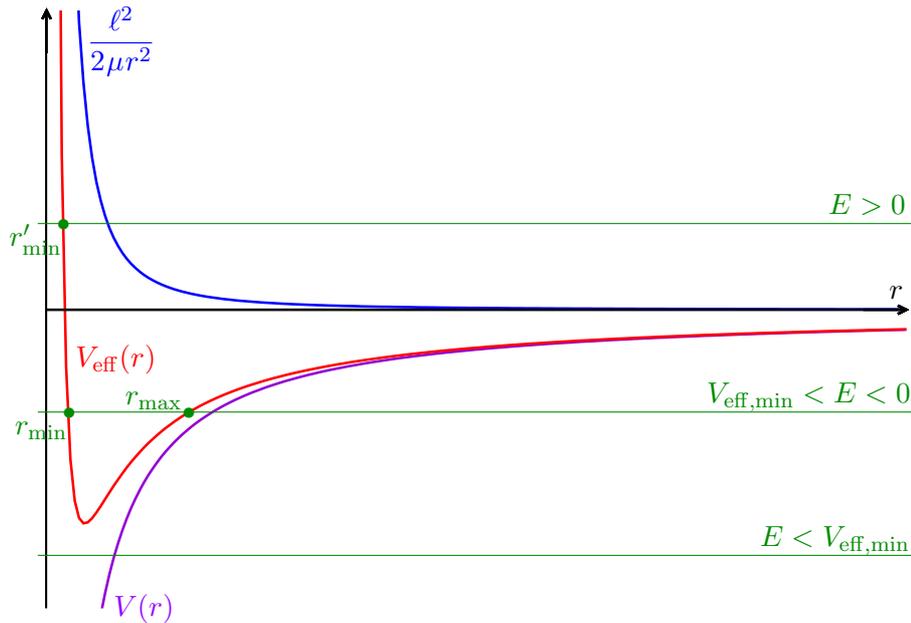


Abbildung II.4 – Effektives Potential $V_{\text{eff}}(r)$ für das Kepler-Problem.

der Relativbewegung eine Erhaltungsgröße. Unter Verwendung der expliziten Form (II.47) der Geschwindigkeit gilt noch

$$E = \frac{\mu}{2} \left[\dot{r}(t)^2 + r(t)^2 \dot{\theta}(t)^2 \right] + V(r(t)).$$

Mithilfe der Gl. (II.49) kann man die Zeitableitung $\dot{\theta}(t)$ durch $\ell/\mu r(t)^2$ ersetzen, so dass sich die totale Energie noch als

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}(t)^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r(t)^2} + V(r) \quad (\text{II.52})$$

umschreiben lässt, unabhängig von der Winkelvariablen θ . Dabei ist $\dot{r}(t)$ die radiale Geschwindigkeit. Betrachtet man dementsprechend Gl. (II.52) als totale Energie für die eindimensionale Bewegung in Radialrichtung, so ist der erste Term auf der rechten Seite die zugehörige kinetische Energie, während die zwei letzten ein *effektives Potential*

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \quad (\text{II.53})$$

darstellen. Dann gilt

$$\dot{r}(t)^2 = \frac{2}{\mu} [E - V_{\text{eff}}(r)]. \quad (\text{II.54})$$

Beim newtonschen Gravitationspotential $V(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha = G_N m_1 m_2 > 0$ ist das resultierende effektive Potential eine nicht-monotone Funktion von r , erstmal abnehmend dann wachsend. Je nach den relativen Werten von der Gesamtenergie E und dem minimalen Wert $V_{\text{eff},\text{min}} < 0$ des effektiven Potentials kommen drei verschiedene Möglichkeiten vor, die in Abb. II.4 graphisch gezeigt werden:

- Für $E < V_{\text{eff},\text{min}}$ ist die rechte Seite von Gl. (II.54) immer negativ, so dass keine Lösung der Gleichung mit reeller Radialgeschwindigkeit existieren kann: diesen mathematischen Werten von E und ℓ entspricht keine physikalisch erlaubte Lösung des Kepler-Problems.
- Für $V_{\text{eff},\text{min}} < E < 0$ kann die rechte Seite von Gl. (II.54) nicht-negativ sein, und zwar für Werte $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$, wobei $r_{\text{min}}, r_{\text{max}}$ die zwei Lösungen der Gleichung $V_{\text{eff}}(r) = E$ sind. Da r_{max} endlich ist, bleibt das fiktive Teilchen immer in endlichem Abstand vom Kraftzentrum, und ist somit daran „gebunden“.

Bei den Abständen r_{\min} und r_{\max} verschwindet die Radialgeschwindigkeit \dot{r} — die eigentlich ihr Vorzeichen ändern wird: dabei handelt es sich um *Umkehrpunkte* der Radialbewegung.

Im Spezialfall $E = V_{\text{eff},\min}$ ist $V(r) = E$ für einen einzigen Wert von r . Dazu gibt Gl. (II.54) $\dot{r}(t) = 0$, d.h. r bleibt konstant: die entsprechende Bahnkurve ist ein Kreis.

- Für $E \geq 0$ hat die Gleichung $V_{\text{eff}}(r) = E$ eine einzige Lösung r'_{\min} , und die rechte Seite von Gl. (II.54) bleibt positiv für $r > r'_{\min}$. Somit geht die Bahnkurve des fiktiven Teilchens unendlich weit weg vom Kraftzentrum: das Teilchen ist „ungebunden“.

Bemerkung: Für kleine Abstände r vom Kraftzentrum dominiert der Beitrag $\ell^2/2\mu r^2$ im effektiven Potential gegenüber dem Gravitationspotential. Da dieser Term positiv ist, führt er zu einer Abstoßung vom Kraftzentrum weg. Dementsprechend wird der Term $\ell^2/2\mu r^2$ oft als *Zentrifugalpotential* bezeichnet.

Für die obige Fallunterscheidung war die genaue Form des effektiven Potentials, und daher von $V(r)$, nicht nötig, um die Existenz oder nicht-Existenz von Lösungen festzustellen. Die exakten Bahnkurven für die verschiedenen Fälle hängen aber natürlich von $V(r)$ ab.

Ausgehend aus Gl. (II.54) kann man den Verlauf der Bahnkurve bestimmen.⁽²²⁾ Einerseits gilt unter Verwendung der Kettenregel

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{dr(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{dr(\theta)}{d\theta} \frac{\ell}{\mu r^2},$$

wobei Gl. (II.49) benutzt wurde. Andererseits ist $\dot{r}(t)$ auch durch Gl. (II.54) gegeben. Betrachtet man eine Lösung mit positiver Radialgeschwindigkeit, so kann man schreiben

$$\frac{dr(\theta)}{d\theta} = \frac{\mu r^2}{\ell} \dot{r}(t) = \frac{r^2}{\ell} \sqrt{2\mu[E - V_{\text{eff}}(r)]}.$$

Das heißt, nach Trennung der Variablen

$$d\theta = \frac{\ell dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - V_{\text{eff}}(r)]}} = \frac{\ell dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - V(r)] - \ell^2/r^2}} \quad (\text{II.55})$$

und nach formeller Integration beider Seiten dieser Gleichung

$$\theta = \int^r \frac{\ell dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu[E - V(r')] - \ell^2/r'^2}}, \quad (\text{II.56})$$

wobei $r_{\min} < r < r_{\max}$ gelten muss.

