Anhang B

Drehungen

In diesem Anhang wird erstens der Zusammenhang zwischen Isometrien, insbesondere Drehungen, im euklidischen Raum und orthogonalen Matrizen, die den Gl. (B.3) genügen, präzisiert. Dann werden infinitesimale Drehungen diskutiert, wobei einige Begriffe und Ergebnisse der Gruppentheorie eingeführt und ohne Beweis verwendet werden.

Der Anhang bezieht sich auf Transformationen in einem dreidimensionalen Raum. Isometrien, orthogonale Abbildungen, Drehungen, usw. können aber auch in einem D-dimensionalen euklidischen Raum betrachtet werden. Die zugehörige Verallgemeinerung der Ergebnisse des Abschn. B.1 ist trivial, während jene des Abschn. B.2 mehr Arbeit erfordern.

B.1 Isometrien im euklidischen Raum

Definition: Eine lineare Abbildung des dreidimensionalen (affinen) euklidischen Punktraums $\mathscr{E}_3$ in sich selbst heißt *Isometrie*, wenn sie den Abstand zwischen zwei Punkten invariant lässt.

Darunter sind z.B. die Translationen sowie Transformationen mit mindestens einem Fixpunkt, wie die Drehungen oder die Punktspiegelungen.

Die Verkettung zweier Isometrien gibt wieder eine Isometrie. Da die Identitätstransformation in $\mathscr{E}_3$ selbst eine Isometrie ist, während jede Isometrie bijektiv ist — und somit eine inverse Transformation besitzt, die ebenfalls eine Isometrie ist —, bildet die Menge der Isometrien, versehen mit der Verkettung, eine Gruppe, die mit ISO(3) bezeichnet wird.

Bemerkung: Statt von Isometrien spricht man auch oft von *Bewegungen* und dementsprechend von der *Bewegungsgruppe*.[(104)]

Beschränkt man die Diskussion auf die Transformationen mit einem Fixpunkt, der als Ursprungspunkt eines kartesischen Koordinatensystems gewählt wird, so ist eine solche Isometrie äquivalent zu einer linearen Abbildung $\mathscr{O}$ im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ der Form

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \vec{x}\,' = \mathscr{O}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3, \tag{B.1}$$

die das euklidische Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{x}$ invariant lässt, d.h. $\vec{x}\,' \cdot \vec{x}\,' = \vec{x} \cdot \vec{x}$. Diese Abbildung $\mathscr{O}$ wird *orthogonale Transformation* genannt.

Da die orthogonalen Transformationen linear sind, können sie in Matrixform dargestellt werden. Gegeben sei ein System von kartesischen Koordinaten. Ordnet man den Vektoren $\vec{x}$, $\vec{x}\,'$ von $\mathbb{R}^3$ bzw. der orthogonalen Abbildung $\mathscr{O}$ die reellen dreikomponentigen Spaltenvektoren ihrer Komponenten

[(104)] Im Rahmen einer Mechanik-Vorlesung könnten diese Bezeichnungen aber verwirrend sein!

bzw. eine 3×3-Matrix zu, die ebenfalls mit $\vec{x}$, $\vec{x}\,'$ bzw. $\mathscr{O}$ bezeichnet werden, so lässt sich Gl. (B.1) als

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}\,' = \mathscr{O}\vec{x} \tag{B.2a}$$

umschreiben. Unter Verwendung der jeweiligen Koordinaten x^i, x'^i mit $i = 1, 2, 3$ der Vektoren und der Matrixelemente $\mathscr{O}^i{}_j$ mit $i, j = 1, 2, 3$ der Abbildungsmatrix $\mathscr{O}$ lautet dies auch

$$x^i \mapsto x'^i = \mathscr{O}^i{}_j x^j \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \tag{B.2b}$$

wobei die einsteinsche Summenkonvention benutzt wurde.

In Matrixdarstellung lautet das Skalarprodukt $\vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{x}$, mit $\vec{x}^{\mathsf{T}}$ dem zu $\vec{x}$ transponierten Zeilenvektor. Damit die Matrix $\mathscr{O}$ eine orthogonale Transformation darstellt, muss für jeden $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{x} = \vec{x}\,'^{\mathsf{T}}\vec{x}\,' = (\mathscr{O}\vec{x})^{\mathsf{T}}\mathscr{O}\vec{x} = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathscr{O}^{\mathsf{T}}\mathscr{O}\vec{x}$$

gelten, d.h. die Matrix muss der Eigenschaft

$$\boxed{\mathscr{O}^{\mathsf{T}}\mathscr{O} = \mathbb{1}_3} \tag{B.3a}$$

genügen, mit $\mathbb{1}_3$ der 3×3-Einheitsmatrix. Alternativ kann man

$$\boxed{\mathscr{O}^{\mathsf{T}} = \mathscr{O}^{-1}} \tag{B.3b}$$

schreiben. Umgekehrt stellt jede Matrix $\mathscr{O}$, die diese Gleichung erfüllt, eine orthogonale Transformation des dreidimensionalen Raums dar.

