I.4 Beschleunigte Bezugssysteme. Scheinkräfte

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass ein Bezugssystem $\mathcal{B}'$, das sich relativ zu einem Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ gleichförmig und geradlinig bewegt, oder dessen Koordinaten konstant verschoben oder gedreht gegenüber solchen von $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ sind, ebenfalls ein Inertialsystem ist.

In diesem Abschnitt wird wieder ein Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ betrachtet, in denen die newtonschen Gesetze des Abschn. I.2 gelten. Jetzt bezeichnet $\mathcal{B}'$ ein zweites Bezugssystem in *beschleunigter* Bewegung gegenüber $\mathcal{B}_\mathrm{I}$. Wie wir sehen werden ist ein solches Bezugssystem kein Inertialsystem.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass die Beobachter in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ und $\mathcal{B}'$ die gleiche Zeit $t' = t$ verwenden. Ortsvektoren bezüglich eines in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ bzw. $\mathcal{B}'$ festen Ursprungspunkts werden mit $\vec{r}$ bzw. $\vec{r}\,'$ bezeichnet. Wiederum steht $\vec{x}(t)$ bzw. $\vec{x}\,'(t') = \vec{x}\,'(t)$ für die Bahnkurve eines Massenpunkts relativ zu $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ bzw. $\mathcal{B}'$.

Sei Σ ein physikalisches System, modelliert durch einen Massenpunkt mit (träger) Masse m. Laut dem zweiten newtonschen Gesetz (I.14) gilt im Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(t), \tag{I.29}$$

wobei $\vec{F}(t)$ die (möglicherweise zeitabhängige) Resultierende der physikalischen Kräfte auf Σ bezeichnet. Im Folgenden wird die in $\mathcal{B}'$ beobachtete Beschleunigung $\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t')/\mathrm{d}t'^2 = \mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)/\mathrm{d}t^2$ für unterschiedliche Bewegungen von $\mathcal{B}'$ (relativ zu $\mathcal{B}_\mathrm{I}$) berechnet, und zwar erstens für den Fall eines linear beschleunigten Bezugssystems (§ I.4.1), dann für ein rotierendes Bezugssystem (§ I.4.2). In beiden Fällen weicht $\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)/\mathrm{d}t^2$ von der im Inertialsystem beobachteten Beschleunigung $\mathrm{d}^2\vec{x}(t)/\mathrm{d}t^2$ ab: die zusätzlichen Terme, multipliziert mit m, lassen sich aus der Sicht eines Beobachters in $\mathcal{B}'$ als auf Σ wirkende *Scheinkräfte* interpretieren.

I.4.1 Linear beschleunigte Bezugssysteme

Betrachten wir zunächst den Fall eines Bezugssystems $\mathcal{B}'$, das sich relativ zum Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ mit einer zeitabhängigen Geschwindigkeit $\vec{u}(t)$ bewegt, wobei die Richtung von $\vec{u}(t)$ konstant bleibt, so dass die Bewegung geradlinig ist. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die an $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ und

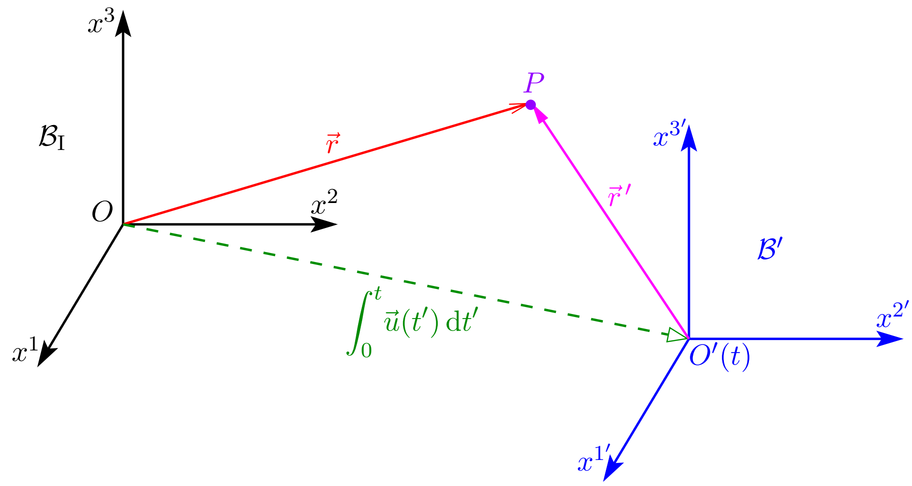

Abbildung I.5

$\mathcal{B}'$ gebundenen Beobachter Koordinatensysteme verwenden, deren Nullpunkte O, O' zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen (Abb. I.5). Dann gilt

