# Kapitel II

# Newtonsche Mechanik: Anwendungen



In diesem Kapitel werden einige wichtigen Anwendungen des im Kap. I eingeführten newtonschen Formalismus vorgestellt.

Zuerst wird die genauere Formulierung der Bewegungsgleichungen für ein mechanisches System aus mehreren Massenpunkten unter Berücksichtigung der newtonschen Gesetze in Abschn. II.1 dargelegt. Dabei lässt sich die Bewegung in zwei Anteile zerlegen, und zwar einerseits die globale Bewegung des Systems — oder genauer seines Schwerpunkts —, andererseits die Bewegung der Teile des Systems relativ zueinander.

Danach wird der besondere Fall von Zwei-Körper-Systemen im Kap. II.2 betrachtet, wobei der entwickelte Formalismus auf einige Beispiele angewandt wird.

## II.1 Mehrteilchensysteme

Die in Abschn. I.2 eingeführten newtonschen Gesetze bzw. der in § I.2.5 gefundene Energiesatz beziehen sich auf der Bewegung eines einzigen Massenpunkts unter dem Einfluss äußerer Kräfte bzw. in einem äußeren Potential — obwohl das dritte Gesetz eigentlich schon Aufschluss über die Kräfte zwischen zwei Körpern gibt.

Im Gegensatz befasst sich dieser Abschnitt mit der Bewegung eines Systems $\Sigma$ aus $N \geq 2$ Massenpunkten, die hiernach auch als „Teilchen“ bezeichnet werden. Ein solches System wird *Mehrteilchensystem* genannt. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Massenpunkte mit Indizes $a$, $b = 1, 2, \ldots, N$ gekennzeichnet: ihre Ortsvektoren relativ zu einem festen Bezugssystem werden mit $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N \equiv \{\vec{r}_a\}_{1\leq a\leq N}$ bezeichnet; ihre Bahnkurven mit $\{\vec{x}_a(t)\}_{1\leq a\leq N}$; ihre (als konstant angenommenen) Massen mit $\{m_a\}_{1\leq a\leq N}$; ihre Impulse mit $\{\vec{p}_a(t)\}_{1\leq a\leq N}$; usw.

Als einfache Beispiele eines solchen Systems kann man entweder die Erde um die Sonne[(17)] oder zwei durch eine Feder gekoppelte Massen betrachten, entsprechend $N = 2$. Der Fall $N = 3$ kann z.B. mit dem System {Sonne + Erde + Mond} illustriert werden.[(17)] Unter Vernachlässigung des

[(17)] Dabei werden die Sonne, die Erde, der Mond, die Sternen als Punktmassen modelliert, was ziemlich sinnvoll ist, denn ihre jeweiligen Radien sind viel kleiner als ihr typischer Abstand.

interstellaren Mediums sind Galaxien Systeme aus $N \approx 10^9$–$10^{12}$ Sternen.[17] Schließlich stellen die Moleküle in einem Kubikmeter von Gas ein Beispiel mit $N \approx 10^{24}$ dar.

Die üblichen Größen zur Beschreibung eines Mehrteilchensystems, sowie die in der klassischen Mechanik üblichen Modellierung der für ein solches System relevanten Kräfte, werden in § II.1.1 dargelegt. In § II.1.2–II.1.4 werden Aussagen über die Zeitentwicklung einiger charakteristischen Größen — Impuls, Drehimpuls und Energie — hergeleitet. Insbesondere wird sich herausstellen, dass diese Größen bei Mehrteilchensystemen, die mit ihrer Umgebung nicht wechselwirken, erhalten sind, d.h. sie bleiben konstant in der Zeit. Schließlich befasst sich § II.1.5 mit dem „geeigneten" Bezugssystem, in welchem die Teilchenbewegungen entkoppelt von der globalen Bewegung des Systems sind.

## II.1.1 Grundlagen

### II.1.1 a Modellierung des Systems. Bewegungsgleichungen

Um die Bewegungsgleichung eines der Massenpunkte des Systems $\Sigma$ zu erhalten, sollte man zunächst die Kräfte auf ein solches Teilchen kennen. Der Einfachheit halber wird die Bewegung des Mehrteilchensystems in einem Inertialsystem $\mathcal{B}$ untersucht wird, so dass keine Scheinkräfte vorhanden sind. Somit wird angenommen, dass die gesamte Kraft auf Teilchen $a$ sich als

$$\vec{F}_a = \vec{F}_{a,\text{ext}} + \sum_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{N} \vec{F}_{b\to a} \tag{II.1}$$

schreiben lässt, wobei eine mögliche Zeit- oder Ortsabhängigkeit nicht geschrieben wurde. Dabei stellt $\vec{F}_{a,\text{ext}}$ die Resultierende aus den auf $a$ wirkenden *externen* Kräften dar, die auch *äußere* Kräfte genannt werden. Dieser Term beschreibt den Einfluss von Ursachen, die nicht teil vom betrachteten Mehrteilchensystem sind, wie z.B. eines Schwerefeldes, in dem die Teilchen sich befinden.