Eine solche Matrix wird *orthogonale* 3×3*-Matrix* genannt. Diese Matrizen bilden eine Gruppe, die sog. *orthogonale Gruppe* O(3).

Bemerkungen:

∗ Dank der Beschränkung auf Isometrien von $\mathscr{E}_3$ mit einem festen Fixpunkt ist die Korrespondenz zwischen solchen Isometrien und den Matrizen von O(3) bijektiv.

Mathematisch gesagt ist diese Korrespondenz eine sog. *lineare Darstellung* der Isometrien mit einem Fixpunkt — d.h. ein Homomorphismus von der Gruppe solcher Isometrien in die Gruppe GL($\mathscr{V}$) der Automorphismen (d.h. der bijektiven linearen Abbildungen) eines Vektorraums $\mathscr{V}$, des *Darstellungsraums*, in sich selbst. Da die O(3)-Matrizen den Automorphismen eines dreidimensionalen Vektorraums ($\mathbb{R}^3$) entsprechen, ist die Darstellung „vom Grad 3". Diese wird noch als *unitär* bezeichnet, denn die Matrizen der Darstellung sind unitär — sie sind reell und erfüllen Gl. (B.3). Schließlich ist die Darstellung *irreduzibel*, weil es keinen nicht-trivialen Unterraum des Darstellungsraums gibt, der invariant unter der Wirkung der ganzen Gruppe O(3) ist.

∗ In diesem Anhang werden *aktive* Transformationen der Vektoren betrachtet, entsprechend der eigentlichen Operation (Drehen. . .) auf ein Objekt, nicht der Änderung des Gesichtspunkts. Dementsprechend beziehen sich die Komponenten x^i, x'^i auf zwei unterschiedliche geometrische Vektoren beobachtet in demselben Koordinatensystem. Somit unterscheidet sich Gl. (B.2b) von der ersten Beziehung in Gl. (A.11), die den Zusammenhang zwischen Koordinaten eines einzigen Vektoren in zwei verschiedenen Koordinatensystemen angibt.

Bildet man die Determinante der Gleichung (B.3a), so erhält man $(\det\mathscr{O})^2 = 1$, d.h. $\det\mathscr{O} = \pm1$. Die Matrizen mit Determinante $+1$ formen die *spezielle orthogonale Gruppe* SO(3), deren Elemente, die *Drehmatrizen* — die in diesem Skript meistens mit dem Buchstaben $\mathscr{R}$ bezeichnet werden —, die dreidimensionalen Drehungen um den Ursprungspunkt darstellen. Beispielsweise entspricht der Drehung um einen Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ um die x^3-Achse die Drehmatrix

$$\mathscr{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.4}$$

Wiederum ergeben sich die Isometrien[105] mit Determinante -1 durch Komposition der Drehungen mit der *Raumspiegelung* $\vec{x} \mapsto \vec{x}\,' = -\vec{x}$, d.h. der Punktspiegelung bezüglich des Ursprungspunkts des Koordinatensystems, die der Abbildungsmatrix $-\mathbb{1}_3$ entspricht.

Bemerkung: Die Bijektivität der Korrespondenz zwischen Isometrien von $\mathscr{E}_3$ mit einem festen Fixpunkt und orthogonalen 3×3-Matrizen wird benutzt, um die letzteren ebenfalls als „Isometrien“ zu nennen. Dementsprechend werden die Matrizen von SO(3) oft als „Drehungen“ bezeichnet, obwohl sie eigentlich nur eine der möglichen Matrixdarstellungen der Drehungen sind.

B.2 Infinitesimale Drehungen

Die Resultate dieses Abschnitts werden nirgendwo in der Vorlesung benutzt. Sie lassen sich aber problemlos nachprüfen, und werden in weiteren Vorlesungen auftauchen.