$$\overrightarrow{OO'(t)} = \int_0^t \vec{u}(t')\,\mathrm{d}t'.$$

Dementsprechend hängen die Ortsvektoren eines bestimmten geometrischen Punkts P bezüglich der beiden Bezugssysteme über

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{r} - \int_0^t \vec{u}(t')\,\mathrm{d}t' \tag{I.30}$$

zusammen.

Zum Beispiel gilt im Fall eines konstant beschleunigten $\mathcal{B}'$: $\vec{u}(t) = \vec{a}t + \vec{u}(0)$, und somit

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \left(\frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{u}(0)t\right).$$

Die Beziehung (I.30) gilt auch zwischen den in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ und $\mathcal{B}'$ gemessenen Zeit-Ort-Funktionen $\vec{x}(t)$ und $\vec{x}'(t)$ eines Massenpunkts. Eine erste Ableitung nach der Zeit gibt dann

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} - \vec{u}(t), \tag{I.31}$$

entsprechend einem Additionstheorem für die Geschwindigkeiten. Dann ergibt eine zweite Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{I.32}$$

d.h. die in beiden Bezugssystemen gemessenen Beschleunigungen weichen von einander ab.

In Abwesenheit von physikalischen Kräften, d.h. wenn $\vec{F} = \vec{0}$, gilt im Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ laut den ersten zwei newtonschen Gesetzen $\mathrm{d}^2\vec{x}(t)/\mathrm{d}t^2 = \vec{0}$. Dagegen wird $\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)/\mathrm{d}t^2$ im Allgemeinen gemäß Gl. (I.32) ungleich Null sein: Aus der Sicht eines Beobachters im Bezugssystem $\mathcal{B}'$ hat ein bezüglich $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ ruhender, d.h. eigentlich kräftefreier, Massenpunkt die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}\,'(t) = -\dot{\vec{u}}(t)$. Dementsprechend ist $\mathcal{B}'$ *kein* Inertialsystem.

Um die mathematische Formulierung (I.14b) des zweiten newtonschen Gesetzes auch auf den Fall linear beschleunigter Bezugssystem zu verallgemeinern, soll der Beobachter in $\mathcal{B}'$ eine *Scheinkraft*

$$\vec{F}_\mathrm{Schein} \equiv -m\dot{\vec{u}}(t) \tag{I.33}$$

einführen. Dann gilt in $\mathcal{B}'$ (in Abwesenheit von physikalischen Kräften)

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_\mathrm{Schein}.$$

Wenn es dazu physikalische Kräfte $\vec{F}$ gibt, dann addieren sie sich vektoriell zu der Scheinkraft:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{Schein}}, \tag{I.34}$$

was unter Berücksichtigung des in $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$ ausgedrückten zweiten newtonschen Gesetzes genau äquivalent zur Gl. (I.32) ist.

I.4.2 Rotierende Bezugssysteme

Jetzt wird angenommen, dass das Bezugssystem $\mathcal{B}'$ gegenüber dem Inertialsystem $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$ rotiert. Dabei können sowohl die (momentane) Achse der Rotation als auch die Rotationsgeschwindigkeit von $\mathcal{B}'$ bezüglich $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$ von der Zeit abhängen. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Koordinatensysteme in $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$ den gleichen Ursprungspunkt haben.

