

### II.1.3 Drehimpuls

Als nächstes können wir jetzt die Zeitentwicklung des durch Gl. (II.7) definierten Gesamtdrehimpulses untersuchen. Leitet man dessen Ausdruck nach der Zeit ab, so ergibt sich nach Anwendung der Produktregel

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \sum_{a=1}^N \frac{d\vec{x}_a(t)}{dt} \times \vec{p}_a(t) + \sum_{a=1}^N \vec{x}_a(t) \times \frac{d\vec{p}_a(t)}{dt}.$$

Da die Geschwindigkeit  $d\vec{x}_a(t)/dt$  parallel zum Impuls ist, verschwindet der erste Term auf der rechten Seite. Unter Verwendung der Bewegungsgleichung (II.2) für Teilchen  $a$  erhält man dann

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \sum_{a=1}^N \vec{x}_a(t) \times \vec{F}_a = \sum_{a=1}^N \vec{x}_a(t) \times \vec{F}_{a,\text{ext}} + \sum_{a,b=1}^N \vec{x}_a(t) \times \vec{F}_{b \rightarrow a}, \quad (\text{II.13})$$

wobei die zweite Gleichung aus der Aufspaltung (II.1) der Kraft auf  $a$  folgt.

Jeder Beitrag  $\vec{x}_a(t) \times \vec{F}_{a,\text{ext}}$  für  $a \in \{1, \dots, N\}$  ist das *Drehmoment* der äußeren Kraft  $\vec{F}_{a,\text{ext}}$ , d.h. der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (II.13) ist die Resultierende dieser Drehmomente.

Ähnlich wie in Gl. (II.11) kann man den zweiten Term im Ausdruck ganz rechts von Gl. (II.13) umschreiben, und zwar als

$$\sum_{a,b=1}^N \vec{x}_a(t) \times \vec{F}_{b \rightarrow a} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N [\vec{x}_a(t) \times \vec{F}_{b \rightarrow a} + \vec{x}_b(t) \times \vec{F}_{a \rightarrow b}].$$

Laut dem dritten newtonschen Gesetz kann  $\vec{F}_{a \rightarrow b}$  durch  $-\vec{F}_{b \rightarrow a}$  ersetzt werden, woraus sich

$$\sum_{a,b=1}^N \vec{x}_a(t) \times \vec{F}_{b \rightarrow a} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N [\vec{x}_a(t) - \vec{x}_b(t)] \times \vec{F}_{b \rightarrow a}$$

ergibt. Falls die Kraft  $\vec{F}_{b \rightarrow a}$  entlang des Abstandvektors  $\vec{x}_b(t) - \vec{x}_a(t)$  von Teilchen  $a$  nach Teilchen  $b$  liegt — was z.B. der Fall für die Coulomb-Kraft zwischen zwei Punktladungen oder für die newtonschen Schwerkraft zwischen zwei Punktmassen ist —, wird  $\vec{F}_{b \rightarrow a}$  *Zentralkraft* genannt. In diesem Fall verschwindet das Kreuzprodukt auf der rechten Seite der obigen Gleichung, und die Gl. (II.13) vereinfacht sich zu

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \sum_{a=1}^N \vec{x}_a(t) \times \vec{F}_{a,\text{ext}}. \quad (\text{II.14a})$$

Dieses Ergebnis stellt den *Drehimpulssatz* für ein Mehrteilchensystem dar, und zwar

*Für ein System aus  $N$  Teilchen, zwischen denen nur Zentralkräfte wirken, ist die Rate der Änderung des Gesamtdrehimpulses gleich der Resultierenden von den äußeren Drehmomenten.* (II.14b)

Falls keine äußeren Kräfte vorliegen, oder wenn die Resultierende ihrer Drehmomente verschwindet, gilt  $d\vec{L}(t)/dt = \vec{0}$ , d.h. der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}(t)$  ist erhalten:

*Wenn die Resultierende aller äußeren Drehmomente auf ein Mehrteilchensystem mit nur zentralen inneren Kräften verschwindet, dann ist der Gesamtdrehimpuls des Systems eine Erhaltungsgröße.* (II.14c)

### Bemerkungen:

\* Zentralkräfte werden oft definiert als Kräfte, die immer entlang der Richtung bis zu einem festen Punkt — dem *Kraftzentrum* — liegen. Die hier adoptierte Definition, laut der die Zweikörperkraft  $\vec{F}_{b \rightarrow a}$  immer in Richtung des Abstandsvektors zwischen Teilchen  $a$  und  $b$  zeigt, lässt sich ähnlich betrachten: wird die Position vom Massenpunkt  $b$  als fest angenommen, ist die durch Teilchen  $b$  auf jedes andere Teilchen  $a$  ausgeübte Kraft eine Zentralkraft bezüglich der Position von  $b$ .