Im Fall des newtonschen Potentials $V(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha = G_N m_1 m_2$ kann die Integration explizit durchgeführt werden. Dabei ist

$$\theta = \int^r \frac{\ell dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu(E + \alpha/r') - \ell^2/r'^2}}.$$

Eine erste Substitution $u' = 1/r'$, d.h. $du' = -dr'/r'^2$, gibt zunächst

$$\theta = - \int^u \frac{\ell du'}{\sqrt{2\mu(E + \alpha u') - \ell^2 u'^2}} = - \int^u \frac{du'}{\sqrt{2\mu E/\ell^2 + (2\mu\alpha/\ell^2)u' - u'^2}}.$$

Der Term unter der Wurzel im Nenner ist der Form $a + bu' - u'^2 = a + b^2/4 - (u' - b/2)^2$, mit $a = 2\mu E/\ell^2$ und $b = 2\mu\alpha/\ell^2$. Eine weitere Substitution $v' = (u' - b/2)/\sqrt{a + b^2/4}$ liefert dann

$$\int^u \frac{du'}{\sqrt{a + b^2/4 - (u' - b/2)^2}} = \int^{v'} \frac{dv'}{\sqrt{1 - v'^2}} = -\arccos(v) = -\arccos\left(\frac{u - b/2}{\sqrt{a + b^2/4}}\right).$$

⁽²²⁾Eine alternative Herleitung wird im Anhang II.A zu diesem Kapitel vorgestellt.

Somit erhält man

$$\theta = \arccos \left(\frac{1/r - \mu\alpha/\ell^2}{\sqrt{2\mu E/\ell^2 + \mu^2\alpha^2/\ell^4}} \right) + \text{Konstante} \quad (\text{II.57})$$

Die Wahl der Integrationskonstanten ist äquivalent zur Wahl der Bezugsrichtung $\theta = 0$, so dass die Konstante problemlos gleich Null genommen werden kann. Damit ergibt sich

$$\cos \theta = \frac{1/r - \mu\alpha/\ell^2}{\sqrt{2\mu E/\ell^2 + \mu^2\alpha^2/\ell^4}} = \frac{1/r - \mu\alpha/\ell^2}{(\mu\alpha/\ell^2)\sqrt{2E\ell^2/\mu\alpha^2 + 1}}.$$

Mit den Definitionen

$$\epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}} \quad \text{und} \quad p \equiv \frac{\ell^2}{\mu\alpha} \quad (\text{II.58a})$$

wird die θ - r -Abhängigkeit zu $\epsilon \cos \theta = p/r - 1$, d.h.

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (\text{II.58b})$$

Das ist die Gleichung in Polarkoordinaten eines Kegelschnitts mit Exzentrizität ϵ und Parameter p .

Bemerkung: Man prüft einfach, dass die Wahl einer Lösung (genauer, eines Zweigs der Lösung) mit negativer $\dot{r}(t)$, entsprechend der negativen Wurzel der Gl. (II.54), führt zur gleichen Bahnkurve: $dr(\theta)/d\theta > 0$ bzw. $dr(\theta)/d\theta < 0$ entspricht dem Teil der Kurve mit $0 < \theta < \pi$ bzw. $\pi < \theta < 2\pi$.

Wie in der Diskussion der Abb. II.4 gibt es unterschiedliche Fälle je nach dem Wert der Energie E . Dafür kann man schon bemerken, dass das effektive Potential $-\alpha/r + \ell^2/2\mu r^2$ minimal für $r_0 = \ell^2/\mu\alpha$ ist, wo V_{eff} den Wert $-\mu\alpha^2/2\ell^2 \equiv V_{\text{eff,min}}$ annimmt.

- Für $V_{\text{eff,min}} \leq E < 0$ gilt laut Gl. (II.58a) $0 \leq \epsilon < 1$; d.h., die Bahnkurve ist eine Ellipse — ein Kreis falls $\epsilon = 0$, entsprechend $E = V_{\text{eff,min}}$. Dies bildet das *erste Keplersche Gesetz*:

Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen (mit der Sonne in einem gemeinsamen Brennpunkt). (II.59)

In einem Doppelsternsystem beschreibt jeder Stern eine elliptische Bahnkurve mit dem anderen Stern in einem Brennpunkt, während die Position ihres gemeinsamen Schwerpunkts unverändert bleibt.