Somit lassen sich Vektoren in $\mathcal{B}'$ aus denen bezüglich $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$ durch eine zeitabhängige Drehmatrix $\mathcal{R}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}_{\mathrm{I}}}(t) \in \mathrm{SO}(3)$ erhalten [vgl. Gl. (I.28a)]; z.B. gilt für den Ortsvektor eines Punkts

$$\vec{r}\,' = \mathcal{R}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}_{\mathrm{I}}}(t)\vec{r}. \tag{I.35a}$$

Im Folgenden wird es günstiger sein, die Bahnkurve eines Massenpunkts bezüglich $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$ durch jene relativ zu $\mathcal{B}'$ auszudrücken. Da die Drehmatrix $\mathcal{R}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}_{\mathrm{I}}}(t)$ eine orthogonale Matrix ist, ist sie automatisch invertierbar, d.h. man darf problemlos

$$\vec{r} = \left[\mathcal{R}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}_{\mathrm{I}}}(t)\right]^{-1}\vec{r}\,' \equiv \mathcal{R}(t)\vec{r}\,' \tag{I.35b}$$

schreiben, wobei die kürzere Notation $\mathcal{R}(t)$ für die inverse Drehmatrix eingeführt wurde.[13]

Diese Beziehung gilt nicht nur für den Ortsvektor, sondern für jeden Vektor. Somit gilt für die in $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$ und $\mathcal{B}'$ beobachteten Bahnkurven

$$\vec{x}(t) = \mathcal{R}(t)\vec{x}\,'(t) \tag{I.36a}$$

und gleichfalls für die Kräfte

$$\vec{F}(t) = \mathcal{R}(t)\vec{F}\,'(t), \tag{I.36b}$$

vgl. die Diskussion in § I.3.5.

[13] Es wird empfohlen, sich die etwa abstrakten Berechnungen dieses Paragraphen anhand eines Beispiels klarer zu machen. Z.B. kann man annehmen, dass $\mathcal{B}'$ mit konstanter Rotationsgeschwindigkeit ω_0 um die x^3-Achse des Koordinatensystems von $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$ rotiert. Die Beziehung zwischen den Basisvektoren der beiden Koordinatensysteme lautet dann

$$\begin{pmatrix}\vec{\mathrm{e}}_{1'}\\ \vec{\mathrm{e}}_{2'}\\ \vec{\mathrm{e}}_{3'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & 0\\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\mathrm{e}}_1\\ \vec{\mathrm{e}}_2\\ \vec{\mathrm{e}}_3\end{pmatrix}$$

oder äquivalent, nach Transposition

$$\begin{pmatrix}\vec{\mathrm{e}}_{1'} & \vec{\mathrm{e}}_{2'} & \vec{\mathrm{e}}_{3'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{\mathrm{e}}_1 & \vec{\mathrm{e}}_2 & \vec{\mathrm{e}}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) & 0\\ \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Für die Koordinaten eines Vektors in $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$ gilt [vgl. Gl. (I.35a)]

$$\begin{pmatrix}x^{1'}\\ x^{2'}\\ x^{3'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & 0\\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} \equiv \mathcal{R}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}_{\mathrm{I}}}(t)\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) & 0\\ \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{1'}\\ x^{2'}\\ x^{3'}\end{pmatrix} \equiv \mathcal{R}(t)\begin{pmatrix}x^{1'}\\ x^{2'}\\ x^{3'}\end{pmatrix}$$

wobei $\mathcal{R}(t)$ die in Gl. (I.35b) eingeführte Drehmatrix ist.

I.4.2 a Bewegungsgleichung in einem rotierenden Bezugssystem

Leitet man zunächst die Beziehung (I.36a) nach der Zeit ab, so ergibt sich unter Verwendung der Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{R}(t)}{\mathrm{d}t}\vec{x}\,'(t) + \mathcal{R}(t)\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{I.37}$$

Dabei ist $\mathrm{d}\mathcal{R}(t)/\mathrm{d}t$ die Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\mathcal{R}(t+\delta t)-\mathcal{R}(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\big[\mathcal{R}(t+\delta t)\mathcal{R}(t)^{-1}-\mathbb{1}_3\big]\mathcal{R}(t) \tag{I.38}$$

mit der 3×3-Einheitsmatrix $\mathbb{1}_3$, wobei das Produkt zweier Drehmatrizen $\mathcal{R}(t+\delta t)\mathcal{R}(t)^{-1}\equiv\mathcal{D}$ selbst eine Drehmatrix ist, die eigentlich von t und δt abhängt. Im Limes $\delta t = 0$ gilt $\mathcal{D}=\mathbb{1}_3$. Somit lässt sich $\mathcal{D}$ bei „kleinem" δt als

$$\mathcal{D} = \mathbb{1}_3 + \Omega(t)\delta t + \mathcal{O}\big((\delta t)^2\big) \tag{I.39}$$

mit einer 3×3-Matrix $\Omega(t)$ schreiben.