\* Hier wurde in der Herleitung der Ergebnisse (II.13)–(II.14c) angenommen, dass die inneren Kräfte zentral sind. Eigentlich ist die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses in abgeschlossenen Systemen viel allgemeiner — wie wir in § III.3.1c sehen werden, spiegelt diese Erhaltung die Isotropie des Raums wider — und gilt auch für Systeme mit nicht-zentralen Kräften.

## II.1.4 Energie

### II.1.4a Energiesatz

Die kinetische Energie des  $a$ -ten Teilchens eines Systems ist  $T_a = \vec{p}_a^2/2m_a$ , vgl. Definition (I.21). Logischerweise wird die *gesamte kinetische Energie* eines Mehrteilchensystems definiert als

$$T \equiv \sum_{a=1}^N \frac{\vec{p}_a^2}{2m_a}. \quad (\text{II.15})$$

Sei jetzt angenommen, dass sowohl die äußeren als die inneren Kräfte, die auf die Körper des Mehrteilchensystems wirken, konservativ sind. Das heißt einerseits, dass es Potentiale  $V_{a,\text{ext}}(\vec{r}_a)$  existieren, die

$$\vec{F}_{a,\text{ext}} = -\vec{\nabla}_a V_{a,\text{ext}}(\vec{r}_a) \quad \text{für } a \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{II.16})$$

erfüllen, wobei  $\vec{\nabla}_a$  den Gradienten bezüglich dem Ortsvektor  $\vec{r}_a$  bezeichnet. (18) Andererseits gibt es paarweise Wechselwirkungspotentiale  $V_{ab}$ , die nur vom Abstand  $|\vec{r}_a - \vec{r}_b|$  abhängen, aus denen die inneren Kräfte abgeleitet werden können, und zwar über

$$\vec{F}_{b \rightarrow a} = -\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) \quad \text{für } a, b \in \{1, \dots, N\}. \quad (\text{II.17})$$

In diesem Fall ist die Zweikörperkraft der Form

$$\vec{F}_{b \rightarrow a} = f_{ba}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) \vec{e}_{ba}$$

mit einer Funktion  $f_{ba}$  einer reellen Variablen und dem Einheitsvektor  $\vec{e}_{ba} \equiv (\vec{r}_a - \vec{r}_b)/|\vec{r}_a - \vec{r}_b|$  entlang des Abstandsvektors der beiden Teilchen. Somit ist die Kraft zentral.

Damit das dritte newtonsche Gesetz erfüllt wird, muss  $V_{ab} = V_{ba}$  für jedes Paar  $a, b$  gelten.

Die Kettenregel gibt nämlich  $-\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) = \vec{\nabla}_b V_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)$ .

Die *gesamte potentielle Energie*  $V$  des Mehrteilchensystems ist dann

$$V \equiv \sum_{a=1}^N V_{a,\text{ext}}(\vec{r}_a) + \sum_{1 \leq a < b \leq N} V_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|). \quad (\text{II.18})$$

Dabei muss die Wechselwirkungsenergie jedes Teilchenpaars nur einmal mitgezählt werden, weshalb die Summe über Paare mit  $a < b$  eingeschränkt wurde. Äquivalent kann man die Summe im zweiten Term auf der rechten Seite noch anders umschreiben, und zwar entweder als die Hälfte der Summe über alle Werte von  $a$  und  $b$  mit der Einschränkung  $a \neq b$ , oder als die halbe Summe über alle Werte von  $a$  und  $b$  ohne Einschränkung, jedoch mit der Konvention  $V_{aa} \equiv 0$ :

$$\sum_{1 \leq a < b \leq N} V_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N V_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N V_{ab} \quad \text{mit } V_{aa} = 0.$$

**Bemerkung:** Die Gesamtkraft  $\vec{F}_a$  auf das  $a$ -te Teilchen kann noch durch das Gesamtpotential  $V$  [Gl. (II.18)] ausgedrückt werden:

$$\vec{F}_a = -\vec{\nabla}_a V, \quad (\text{II.19})$$

wobei  $V$  als Funktion der  $N$  Ortsvektoren  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  zu betrachten ist.