Dagegen steht $\vec{F}_{b\to a}$ für eine *innere Kraft*, und zwar für diejenige, die das $b$-te Teilchen von $\Sigma$ auf das Teilchen $a$ ausübt. Damit die Massenpunkte des Mehrteilchensystems sich gegenseitig beeinflussen, sollten diese inneren Kräfte nicht identisch Null sein.

Um Gleichungen kürzer zu machen, kann man eine innere Kraft $\vec{F}_{a\to a} \equiv \vec{0}$ definieren. Mit diesem Trick läuft z.B. die Summe in Gl. (II.1) über alle Werte von $b$ von 1 bis $N$, ohne $a$ auszuschließen.

**Bemerkung:** Die Zerlegung (II.1) enthält eigentlich eine wichtige Annahme, und zwar dass es keine Drei-Körper-Kräfte im System gibt. Das heißt, Teilchen $a$ unterliegt keiner Kraft, die durch Teilchen $b$ und $b'$ *gemeinsam* verursacht wird: der ganze Einfluss dieser beiden Teilchen auf $a$ lässt sich als Summe von Zwei-Körper-Kräften $\vec{F}_{b\to a} + \vec{F}_{b'\to a}$ beschreiben. A fortiori gibt es keine Vier-, Fünf- usw. Körper-Kräfte. Diese Annahme liegt eigentlich der ganzen newtonschen Mechanik zu Grunde, denn sie ist für das dritte Gesetz (I.19) nötig.

Laut dem zweiten newtonschen Gesetz (I.14) lautet die dynamische *Bewegungsgleichung* für jedes Teilchen $a = 1, \dots, N$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}_a(t)}{\mathrm{d}t} = m_a \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}_a(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_a = \vec{F}_{a,\text{ext}} + \sum_{b=1}^{N} \vec{F}_{b\to a} \quad \text{für jedes } a \in \{1, 2, \dots, N\}.} \tag{II.2}$$

Die $N$ vektoriellen Gleichungen (II.2) bzw. die $3N$ entsprechenden skalaren Gleichungen, die sich aus Projektion auf drei Koordinatenachsen ergeben, bilden ein System aus gekoppelten Differentialgleichungen, welche die Bewegung des Mehrteilchensystems beschreiben.

### II.1.1 b Grundbegriffe und Definitionen

Die *Gesamtmasse* des Mehrteilchensystems $\Sigma$ wird definiert als

$$M \equiv \sum_{a=1}^{N} m_a. \tag{II.3}$$

Diese Definition sieht zwar trivial aus, sie gilt aber nur als newtonsche, nicht-relativistische Näherung. Eigentlich ist die Masse eines gebundenen Systems kleiner als die Summe seiner Bestandteile — z.B. ist die Masse eines Atomkerns kleiner als die Summe der Massen dessen Protonen und Neutronen —, wobei die Differenz, der „Massendefekt“, mit der Bindungsenergie des Systems zusammenhängt.

Zur Charakterisierung der Bewegung von $\Sigma$ lohnt es sich, den *Schwerpunkt* des Mehrteilchensystems einzuführen. Dabei handelt es sich erstens um den geometrischen Punkt mit Ortsvektor

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M}\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{r}_a. \tag{II.4}$$

Entsprechend dieser Definition spricht man auch von dem *Massenmittelpunkt*. In ähnlicher Weise lautet die Bahnkurve des Schwerpunkts

$$\vec{X}(t) \equiv \frac{1}{M}\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{x}_a(t). \tag{II.5}$$

In einem zweiten Schritt kann man diesem geometrischen Schwerpunkt die Gesamtmasse $M$ des Mehrteilchensystems zuordnen, so dass als *Schwerpunkt* jetzt einen fiktiven Massenpunkt mit Ortsvektor $\vec{R}$ bzw. Trajektorie $\vec{X}(t)$ bezeichnet wird.