Die große Halbachse der Ellipse ist $a = p/(1 - \epsilon^2)$, die kleine Halbachse $b = p/\sqrt{1 - \epsilon^2}$. Die durch die Ellipse abgeschlossene Oberfläche ist $\mathcal{S} = \pi ab$. Andererseits ist diese Fläche über

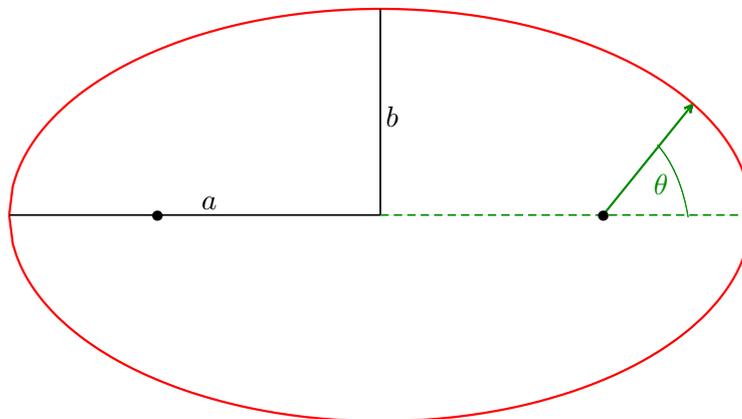


Abbildung II.5 – Ellipse mit Exzentrizität $\epsilon = 0,6$; die Punkte sind die Brennpunkte.

den Flächensatz (II.50) mit der Umlaufzeit \mathcal{T} verknüpft: $\mathcal{S} = (\ell/2\mu)\mathcal{T}$. Somit gilt

$$\mathcal{T}^2 = \frac{4\mu^2}{\ell^2} \mathcal{S}^2 = \frac{4\pi^2\mu^2}{\ell^2} a^2 b^2 = \frac{4\pi^2\mu^2 p}{\ell^2} a^3 = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} a^3.$$

Mit den expliziten Ausdrücken der reduzierten Masse und der Konstanten $\alpha = G_N m_1 m_2$ ergibt sich schließlich

$$\mathcal{T}^2 = \frac{4\pi^2}{G_N(m_1+m_2)} a^3.$$

Dies entspricht dem *dritten Kepler-Gesetz*:

Die Quadrate der Umlaufbahnen der Planeten sind proportional zur dritten Potenz der großen Bahnhalbachse.

(II.60)

Auf der Parametrisierung (II.58b) kann man sofort den bei $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi$ stattfindenden minimalen bzw. maximalen Abstand $r_{\min} = p/(1+\epsilon)$ bzw. $r_{\max} = p/(1-\epsilon)$ zwischen Planeten und Stern lesen.

- Für $E = 0$ ist die Exzentrizität der Bahnkurve gleich 1, so dass diese eine Parabel ist.
- Für $E > 0$ ist gemäß Gl. (II.58a) die Exzentrizität größer als 1, $\epsilon > 1$, d.h. die Bahnkurve ist eine Hyperbel (Abb. II.6).

Wie aus der Diskussion des effektiven Potentials erwartet war, ist die Bewegung räumlich unbegrenzt, und $r(\theta)$ wächst unendlich groß wenn $\cos\theta$ von oben gegen $-1/\epsilon$ geht. Dagegen wird für $\theta = 0$ der minimale Abstand zum Brennpunkt $r'_{\min} = p/(1+\epsilon)$ erreicht.

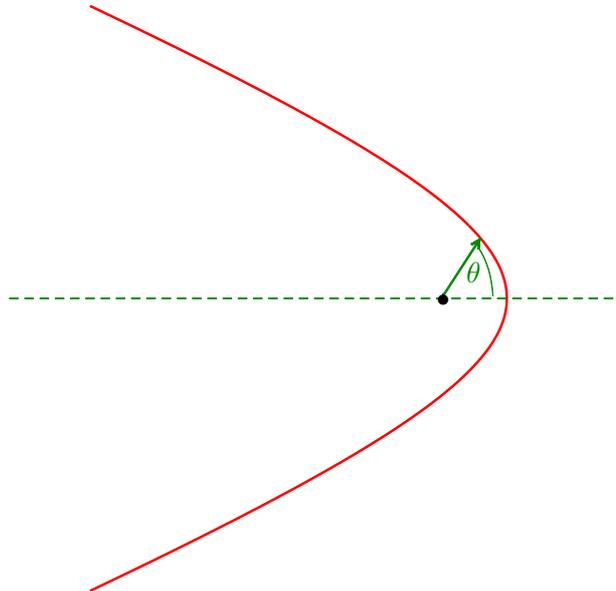


Abbildung II.6 – Hyperbel mit Exzentrizität $\epsilon = 1,6$ für ein anziehendes Potential.

Bisher wurde nur das anziehende newtonsche Potential (II.43b) betrachtet, entsprechend einem positiven Wert von $\alpha = G_N m_1 m_2$. Man kann auch die Bahnkurven für das abstoßende Potential $V(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha < 0$ betrachten, was insbesondere dem elektrostatischen Coulomb-Potential zwischen zwei positiven oder zwei negativen Punktladungen entspricht.

Wiederholt man die Herleitung zwischen Gl. (II.56) und (II.58) für den Fall $\alpha < 0$, so findet man, dass die möglichen Bahnkurven wieder Kegelschnitte sind. Dabei treten die abgeschlossenen Trajektorien (Ellipse, Kreis) aber nicht mehr auf, da es keine gebundenen Zustände des Zwei-Körper-Systems gibt — das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ ist immer positiv und nimmt monoton mit r ab —,

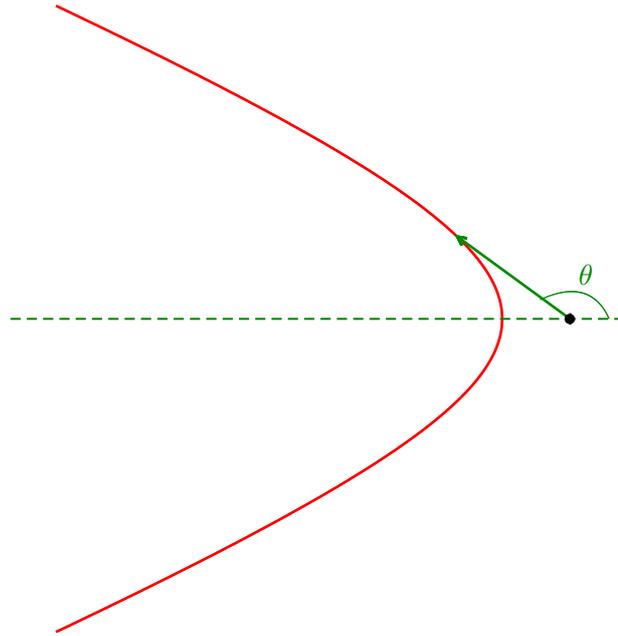


Abbildung II.7 – Hyperbel mit Exzentrizität $\epsilon = 1,6$ für ein abstoßendes Potential.

sondern nur ungebundene. Da $V_{\text{eff}}(r) > 0$ für alle Abstände r , gibt es auch keine Bahnkurve mit $E = 0$, d.h. keine Parabel.

Dagegen gibt es Hyperbeln ($\epsilon > 1$), wobei man aufpassen soll, dass der Parameter p jetzt negativ ist. Der minimale Abstand ist somit $r_{\text{min}} = |p|/(\epsilon - 1)$ und wird für $\theta = \pi$ erreicht (Abb. II.7). Wiederum wird r unendlich groß, wenn $\cos \theta \rightarrow (-1/\epsilon)$ von unten geht.