Unter den obigen Annahmen über die Kräfte ist die Summe

$$T + V \equiv \sum_{a=1}^N T_a + \left[ \sum_{a=1}^N V_{a,\text{ext}} + \sum_{1 \leq a < b \leq N} V_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) \right] \quad (\text{II.20})$$

aus allen kinetischen und potentiellen Energien eine Konstante der Bewegung, die *Gesamtenergie* des Systems.

Dieses Ergebnis stellt den *Energieerhaltungssatz* für ein Mehrteilchensystem dar, und zwar

*Die Gesamtenergie eines Systems aus  $N$  Teilchen mit nur konservativen inneren und äußeren Kräften ist eine Erhaltungsgröße.* (II.21)

<sup>(18)</sup>Hier ist diese Notation noch überflüssig, denn  $V_{a,\text{ext}}$  ist nur Funktion der Ortskoordinaten des  $a$ -ten Körpers. Dagegen hängt  $V_{ab}$  von  $\vec{r}_a$  und  $\vec{r}_b$  ab, oder das in Gl. (II.18) definierte Potential  $V$  ist Funktion der Positionen aller Bestandteile des Systems, so dass die Präzisierung der Variablen, nach denen abgeleitet wird, dann nötig wird.

Beweis: Einerseits gilt unter Verwendung der Bewegungsgleichung (II.2)

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{a=1}^N \frac{dT_a}{dt} = \sum_{a=1}^N \frac{\vec{p}_a(t)}{m} \cdot \frac{d\vec{p}_a(t)}{dt} = \sum_{a=1}^N \vec{v}_a(t) \cdot \vec{F}_a, \quad (\text{II.22})$$

mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_a$  von Teilchen  $a$ . Andererseits gibt die Kettenregel

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} V(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t)) = \sum_{a=1}^N \left[ \vec{\nabla}_a V(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t)) \right] \cdot \frac{d\vec{x}_a(t)}{dt}.$$

Der Term in eckigen Klammern ist genau das Negative der Kraft auf Teilchen  $a$ , vgl. Gl. (II.19), so dass

$$\frac{dV}{dt} = - \sum_{a=1}^N \vec{F}_a \cdot \vec{v}_a(t) \quad (\text{II.23})$$

Insgesamt liefern Gl. (II.22) und (II.23) das gesuchte Ergebnis  $d(T+V)/dt = 0$ .  $\square$

**Bemerkung:** Wenn einige der Kräfte nicht-konservativ sind, gilt Gl. (II.22) immer noch. Dagegen gilt Gl. (II.23) nicht mehr, denn nicht jede Kraft  $\vec{F}_a$  lässt sich aus einem Potential ableiten. Spaltet man die Kräfte in einen konservativen und einen nicht-konservativen Anteil auf, und definiert man die gesamte potentielle Energie der ersteren, so findet man einfach, dass die Rate  $d(T+V)/dt$  der Änderung der Gesamtenergie gleich der gesamten Leistung der nicht-konservativen Kräfte ist:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \sum_{a=1}^N \vec{F}_{a,\text{diss.}} \cdot \vec{v}_a(t), \quad (\text{II.24})$$

wobei das hier verwendete Kürzel „diss.“ für *dissipative Kraft* steht, weil diese Kräfte zur nicht-Erhaltung der Energie, zu ihrer *Dissipation*, führen.

In der Praxis wird die dissipierte Energie nicht vernichtet, sondern in eine andere „nicht-mechanische“ Form umgewandelt, und zwar Wärme. Unter Berücksichtigung der letzteren bleibt die Gesamtenergie erhalten, entsprechend dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik.

## II.1.5 Schwerpunktsystem

Sei  $\Sigma$  ein Mehrteilchensystem. Als *Schwerpunktsystem* wird ein Bezugssystem  $\mathcal{B}_\Sigma^*$  bezeichnet, in welchem der Schwerpunkt von  $\Sigma$  ruht, und welches gegenüber einem Inertialsystem  $\mathcal{B}_I$  nicht rotiert. Um beide Bedingungen zu erfüllen, nimmt man oft ein Koordinatensystem in  $\mathcal{B}_\Sigma^*$  mit dem Schwerpunkt von  $\Sigma$  als Ursprungspunkt und den Achsen parallel zu denen eines Koordinatensystems von  $\mathcal{B}_I$ .