Eine Drehung um den infinitesimal kleinen Winkel $\mathrm{d}\theta$ um die j-te Koordinatenachse transformiert einen Vektor $\vec{x}$ von $\mathbb{R}^3$ in

$$\vec{x}\,' = \mathcal{R}(\vec{x}) = \vec{x} + \mathrm{d}\theta\, \vec{\mathrm{e}}_j \times \vec{x} \tag{B.5a}$$

mit dem Einheitsvektor $\vec{\mathrm{e}}_j$ in Richtung j. Unter Verwendung kartesischer Koordinaten lautet diese Transformation

$$x'^k = \mathcal{R}^k{}_l\, x^l = x^k + \mathrm{d}\theta\, \epsilon^k{}_{jl}\, x^l = x^k - \mathrm{d}\theta\, \epsilon_j{}^k{}_l\, x^l, \tag{B.5b}$$

wobei $\epsilon^k{}_{jl} \equiv \delta^{ki}\epsilon_{ijl}$ bzw. $\epsilon_j{}^k{}_l \equiv \delta^{ki}\epsilon_{jil}$, d.h. numerisch $\epsilon^k{}_{jl} = -\epsilon_j{}^k{}_l = -\epsilon_{jkl}$.[106] Nach Identifikation sind die Elemente der Darstellungsmatrix $\mathcal{R}$ durch

$$\mathcal{R}^k{}_l = \delta^k_l - \mathrm{d}\theta\, \epsilon_j{}^k{}_l \tag{B.5c}$$

gegeben. Die Drehmatrix lässt sich somit als

$$\mathcal{R} = \mathbb{1}_3 - \mathrm{i}\, \mathrm{d}\theta\, \mathcal{J}_j \tag{B.5d}$$

umschreiben, wobei $\mathcal{J}_j$ eine 3×3-Matrix ist, die als *Generator* oder *Erzeuger* der Gruppe SO(3) bezeichnet ist, und deren Matrixelemente

$$(\mathcal{J}_j)^k{}_l = -\mathrm{i}\epsilon_j{}^k{}_l \tag{B.6a}$$

sind. In Matrixdarstellung lauten die drei Generatoren von SO(3)

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.6b}$$

Beispielsweise ist die Matrix einer infinitesimalen Drehung um die x^3-Achse

$$\mathcal{R} = \mathbb{1}_3 - \mathrm{i}\, \mathrm{d}\theta\, \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{d}\theta & 0 \\ \mathrm{d}\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{B.6c}$$

wobei der letzte Ausdruck auch aus einer Taylor-Entwicklung von Gl. (B.4), mit Winkel $\mathrm{d}\theta$ statt θ, bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\mathrm{d}\theta)$ folgt.

Die Matrizen (B.6b) besitzen einige wichtigen Eigenschaften. Erstens sind sie offensichtlich hermitesch.[107] Dazu prüft man einfach nach, dass die Generatoren $\mathcal{J}_j$ den Vertauschungsrelationen

$$\boxed{[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k \quad \text{für alle } i,j \in \{1,2,3\}} \tag{B.6d}$$

[105] Genauer, die durch eine orthogonale Matrix mit Determinante -1 dargestellten Isometrien.

[106] In kartesischen Koordinaten spielt die Stelle der Indizes, oben oder unten, keine Rolle. In einem System beliebiger Koordinaten wird sie aber wichtig; dann sollten die Faktoren δ^{ki} durch die Komponenten g^{ki} des inversen metrischen Tensors ersetzt werden.

[107] D.h., die komplex konjugierte Matrix $\mathcal{J}_j^*$ ist gleich der Transponierten $\mathcal{J}_j^{\mathsf{T}}$.

genügen, wobei die rechteckigen Klammer den Kommutator zweier Matrizen bezeichnet.[(108)]

Allgemein lautet die 3×3-Matrixdarstellung der infinitesimalen Drehung um den Winkel $\mathrm{d}\theta$ um die Achse mit Einheitsvektor $\vec{e}$

$$\mathscr{R} = \mathbb{1}_3 - \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathscr{J}}, \tag{B.7}$$

wobei zu beachten ist, dass das Punktprodukt $\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathscr{J}}$ eine 3×3-Matrix bezeichnet.

Eine Drehung um einen beliebigen Winkel θ kann dann als Produkt von N Drehungen um den Winkel θ/N um die gleiche Achse ausgedrückt werden. Somit erhält man die *Exponentialdarstellung*

$$\mathscr{R} = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1}_3 - \mathrm{i}\,\frac{\theta}{N}\,\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathscr{J}}\right)^N = \exp\!\left(-\mathrm{i}\theta\,\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathscr{J}}\right). \tag{B.8}$$

Bemerkungen:

∗ Die Einführung eines Faktors i in Gl. (B.5d), und entsprechend in die Matrizen $\mathscr{J}_j$ Gl. (B.6), ist zwar überraschend, denn die SO(3)-Matrizen sind reell. Dieser Faktor erlaubt aber eine einfache Verallgemeinerung auf Gruppen komplexer Matrizen.

∗ Das Minus-Zeichen in Gl. (B.8) — und in den vorigen Gleichungen — gilt für eine aktive Drehung; für eine passive Drehung, entsprechend einer Basistransformation, kommt ein Plus-Zeichen.

∗ Die Generatoren werden oft mit T_j statt $\mathscr{J}_j$ bezeichnet.

(108) $[A,B] \equiv AB - BA$.