Genauer muss der Betrag des Produkts aus δt mit irgendeinem der Matrixelemente von $\Omega(t)$ klein gegenüber 1 sein. Bei Gl. (I.39) handelt es sich eigentlich um eine Taylor-Entwicklung, wobei $\Omega(t)$ die Ableitung von $\mathcal{D}$ nach δt bei $\delta t = 0$ ist.

Diese Näherung kann in Gl. (I.38) eingesetzt werden, woraus sich

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}(t)}{\mathrm{d}t} = \Omega(t)\mathcal{R}(t) \tag{I.40}$$

ergibt.

Da $\mathcal{D}$ eine Drehmatrix ist, gilt $\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathsf{T}} = \mathcal{D}^{\mathsf{T}}\mathcal{D} = \mathbb{1}_3$. Die Transposition der Gl. (I.39) gibt

$$\mathcal{D}^{\mathsf{T}} = \mathbb{1}_3 + \Omega(t)^{\mathsf{T}}\,\delta t + \mathcal{O}\big((\delta t)^2\big),$$

woraus $\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathsf{T}} = \mathbb{1}_3 + \big[\Omega(t)+\Omega(t)^{\mathsf{T}}\big]\delta t + \mathcal{O}\big((\delta t)^2\big)$ folgt. Dies ist gleich $\mathbb{1}_3$ bis auf Terme der Ordnung $(\delta t)^2$ oder höher vorausgesetzt

$$\Omega(t)^{\mathsf{T}} = -\Omega(t),$$

d.h. wenn $\Omega(t)$ eine antisymmetrische (d.h. schiefsymmetrische) Matrix ist. Um diese vollständig zu charakterisieren, sind nur 3 reellen Zahlen nötig, z.B. die drei Einträge $[\Omega(t)]_{12}$, $[\Omega(t)]_{13}$, $[\Omega(t)]_{23}$. Definiert man 3 Zahlen $\omega^k(t)$, $k=\{1,2,3\}$ über die Beziehung[14]

$$\omega^k(t) \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}[\Omega(t)]_{ij}, \tag{I.41}$$

so lässt sich die Matrix $\Omega(t)$ als

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3(t) & \omega^2(t) \\ \omega^3(t) & 0 & -\omega^1(t) \\ -\omega^2(t) & \omega^1(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{I.42}$$

schreiben.[15] Mit dieser Parametrisierung gilt für jeden Vektor $\vec{a}$ mit Komponenten (a^1, a^2, a^3)

$$\Omega(t)\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3(t) & \omega^2(t) \\ \omega^3(t) & 0 & -\omega^1(t) \\ -\omega^2(t) & \omega^1(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2(t)a^3-\omega^3(t)a^2 \\ \omega^3(t)a^1-\omega^1(t)a^3 \\ \omega^1(t)a^2-\omega^2(t)a^1 \end{pmatrix},$$

[14] Die umgekehrte Beziehung zur Gl. (I.41) ist $[\Omega(t)]_{ij} = -\epsilon_{ijk}\omega^k(t)$.

[15] Für das in Fußnote (13) eingeführte Beispiel gilt

$$\mathcal{D}\equiv\mathcal{R}(t+\delta t)\mathcal{R}(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0\delta t) & -\sin(\omega_0\delta t) & 0 \\ \sin(\omega_0\delta t) & \cos(\omega_0\delta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\delta t\to 0}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_0\delta t & 0 \\ \omega_0\delta t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist in diesem Fall [vgl. Gl. (I.39)]

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und der über die Parametrisierung (I.41) assoziierte Vektor ist $\vec{\omega}(t) = \omega_0\,\vec{\mathrm{e}}_3$: der Betrag $|\vec{\omega}(t)|$ ist gleich demjenigen der Rotationsgeschwindigkeit, die Richtung $\vec{\mathrm{e}}_3$ ist diejenige der Rotationsachse.

d.h.

$$\Omega(t)\vec{a} = \vec{\omega}(t) \times \vec{a}, \tag{I.43}$$

wobei $\vec{\omega}(t)$ den Vektor mit Komponenten $\big(\omega^1(t), \omega^2(t), \omega^3(t)\big)$ bezeichnet. Die physikalische Bedeutung dieses Vektors wird im § I.4.2 b diskutiert. Wie wir dort sehen wird, hat $\vec{\omega}(t)$ eine durchschaubare Interpretation, wenn er in $\mathcal{B}_{\rm I}$ „lebt", d.h. wenn die $\omega^k(t)$ seine Komponenten relativ zu einem Koordinatensystem im Inertialsystem sind.

Ersetzt man die Ableitung $\mathrm{d}\mathcal{R}(t)/\mathrm{d}t$ in Gl. (I.37) mit Hilfe von Gl. (I.40), so kommt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} &= \Omega(t)\mathcal{R}(t)\vec{x}\,'(t) + \mathcal{R}(t)\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}\\ &= \vec{\omega}(t) \times \big[\mathcal{R}(t)\vec{x}\,'(t)\big] + \mathcal{R}(t)\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t},\end{aligned} \tag{I.44}$$

wobei die zweite Gleichung aus Beziehung (I.43) folgt.

Sei jetzt $\vec{\omega}'(t) \equiv \mathcal{R}(t)^{-1}\vec{\omega}(t)$ der Vektor $\vec{\omega}(t)$ aus der Sicht eines Beobachters im rotierenden Bezugssystem $\mathcal{B}'$. Unter Verwendung der Identität

$$\big(\mathcal{R}\,\vec{a}\big) \times \big(\mathcal{R}\,\vec{b}\big) = \mathcal{R}\big(\vec{a} \times \vec{b}\big), \tag{I.45}$$

die für jede Drehmatrix $\mathcal{R}$ und jedes Paar von Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gilt, kann man jetzt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{R}(t)\left[\vec{\omega}'(t) \times \vec{x}\,'(t) + \frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}\right] \tag{I.46}$$

schreiben.

Beweis der Identität (I.45): es seien $\{a^i\}$ bzw. $\{b^i\}$ die kartesischen Koordinaten von $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ und $\mathcal{R}^{i'}{}_j$ die Matrixelemente von $\mathcal{R}$. Dann gilt für $i' = 1, 2, 3$

$$\big[\big(\mathcal{R}\,\vec{a}\big) \times \big(\mathcal{R}\,\vec{b}\big)\big]^{i'} = \epsilon^{i'}{}_{j'k'}\mathcal{R}^{j'}{}_j a^j \mathcal{R}^{k'}{}_k b^k.$$

Andererseits ist die Determinante der Drehmatrix $\mathcal{R}$ durch

$$\det\mathcal{R} = \epsilon_{\ell'j'k'}\,\mathcal{R}^{\ell'}{}_1\mathcal{R}^{j'}{}_2\mathcal{R}^{k'}{}_3$$

gegeben, wobei eigentlich $\det\mathcal{R} = 1$. Äquivalent gilt nach einer Permutation $1 \to \ell$, $2 \to j$, $3 \to k$ der Matrixspalten

$$\epsilon_{\ell jk}\det\mathcal{R} = \epsilon_{\ell'j'k'}\,\mathcal{R}^{\ell'}{}_\ell\mathcal{R}^{j'}{}_j\mathcal{R}^{k'}{}_k,$$

wobei $\epsilon_{\ell jk}$ das Signum der Permutation ist. Multipliziert man diese Gleichung mit $\mathcal{R}^{i'}{}_\ell$ und summiert man über ℓ, so kommt $\epsilon_{\ell jk}\mathcal{R}^{i'}{}_\ell = \epsilon_{\ell'j'k'}\mathcal{R}^{i'}{}_\ell\mathcal{R}^{\ell'}{}_\ell\mathcal{R}^{j'}{}_j\mathcal{R}^{k'}{}_k$. Dabei ist $\mathcal{R}^{\ell'}{}_\ell$ das $\ell'\ell$-Element der Matrix $\mathcal{R}$, d.h. auch das $\ell\ell'$-Element der transponierten Matrix $\mathcal{R}^{\mathsf{T}}$, so dass $\mathcal{R}^{i'}{}_\ell\mathcal{R}^{\ell'}{}_\ell$, mit Summe über ℓ, das $i'\ell'$-Element des Produkts $\mathcal{R}\mathcal{R}^{\mathsf{T}} = \mathbb{1}_3$ ist. Somit gilt

$$\epsilon_{\ell jk}\mathcal{R}^{i'}{}_\ell = \epsilon_{\ell'j'k'}\delta^{i'\ell'}\mathcal{R}^{j'}{}_j\mathcal{R}^{k'}{}_k = \epsilon_{i'j'k'}\mathcal{R}^{j'}{}_j\mathcal{R}^{k'}{}_k.$$

Schließlich findet man

$$\big[\big(\mathcal{R}\,\vec{a}\big) \times \big(\mathcal{R}\,\vec{b}\big)\big]^{i'} = \epsilon_{i'j'k'}\mathcal{R}^{j'}{}_j a^j\mathcal{R}^{k'}{}_k b^k = \epsilon_{\ell jk}\mathcal{R}^{i'}{}_\ell a^j b^k = \big[\mathcal{R}\big(\vec{a} \times \vec{b}\big)\big]^{i'},$$

entsprechend dem gesuchten Ergebnis. □

Das wiederholte Ableiten von Gl. (I.46) nach der Zeit unter Berücksichtigung der Produktregel liefert dann

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{R}(t)}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\omega}'(t) \times \vec{x}\,'(t) + \frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}\right] + \mathcal{R}(t)\left[\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}'(t)}{\mathrm{d}t} \times \vec{x}\,'(t) + \vec{\omega}'(t) \times \frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t^2}\right].$$

Der erste Term auf der rechten Seite lässt sich mithilfe der Gl. (I.40), (I.43) und (I.45) transformieren:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}(t)}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\omega}'(t)\times\vec{x}\,'(t)+\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}\right] &= \Omega(t)\mathcal{R}(t)\left[\vec{\omega}'(t)\times\vec{x}\,'(t)+\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}\right]\\ &= \vec{\omega}(t)\times\left\{\mathcal{R}(t)\left[\vec{\omega}'(t)\times\vec{x}\,'(t)+\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\\ &= \left[\mathcal{R}(t)\vec{\omega}'(t)\right]\times\left\{\mathcal{R}(t)\left[\vec{\omega}'(t)\times\vec{x}\,'(t)+\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\\ &= \mathcal{R}(t)\left\{\vec{\omega}'(t)\times\left[\vec{\omega}'(t)\times\vec{x}\,'(t)+\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2}=\mathcal{R}(t)\left\{\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t^2}+\vec{\omega}'(t)\times\left[\vec{\omega}'(t)\times\vec{x}\,'(t)\right]+2\vec{\omega}'(t)\times\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}'(t)}{\mathrm{d}t}\times\vec{x}\,'(t)\right\}. \tag{I.47}$$

Unter Berücksichtigung des zweiten newtonschen Gesetzes (I.29) (ausgedrückt im Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$) lässt sich der Term auf der linken Seite als $\vec{F}/m$ umschreiben. Dabei kann man $\vec{F}$ mithilfe der Gl. (I.36b) ersetzen. Nach Anwendung von $\mathcal{R}^{-1}$ auf die daraus folgende Gleichung erhält man schließlich

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t^2}=\vec{F}\,'-m\vec{\omega}'(t)\times\left[\vec{\omega}'(t)\times\vec{x}\,'(t)\right]-2m\vec{\omega}'(t)\times\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t}-m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}'(t)}{\mathrm{d}t}\times\vec{x}\,'(t).} \tag{I.48}$$

Die drei letzten Terme auf der rechten Seite sind wieder *Scheinkräfte*, die zur im Bezugssystem $\mathcal{B}'$ gemessenen Beschleunigung beitragen.

Bemerkung: Alle drei neuen Scheinkräfte in Gl. (I.48) sind proportional zur trägen Masse m, so wie die in § I.4.1 gefundene Scheinkraft in einem linear beschleunigten System. Aus diesem Grund werden Scheinkräfte auch manchmal *Trägheitskräfte* genannt.

Wegen der nach heutigem (Herbst 2022) Wissenstand gültigen Proportionalität zwischen schwerer und träger Masse ist auch die Schwerkraft proportional zu m. Daher kann die Schwerkraft zumindest mathematisch als eine Scheinkraft betrachtet werden, die sich über eine passende Wahl von Bezugssystem annullieren lässt — was die grobe Grundidee von der Allgemeinen Relativitätstheorie darstellt.

I.4.2 b Winkelgeschwindigkeit

Bevor wir die drei Scheinkräfte in Gl. (I.48) ausführlicher diskutieren, sollte die Bedeutung des darin auftretenden Vektors $\vec{\omega}'(t)$ bzw. von $\vec{\omega}(t)$ festgestellt werden. Zu diesem Zweck können wir Gl. (I.44) für den Fall eines bezüglich $\mathcal{B}'$ ruhenden Massenpunkts betrachten. Für $\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)/\mathrm{d}t=\vec{0}$ gilt nämlich

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}(t)\times\left[\mathcal{R}(t)\vec{x}\,'(t)\right]=\vec{\omega}(t)\times\vec{x}(t). \tag{I.49}$$

Das heißt, die (Rate der) Änderung des in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ gemessenen Ortsvektors $\vec{x}(t)$ ist senkrecht auf $\vec{x}(t)$ und auf den Vektor $\vec{\omega}(t)$. Diese Gleichung beschreibt eine (instantane) Rotationsbewegung bezüglich $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ um eine Achse, die durch den Ursprungspunkt des Koordinatensystems geht und entlang der Richtung von $\vec{\omega}(t)$ liegt. Dazu kann man anhand eines Beispiels[16] prüfen, dass die zugehörige Rotationsgeschwindigkeit — d.h. die Rate der Änderung des Winkels von $\vec{x}(t)$ bezüglich einer festen Richtung — genau durch den Betrag $|\vec{\omega}(t)|$ gegeben wird. Entsprechend diesen Eigenschaften heißt der Vektor $\vec{\omega}(t)$ *Winkelgeschwindigkeit*.

Bemerkung: Genauer ist die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ ein sog. *Pseudovektor* oder *axialer Vektor*, dessen Richtung von der Konvention für die Orientierung des Raums abhängt.

[16] ... wie jenes aus der Fußnote (13)! Vgl. den entsprechenden Ausdruck von $\vec{\omega}(t)$ in Fußnote (15).

Sei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ eine Orthonormalbasis des dreidimensionalen euklidischen Raums. In der üblichen Konvention wird die Rechte-Hand-Regel verwendet: wenn der Daumen bzw. der Zeigefinger der rechten Hand entlang $\vec{e}_1$ bzw. $\vec{e}_2$ zeigt, dann ist $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ entlang des Mittelfingers, und $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ist ein rechtshändiges System. Allgemeiner ist $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_1 \times \vec{c}_2)$ für jedes Paar von nicht-kollinearen Vektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ ebenfalls ein rechtshändiges System.

Mathematisch darf man auch problemlos die Linke-Hand-Regel benutzen, d.h. entscheiden, dass $\vec{c}_1 \times \vec{c}_2$ in die entgegengesetzte Richtung zeigen soll. Nun, in Gl. (I.49) hängen weder der Ortsvektor $\vec{x}(t)$ noch die Geschwindigkeit $\mathrm{d}\vec{x}(t)/\mathrm{d}t$ — die in die Richtung der Verschiebung des Ortsvektors zwischen den Zeitpunkten t und $t + \delta t$ zeigt, wenn δt klein genug ist — von der Wahl der Konvention für das Kreuzprodukt. Wenn auch $\vec{\omega}(t)$ nicht von dieser Konvention abhinge, wäre Gl. (I.49) problematisch: die linke Seite wäre unabhängig von der Konvention, die rechte Seite dagegen abhängig davon. Somit muss die Richtung von $\vec{\omega}(t)$ mit der Konvention für das Kreuzprodukt zusammenhängen.

Die „normalen“ Vektoren, wie z.B. der Ortsvektor, die nicht von der Konvention für die Orientierung des Raums abhängen, werden *polare Vektoren* genannt. Die Leserin kann sich überzeugen, dass polare Vektoren unter der Raumspiegelung $\vec{r} \to -\vec{r}$ (die ein rechtshändiges System in ein linkshändiges transformiert!) ihre Richtung umkehren, während axiale Vektoren ihre Richtung beibehalten.

I.4.2 c Zentrifugalkraft

Der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (I.48) ist die *Zentrifugalkraft*

$$\boxed{\vec{F}_{\text{zentrifugal}} \equiv -m\vec{\omega}'(t) \times \left[\vec{\omega}'(t) \times \vec{x}\,'(t)\right].} \tag{I.50}$$

Zerlegt man den Ortsvektor $\vec{x}\,'(t)$ in die Summe aus einem Vektor $\vec{x}\,'_{\parallel}(t)$ parallel zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'(t)$ und einem Vektor $\vec{x}\,'_{\perp}(t)$ senkrecht darauf, so trägt nur $\vec{x}\,'_{\perp}(t)$ zum geklammerten Kreuzprodukt bei, und man findet

$$\vec{F}_{\text{zentrifugal}} = m\left|\vec{\omega}'(t)\right|^2 \vec{x}\,'_{\perp}(t).$$

Somit ist die Zentrifugal kraft orthogonal zur Richtung der instantanen Achse der Rotationsbewegung, wie in Abb. I.6 dargestellt wird.

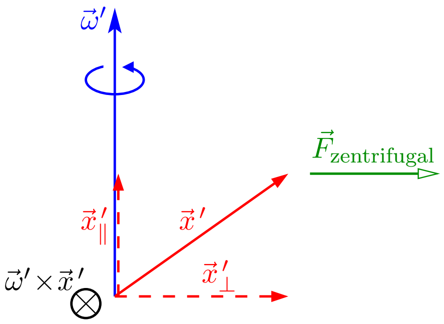

Abbildung I.6 – Zentrifugalkraft

Diese Scheinkraft wird auch durch Körper gespürt, die bezüglich des beschleunigten Bezugssystems $\mathcal{B}'$ ruhen, falls sie nicht auf der Achse der Rotationsbewegung sitzen — d.h. für $\vec{x}\,'_{\perp}(t) \neq \vec{0}$.

I.4.2 d Coriolis-Kraft

Die zweite in Gl. (I.48) auftretende Scheinkraft ist die *Coriolis*[i]*-Kraft*

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Coriolis}} \equiv -2m\vec{\omega}'(t) \times \vec{v}\,'(t),} \tag{I.51}$$

wobei $\vec{v}\,'(t) \equiv \mathrm{d}\vec{x}\,'(t)/\mathrm{d}t$ die Geschwindigkeit im nicht-Inertialsystem $\mathcal{B}'$ ist. Diese Scheinkraft ist

[i] G. Coriolis, 1792–1843

offensichtlich senkrecht sowohl auf $\vec{v}\,'(t)$ als auf $\vec{\omega}'(t)$, und wirkt nicht auf Körper, die sich parallel zur instantanen Achse der Drehbewegung bewegen.

Ein an die Erde gebundenes Bezugssystem $\mathcal{B}'$ ist wegen der Erdrotation in Drehbewegung relativ zu entfernten Galaxien. Somit erfahren Körper, die sich auf der Erde bewegen, eine Coriolis-Kraft. Diese dafür sorgt, dass horizontale Bewegungen, wie von z.B. Strömen in Ozeanen oder von Wolken, auf der Nord- bzw. Südhalbkugel nach rechts bzw. links abgelenkt werden.

I.4.2 e Euler-Kraft

Der letzte Term in Gl. (I.48) ist die *Euler*[j]*-Kraft*

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Euler}} \equiv -m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}'(t)}{\mathrm{d}t} \times \vec{x}\,'(t).} \tag{I.52}$$

Diese Scheinkraft tritt nur auf, wenn die Winkelgeschwindigkeit sich zeitlich ändert, entsprechend einer Änderung entweder der Rotationsgeschwindigkeit — d.h. des Betrags $|\vec{\omega}'(t)|$ — oder der Drehachse, oder selbstverständlich von beiden. Dabei spielt der Bewegungszustand — bewegt oder ruhend — des Körpers relativ zum beschleunigten Bezugssystem keine Rolle.

Falls die Rotationsachse konstant bleibt, so dass $\dot{\vec{\omega}}'(t)$ parallel zu $\vec{\omega}'(t)$ ist, findet man sofort, dass die Euler-Kraft tangential zur Bahnkurve des Körpers ist.

[j] L. Euler, 1707–1783