Hiernach werden die bezüglich  $\mathcal{B}_\Sigma^*$  gemessenen Größen mit Sternchen gekennzeichnet: Ortsvektor  $\vec{r}^*$ , Teilchenbahnkurven  $\vec{x}_a^*(t)$ , Impulse  $\vec{p}_a^*(t)$ , usw.

**Bemerkung:** Das Schwerpunktsystem ist nicht unbedingt ein Inertialsystem! Dies gilt nur bei abgeschlossenen Mehrteilchensystemen, die keiner resultierenden äußeren Kraft unterliegen. In solchen Fällen wird der Schwerpunkt laut der Bewegungsgleichung (II.12a) bzw. dem Schwerpunktsatz (II.12b) nicht beschleunigt.

Aus Gl. (II.5), abgeleitet nach der Zeit, und der Tatsache, dass der Schwerpunkt bezüglich  $\mathcal{B}_\Sigma^*$  ruht, folgt sofort für den Gesamtimpuls des Mehrteilchensystems

$$\vec{P}^*(t) \equiv \sum_{a=1}^N \vec{p}_a^*(t) = \vec{0}. \quad (\text{II.31})$$

Diese Beziehung kann auch als Definition des Schwerpunktsystems — das auf Englisch öfter *center-of-momentum frame* genannt wird, wobei „momentum“ = Impuls — angesehen werden.

Wird das Koordinatensystem von  $\mathcal{B}_\Sigma^*$  so gewählt, dass der Schwerpunkt von  $\Sigma$  im Nullpunkt sitzt, so gilt automatisch  $\vec{X}^*(t) = 0$  zu jeder Zeit  $t$ .

Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}^*$  eines Mehrteilchensystems  $\Sigma$  bezüglich des zugehörigen Schwerpunktsystems<sup>(20)</sup>

$$\vec{L}^*(t) \equiv \sum_{a=1}^N \vec{x}_a^*(t) \times \vec{p}_a^*(t) \quad (\text{II.32})$$

wird *Eigendrehimpuls* des Systems  $\Sigma$  genannt. Wiederum wird die gesamte kinetische Energie bezüglich  $\mathcal{B}_\Sigma^*$

$$T^* \equiv \sum_{a=1}^N \frac{\vec{p}_a^{*2}}{2m_a} \quad (\text{II.33})$$

als *innere kinetische Energie* des Systems bezeichnet.

Sei jetzt  $\mathcal{B}$  ein beliebiges Bezugssystem mit der einzigen Einschränkung, dass es gegenüber dem Schwerpunktsystem  $\mathcal{B}_\Sigma^*$  nicht rotiert. Es gelten dann zwei nach König<sup>(k)</sup> genannte Ergebnisse, und zwar

<sup>(20)</sup>... noch besser, relativ zum eigenen Schwerpunkt, indem der letztere als Ursprungspunkt genommen wird.

<sup>(k)</sup>J. S. KÖNIG, 1712–1757

**Theorem (1. Satz von König):** Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  des Systems  $\Sigma$  relativ zu einem festen Punkt in  $\mathcal{B}$ , z.B. dem Nullpunkt, ist die Summe aus dem Eigendrehimpuls  $\vec{L}^*$  des Systems und dem Drehimpuls bezüglich  $\mathcal{B}$  des Schwerpunkts von  $\Sigma$ , versehen mit der Gesamtmasse  $M$ :

$$\vec{L}(t) = \vec{L}^*(t) + \vec{X}(t) \times \vec{P}(t) \quad \text{mit} \quad \vec{P}(t) = M \frac{d\vec{X}(t)}{dt}, \quad (\text{II.34})$$

wobei  $\vec{X}(t)$  die Bahnkurve des Schwerpunkts von  $\Sigma$  relativ zu  $\mathcal{B}$  bezeichnet.

**Theorem (2. Satz von König):** Die gesamte kinetische Energie  $T$  des Systems  $\Sigma$  relativ zu  $\mathcal{B}$  ist die Summe aus der inneren kinetischen Energie  $T^*$  des Systems und der kinetischen Energie bezüglich  $\mathcal{B}$  des Schwerpunkts von  $\Sigma$ , versehen mit der Gesamtmasse  $M$ :

$$T(t) = T^*(t) + \frac{\vec{P}(t)^2}{2M}. \quad (\text{II.35})$$

Beweis: **to do!**

Diese Sätze bedeuten, dass die Bewegung eines System aus  $N$  Körpern in zwei unabhängige Anteile zerlegt werden kann, und zwar in die „innere“ Bewegung der Teilchen relativ zum Schwerpunkt des Systems und die „globale“ (Translations-)Bewegung des Schwerpunkts durch den Raum. Dementsprechend finden theoretische Untersuchungen des Systems meistens in seinem Schwerpunktsystem statt.