Addiert man die Impulse bzw. Drehimpulse aller Teilchen von $\Sigma$, so erhält man den *Gesamtimpuls*

$$\vec{P}(t) \equiv \sum_{a=1}^{N} \vec{p}_a(t) \tag{II.6}$$

bzw. den *Gesamtdrehimpuls*

$$\vec{L}(t) \equiv \sum_{a=1}^{N} \vec{x}_a(t) \times \vec{p}_a(t) \tag{II.7}$$

des Mehrteilchensystems. Dabei findet man einfach, dass der Gesamtimpuls $\vec{P}(t)$ mit der Gesamtmasse $M$ und der Geschwindigkeit $\mathrm{d}\vec{X}(t)/\mathrm{d}t$ des Schwerpunkts zusammenhängt, und zwar über

$$\vec{P}(t) = M\frac{\mathrm{d}\vec{X}(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{II.8}$$

Diese Beziehung folgt sofort aus $\vec{P}(t) = \sum_{a=1}^{N} m_a \frac{\mathrm{d}\vec{x}_a(t)}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{M}\sum_{a=1}^{N} m_a\vec{x}_a(t)\right]$. □

**Definition:** Eine Funktion $f\big(t, \{\vec{r}_a\}, \{\vec{v}_a\}\big)$ der Ortsvektoren und Geschwindigkeiten der $N$ Teilchen heißt *Erhaltungsgröße* oder *Konstante der Bewegung*, wenn sie für alle Lösungen $\{\vec{r}_a = \vec{x}_a(t)\}$, $\{\vec{v}_a = \dot{\vec{x}}_a(t)\}$ der Bewegungsgleichungen (II.2) konstant in der Zeit bleibt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(t, \{\vec{x}_a(t)\}, \{\dot{\vec{x}}_a(t)\}\big) = 0. \tag{II.9}$$

**Bemerkungen:**

∗ Der Wert der Konstanten hängt im Allgemeinen von der Lösung ab!

∗ Die Zeitableitung in Definition (II.9) ist eine totale Ableitung, nicht nur eine partielle Ableitung nach dem ersten Argument ($t$) der Funktion $f$.

## II.1.2 Bewegung des Schwerpunkts

Summiert man die individuellen Bewegungsgleichungen (II.2) über alle Teilchen bzw. alle Werte von $a$, so ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{a=1}^{N} \vec{F}_{a,\mathrm{ext}} + \sum_{a,b=1}^{N} \vec{F}_{b\to a}. \tag{II.10}$$

Unter Verwendung der Gl. (II.8) ist der linke Term dieser Gleichung einfach gleich dem Produkt aus der Gesamtmasse und der Beschleunigung des Schwerpunkts, $M\,\mathrm{d}^2\vec{X}(t)/\mathrm{d}t^2$.

Für den zweiten Term im rechten Glied von Gl. (II.10) kann man schreiben

$$\sum_{a,b=1}^{N} \vec{F}_{b\to a} = \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{N} \big(\vec{F}_{b\to a} + \vec{F}_{b\to a}\big) = \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{N} \big(\vec{F}_{b\to a} + \vec{F}_{a\to b}\big) = \vec{0}, \tag{II.11}$$

wobei die erste Gleichung trivial ist, während die zweite aus eine Umbennenung der Indizes im zweiten Summanden in den Klammern, und die dritte aus dem dritten newtonschen Axiom (I.19) folgt.

Somit führt Gl. (II.10) insgesamt zur Bewegungsgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{P}(t)}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}^2\vec{X}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{a=1}^{N} \vec{F}_{a,\mathrm{ext}}.} \tag{II.12a}$$

Diese Gleichung stellt die mathematische Formulierung des *Schwerpunktsatzes* dar:

> *Der Schwerpunkt eines $N$-Teilchensystems bewegt sich nur unter dem Einfluss der Summe der äußeren Kräfte auf die Teilchen, und zwar wie ein Massenpunkt mit der Masse $M$, an dem diese Summe angreift.* (II.12b)

Falls keine äußeren Kräfte vorliegen — d.h. für ein sog. *abgeschlossenes System*, ohne Wechselwirkung mit seiner Umgebung —, oder wenn ihre Resultierende verschwindet, dann gilt einfach $\mathrm{d}\vec{P}(t)/\mathrm{d}t = \vec{0}$, d.h. der Gesamtimpuls $\vec{P}(t)$ ist erhalten:

> *Wenn die Resultierende aller äußeren Kräfte auf ein Mehrteilchensystem $\Sigma$ verschwindet, dann ist der Gesamtimpuls von $\Sigma$ eine Erhaltungsgröße.* (II.12c)