## II.2 Zwei-Körper-Systeme

Der Formalismus des vorigen Abschnitts kann natürlich auf den Fall eines Systems aus zwei Körpern angewandt werden. In diesem Fall treten aber einige wichtigen Vereinfachungen aus, beginnend bei den Bewegungsgleichungen, die sich oft entkoppeln (§ II.2.1). Somit können verschiedene Probleme ziemlich ausführlich behandelt werden: harmonisch gekoppelte Massen (§ II.2.2), Körper in newtonscher Gravitationswechselwirkung (§ II.2.3), oder die Streuung zweier Teilchen (§ II.2.4).

### II.2.1 Separation der Bewegungsgleichungen

#### II.2.1 a Variablen

Genau wie in § II.1.1 b) wird die Schwerpunktkoordinate definiert durch

$$\vec{X}(t) \equiv \frac{m_1 \vec{x}_1(t) + m_2 \vec{x}_2(t)}{m_1 + m_2}. \quad (\text{II.36a})$$

Da es nur zwei Körper gibt, kann man auch eine *Relativkoordinate* einführen:

$$\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t). \quad (\text{II.36b})$$

Bei dem Übergang von den Variablen  $\vec{x}_1(t)$ ,  $\vec{x}_2(t)$  zu den neuen Variablen  $\vec{X}(t)$ ,  $\vec{x}(t)$  handelt es sich um eine lineare Transformation. Die entsprechende Rücktransformation lautet

$$\vec{x}_1(t) = \vec{X}(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{x}(t), \quad \vec{x}_2(t) = \vec{X}(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{x}(t), \quad (\text{II.36c})$$

wie sich leicht nachprüfen lässt.

Für die Beschreibung der Bewegung wird es sich lohnen, die *reduzierte Masse*

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{II.37})$$

einzuführen.

### II.2.1 b Bewegungsgleichungen

Aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen [vgl. Gl. (II.2)]

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1(t)}{dt^2} &= \vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1}, \\ m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2(t)}{dt^2} &= \vec{F}_{2,\text{ext}} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

lassen sich Bewegungsgleichungen für  $\vec{X}(t)$  und  $\vec{x}(t)$  herleiten.

Erstens liefert eine Summe die Bewegungsgleichung des Schwerpunkts, und zwar

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{X}(t)}{dt^2} = \vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} \quad (\text{II.38a})$$

unabhängig von den inneren Kräften, in Übereinstimmung mit dem Schwerpunktsatz (II.12).

Andererseits ergibt sich nach Division jeder Gleichung durch die darin auftretende Masse und anschließender Subtraktion

$$\frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{1,\text{ext}}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{2,\text{ext}}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{m_2},$$

d.h. unter Verwendung des dritten newtonschen Gesetzes  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  und der reduzierten Masse (II.37)

$$\frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{1,\text{ext}}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{2,\text{ext}}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{\mu}. \quad (\text{II.38b})$$

Im Allgemeinen hängt diese Gleichung noch von den äußeren Kräften ab.

Sei jetzt angenommen, dass das Zwei-Körper-System abgeschlossen ist,  $\vec{F}_{a,\text{ext}} = \vec{0}$  für  $a = 1, 2$ . Dann vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (II.38) zu

$$\frac{d^2 \vec{X}(t)}{dt^2} = \vec{0}, \quad (\text{II.39a})$$

entsprechend der Erhaltung des Gesamtimpulses (II.12c) für ein System ohne äußere Kräfte, und

$$\mu \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1}. \quad (\text{II.39b})$$

Dabei hängt die Kraft auf der rechten Seite a priori noch von den Positionen  $\vec{x}_1(t)$ ,  $\vec{x}_2(t)$  der beiden Körper — d.h. äquivalent von  $\vec{X}(t)$  und  $\vec{x}(t)$  — und von ihren Geschwindigkeiten ab. Falls die Zweikörperkraft  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  nur Funktion von der Relativkoordinate  $\vec{x}(t)$  und von ihrer Zeitableitung ist, dann ist Gl. (II.39b) die Bewegungsgleichung eines einzelnen fiktiven Massenpunkts mit der reduzierten Masse  $\mu$ . Somit wird das ursprüngliche Zwei-Körper-Problem in zwei entkoppelte einfachere Ein-Körper-Probleme transformiert, und zwar einerseits für den Schwerpunkt, andererseits für den fiktiven Massenpunkt.

Ist die Kraft  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  nun zentral, d.h. parallel zu  $\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)$ , dann bewegt sich dieser Massenpunkt in einem Zentralkraftfeld mit Kraftzentrum in  $\vec{x}_2(t)$ . In diesem Fall ist der Drehimpuls des fiktiven Teilchens

$$\vec{\ell} = \vec{x}(t) \times \mu \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

eine Erhaltungsgröße, und man spricht von einem Zentralkraftproblem.

Die Erhaltung von  $\vec{\ell}$  lässt sich leicht beweisen: aus der Produktregel folgt

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \mu \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \times \frac{d\vec{x}(t)}{dt} + \vec{x}(t) \times \mu \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2}.$$

Der erste Term ist offensichtlich gleich  $\vec{0}$ , während der zweite dank Gl. (II.39b) das Kreuzprodukt  $\vec{x}(t) \times \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  aus zwei parallelen Vektoren, also ebenfalls gleich  $\vec{0}$ , ist.  $\square$

In den folgenden § [II.2.2](#) [II.2.4](#) werden wir Beispiele solcher Zentralkraftprobleme sehen, im Fall konservativer Kraftfelder,  $F_{2 \rightarrow 1}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \equiv \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r)$ .

**Bemerkung:** Wenn eine der Massen viel größer als die andere ist, z.B.  $m_2 \gg m_1$ , dann gelten  $\vec{X}(t) \simeq \vec{x}_2(t)$  — d.h. die Position des Schwerpunkts stimmt fast mit jener des schweren Partners überein —,  $\vec{x}_1(t) \simeq \vec{X}(t) + \vec{x}(t)$  und  $\mu \simeq m_1$  — d.h. die Eigenschaften des fiktiven Teilchens sind ähnlich denen des leichten Körpers.

### II.2.2 Gekoppelte Punktmassen

Betrachten wir als erstes Beispiel zwei Massen  $m_1, m_2$ , die über eine Feder gekoppelt sind. Es wird angenommen, dass die Bewegung der Massen eindimensional entlang der horizontalen  $x$ -Achse bleibt, und dass es keine äußere Kraft gibt.

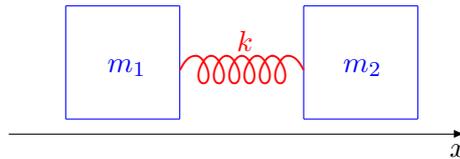


Abbildung II.1 – Gekoppelte Massen

Die Feder wird als ein *harmonischer Oszillator* modelliert, d.h. die dadurch verursachte Kraft ist proportional zur Auslenkung aus einer Ruhelänge. Somit lautet die Kraft auf Masse 1

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = k(x_2 - x_1 - \ell_0) \vec{e}_x \tag{II.40}$$

mit der Federkonstante  $k$ , der Ruhelänge  $\ell_0$  der Feder, und den Positionen  $x_1, x_2$  der Massen — die als Punktmassen zu betrachten sind.

Die Bewegungsgleichungen für  $x_1(t), x_2(t)$  lauten

$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = k[x_2(t) - x_1(t) - \ell_0], \quad m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = -k[x_2(t) - x_1(t) - \ell_0], \tag{II.41}$$

wobei das dritte newtonsche Gesetz benutzt wurde, um die Kraft  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  auszudrücken. Das Addieren der beiden Gleichungen führt zur Zeitunabhängigkeit der Schwerpunktkoordinate  $X(t)$  — wie zu erwarten war!

Aus den Gl. [\(II.41\)](#) folgt noch

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} [x_1(t) - x_2(t)] = k[x_2(t) - x_1(t) - \ell_0],$$

d.h., für die Relativkoordinate  $x(t) \equiv x_1(t) - x_2(t)$

$$\mu \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -k[x(t) + \ell_0]. \tag{II.42}$$

Das ist die Bewegungsgleichung für einen einzelnen Massenpunkt mit der reduzierten Masse  $\mu$ , der an einem Kraftzentrum harmonisch gebunden ist.

Die Lösung ist dann der Form  $x(t) = -\ell_0 + A \cos(\omega t + \varphi)$  mit  $\omega \equiv \sqrt{k/\mu}$  und zwei Konstanten  $A, \varphi$ , die durch Anfangsbedingungen festgestellt sind. Daraus erhält man über die Rücktransformation [\(II.36c\)](#) die Zeit-Ort-Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ .