I.3 Inertialsysteme. Galilei-Transformationen

Das erste und das zweite newtonsche Gesetz beruhen auf der Existenz von besonderen Bezugssystemen, den Inertialsystemen, in denen ein kräftefreier Massenpunkt keine Beschleunigung erfährt. Angenommen, dass ein solches Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ existiert, dann gibt es noch eine ganze Menge anderer Inertialsysteme, bestehend aus den Bezugssystemen $\mathcal{B}'$, die mit $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ über eine *Galilei-Transformation* verknüpft sind.

Sei O bzw. O' ein fester Bezugspunkt im Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ bzw. im Bezugssystem $\mathcal{B}'$. Der Ortsvektor eines geometrischen Punkts P relativ zu $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ bzw. $\mathcal{B}'$ wird mit $\overrightarrow{OP} \equiv \vec{r}$ bzw. $\overrightarrow{O'P} \equiv \vec{r}\,'$ bezeichnet. Auf ähnliche Weise können in jedem Bezugssystem unterschiedliche Zeiten t bzw. t' benutzt werden. Eine Transformation vom Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ zum Bezugssystem $\mathcal{B}'$ ist dann eine Abbildung $(t, \vec{r}) \mapsto (t', \vec{r}\,')$, wobei t' und $\vec{r}\,'$ Funktionen von t und $\vec{r}$ sind.

Sei $\vec{x}(t)$ bzw. $\vec{x}\,'(t')$ die Trajektorie eines Massenpunkts bezüglich $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ bzw. $\mathcal{B}'$. Für jede Klasse von „einfachen" Galilei-Transformationen — Translationen (§ I.3.1), Galilei-Boosts (§ I.3.2) und Drehungen (§ I.3.3) — werden wir zeigen, dass die Beschleunigungen $\mathrm{d}^2\vec{x}(t)/\mathrm{d}t^2$ im Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ und $\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)/\mathrm{d}t'^2$ im Bezugssystem $\mathcal{B}'$ gleichzeitig verschwinden. Das heißt, wenn ein Massenpunkt kräftefrei ist, dann bleibt seine Geschwindigkeit in $\mathcal{B}'$ konstant, so dass $\mathcal{B}'$ entsprechend dem ersten newtonschen Gesetz ebenfalls inertial ist.

In § I.3.4 werden allgemeine Galilei-Transformationen eingeführt. Schließlich wird das Verhalten von Kräften unter Galilei-Transformationen in § I.3.5 diskutiert.

I.3.1 Translationen

Eine erste Klasse von einfachen Transformationen $(t, \vec{r}) \mapsto (t', \vec{r}\,')$ zwischen Inertialsystemen besteht aus den Translationen, entweder im Ortsraum oder in der Zeit.

I.3.1 a Räumliche Translationen

Betrachten wir zunächst den Fall eines Bezugssystems $\mathcal{B}'$, das sich aus dem Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ durch eine räumliche Translation um einen festen Vektor $\vec{c}$ ableiten lässt. Das heißt, dass die Ortsvektoren $\vec{r}$ bzw. $\vec{r}\,'$ eines Punkts P bezüglich $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ bzw. $\mathcal{B}'$ über die Beziehung

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{c} \tag{I.24}$$

verknüpft sind (vgl. Abb. I.2). Es wird angenommen, dass die Beobachter in beiden Bezugssystemen die gleiche Zeit benutzen, d.h. $t' = t$.

Der gleiche Zusammenhang gilt für die Bahnkurven $\vec{x}(t)$ bzw. $\vec{x}\,'(t') = \vec{x}\,'(t)$ eines bewegten Massenpunkts. Somit gilt trivial nach Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t')}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

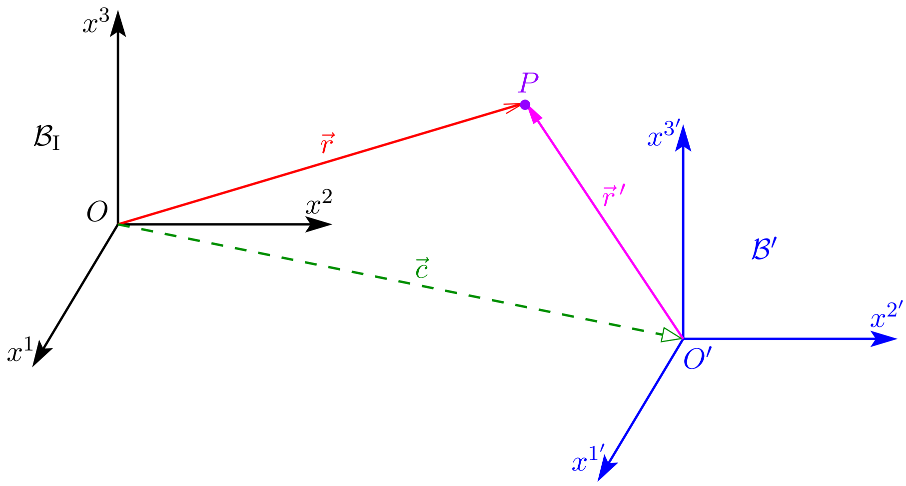

Abbildung I.2

Wenn keine Kräfte auf den Massenpunkt wirken, so dass $\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{0}$, dann ist auch $\ddot{\vec{x}}'(t') = \vec{0}$. Umgekehrt führt $\ddot{\vec{x}}'(t') = \vec{0}$ zu $\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{0}$, d.h. das erste newtonsche Gesetz (I.13) gilt genau dann in $\mathcal{B}'$, wenn es im Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ gilt.

Bemerkung: Führt man zwei Translationen (um Vektoren $\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$) hintereinander aus, so ist die resultierende Transformation ebenfalls eine Translation, und zwar um den Vektor $\vec{c}_1 + \vec{c}_2$.

I.3.1 b Translationen in der Zeit

Sei jetzt angenommen, dass das Bezugssystem $\mathcal{B}'$ bezüglich des Inertialsystems $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ ruht, und dass die gleichen Raumkoordinaten in $\mathcal{B}'$ als in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ verwendet werden, d.h. $\vec{r} = \vec{r}\,'$ für Ortsvektoren. Dagegen unterscheidet sich der in $\mathcal{B}'$ gewählte Nullpunkt der Zeit $t' = 0$ von dem Nullpunkt $t = 0$ in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ um eine Zeitverschiebung τ:

$$t' = t - \tau. \tag{I.25}$$

Dies entspricht einer zeitlichen Translation, so wie Gl. (I.24) eine räumliche Translation darstellt.

Unter Verwendung der Kettenregel gilt dann für die Zeitableitungen in jedem Bezugssystem[10]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},$$

und eine ähnliche Gleichung für die zweite Ableitungen. Insbesondere ist $\mathrm{d}^2\vec{x}(t)/\mathrm{d}t^2 = \vec{0}$ genau äquivalent zu $\mathrm{d}^2\vec{x}(t')/\mathrm{d}t'^2 = \vec{0}$.

Bemerkung: Gleichung (I.25) bedeutet nicht nur, dass die Beobachter in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ und $\mathcal{B}'$ unterschiedliche Nullpunkte der Zeit genommen haben, sondern auch, dass die Zeit gleich schnell in beiden Bezugssystemen vergeht — entsprechend der Universalität der Zeit in der newtonschen Mechanik (§ I.1.1 b). Das heißt, hier wird $t' = \alpha t - \tau$ mit $\alpha = 1$ betrachtet.

I.3.2 Eigentliche Galilei-Transformationen

Ein Bezugssystem $\mathcal{B}'$ bewege sich gegenüber dem Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{u}$. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die an $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ und $\mathcal{B}'$ gebundenen Beobachter die gleichen Zeiten $t' = t$ benutzen; dazu verwenden sie Koordinatensysteme, deren Ursprungspunkte zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen, und dessen Achsen parallel sind, wie in Abb. I.3 dargestellt wird.

[10] Die hier benutzte Notation bedeutet, dass für jede Funktion $f(t') = \varphi\big(t(t')\big)$ die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}f(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\varphi\big(t(t')\big)}{\mathrm{d}t}$$

gilt.

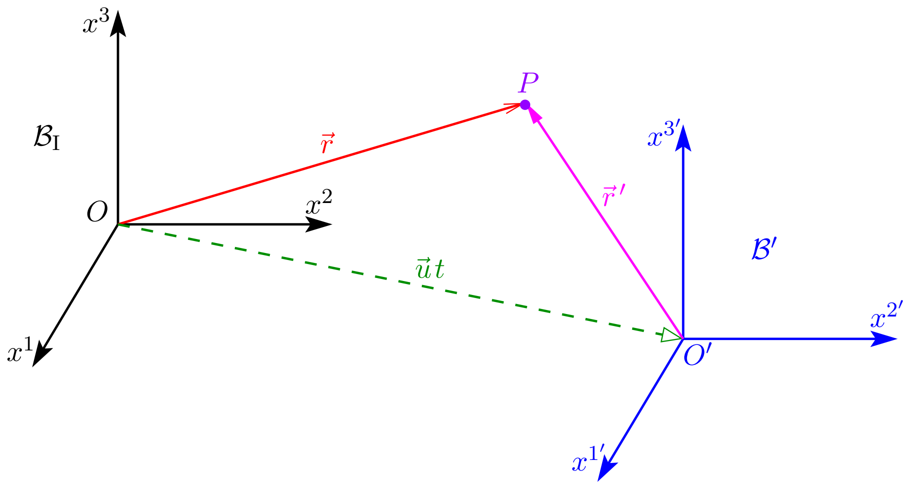

Abbildung I.3

Dann gilt für die Ortsvektoren eines bestimmten Punkts P in den beiden Bezugssystemen

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{u}\,t. \tag{I.26}$$

Eine solche Transformation nennt man *eigentliche Galilei-Transformation* oder auch *Galilei-Boost*.

Die Beziehung (I.26) führt für die Bahnkurven $\vec{x}(t)$ bzw. $\vec{x}\,'(t)$ eines bewegten Massenpunkts P sofort zu $\vec{x}\,'(t) = \vec{x}(t) - \vec{u}\,t$, und somit erstens zu

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}\,'(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\vec{x}(t) - \vec{u}\,t\big] = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} - \vec{u}, \tag{I.27}$$

wobei $t' = t$ verwendet wurde. Diese Beziehung bedeutet, dass die Beobachter in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ und $\mathcal{B}'$ einem bewegten physikalischen System unterschiedliche Geschwindigkeiten zuordnen: Gleichung (I.27) stellt das (nicht-relativistische) *Additionsgesetz von Geschwindigkeiten* dar.

Eine zweite Zeitableitung liefert dann

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t')}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2},$$

so dass die durch die beiden Beobachter gemessenen Beschleunigungen gleich sind.

Falls keine Kräfte auf P wirken, so dass $\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{0}$ in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$, dann gilt ebenfalls $\ddot{\vec{x}}'(t') = \vec{0}$ in $\mathcal{B}'$, d.h. was in einem der Bezugssysteme als kräftefrei aussieht, wird auch im anderen Bezugssystem als kräftefrei gesehen.

Bemerkung: Wie bei Translationen (im Raum oder in der Zeit) ergeben zwei hinter einander ausgeführte Galilei-Boosts mit jeweiligen „Boost-Geschwindigkeiten“ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ einen neuen Galilei-Boost mit Geschwindigkeit $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

I.3.3 Drehungen

Die letzte Klasse “einfacher“ Galilei-Transformationen besteht aus den Drehungen um jede beliebige Achse im Raum. Sei somit angenommen, dass die Beobachter in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ und $\mathcal{B}'$ Koordinatensysteme benutzen, deren Achsen gegenüber einander um einen konstanten Winkel θ um eine Richtung $\vec{e}_{\mathcal{R}}$ gedreht sind. Dagegen stimmen die Nullpunkte der Koordinatensysteme miteinander überein, und beide Beobachter benutzen die gleiche Zeit $t' = t$.

In diesem Fall lassen sich Ortsvektoren bezüglich $\mathcal{B}'$ bzw. ihre Koordinaten aus denen bezüglich $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ durch eine konstante 3×3-Drehmatrix $\mathcal{R}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}_\mathrm{I}}$ erhalten:[11]

$$\vec{r}\,' = \mathcal{R}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}_\mathrm{I}}\,\vec{r}. \tag{I.28a}$$

[11] Vgl. Anhang B über Drehmatrizen.

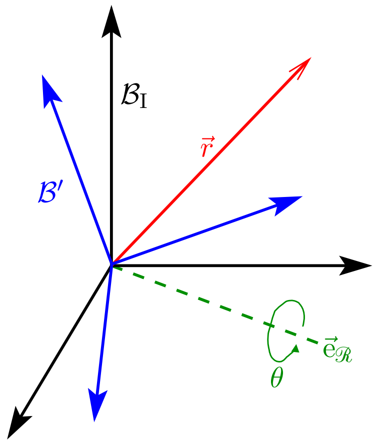

Abbildung I.4

Äquivalent lässt sich diese Beziehung komponentenweise schreiben:

$$x^{i'} = \mathscr{R}^{i'}{}_j x^j \quad \text{für } i' \in \{1,2,3\}, \tag{I.28b}$$

wobei die $\mathscr{R}^{i'}{}_j$ für $i', j \in \{1,2,3\}$ die Matrixelemente von $\mathscr{R}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}_\mathrm{I}}$ sind, während die $\{x^{i'}\}$ mit gestrichenen Indizes die Komponenten von $\vec{r}\,'$ bezeichnen.

Bemerkung: Bei der hier betrachteten Drehung — sowie bei den Translationen in § I.3.1 oder den Galilei-Boosts in § I.3.2 — handelt es sich um eine sog. *passive* Transformation: der betrachtete Massenpunkt wird gegenüber anderen Objekten nicht gedreht (was eine *aktive* Drehung wäre). Stattdessen wird der Beobachter oder äquivalent das Bezugs- bzw. Koordinatensystem, in dem der Massenpunkt beschrieben wird, gedreht.

Beziehung (I.28a) bzw. (I.28b) gilt auch für die Bahnkurve eines Massenpunkts bezüglich jedes der Bezugssysteme bzw. für die Komponenten der Bahnkurve:

$$\vec{x}\,'(t') = \mathscr{R}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}_\mathrm{I}}\, \vec{x}(t) \quad \text{bzw.} \quad x^{i'}(t') = \mathscr{R}^{i'}{}_j x^j(t) \quad \text{für } i' \in \{1,2,3\}.$$

Da diese Beziehungen linear und zeitunabhängig sind, geben sie nach zweifachen Zeitableitung unter Berücksichtigung von $t' = t$

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'(t')}{\mathrm{d}t'^2} = \mathscr{R}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}_\mathrm{I}} \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{i'}(t')}{\mathrm{d}t'^2} = \mathscr{R}^{i'}{}_j \frac{\mathrm{d}^2x^j(t)}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{für } i' \in \{1,2,3\}.$$

Somit führt $\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{0}$ zu $\ddot{\vec{x}}'(t') = \vec{0}$. Da jede Drehmatrix invertierbar ist, gilt die Implikation auch in der umgekehrten Richtung.

Bemerkung: Wie bei Translationen oder Galilei-Boosts ist das Produkt zweier Drehmatrizen, entsprechend der Verkettung der assoziierten Drehungen, wieder eine Drehmatrix. Dabei ist aber das Produkt zweier Drehmatrizen im Allgemeinen nicht-kommutativ, d.h. die Reihenfolge, in der die Drehungen aufeinander folgen, ist wichtig.

I.3.4 Allgemeine Galilei-Transformationen

Generell sind die Galilei-Transformationen $\mathcal{G}$ die linearen Abbildungen $(t, \vec{r}) \to (t', \vec{r}\,') = \mathcal{G}(t, \vec{r})$ zwischen den Zeiten und Positionen in zwei unterschiedlichen Inertialsystemen.

In § I.3.1–I.3.3 wurde gezeigt, dass räumliche und zeitliche Translationen, Galilei-Boosts und Drehungen Beispiele solcher Galilei-Transformationen sind. Allgemeiner definiert jedes „Produkt" —

d.h. Hintereinanderausführung — von Translationen im Raum oder in der Zeit, Galilei-Boosts und Drehungen eine allgemeine Galilei-Transformation. Dabei hängt die resultierende Transformation von der Reihenfolge der Transformationen ab, genau wie es schon bei Drehungen der Fall ist.

Umgekehrt kann man zeigen, dass jede Galilei-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen sich als Verkettung von Translationen, Drehungen und Galilei-Boosts zerlegen lässt.

Schließlich ist das Produkt zweier Galilei-Transformationen wieder eine Galilei-Transformation. Somit bilden diese Transformationen mit diesem Produkt mathematisch eine sog. *Gruppe*.[12]

> Dabei benutzt man auch, dass es ein „neutrales Element“ für das Produkt gibt, und zwar die Identitätstransformation, dass jeder Galilei-Transformation eine inverse Transformation zugeordnet werden kann, und schließlich dass das Produkt assoziativ ist.

Da das Ergebnis eines Produkts von der Reihenfolge der „Multiplikanden“ abhängt, wird die Gruppe als *nicht-kommutativ* oder äquivalent *nicht-abelsch*[h] bezeichnet.

Bemerkung: Die Translationen — im Raum oder in der Zeit —, die Drehungen und die Galilei-Boosts bilden jeweils Untergruppen der Galilei-Gruppe.

I.3.5 Kräfte und Galilei-Transformation

In den vorigen Paragraphen wurde nur das Verhalten des Ortsvektors und seiner Ableitungen nach der Zeit unter Galilei-Transformationen von einem Inertialsystem zu einem anderen betrachtet. Daraus folgt, dass wenn die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}(t)$ eines Massenpunkts in einem Inertialsystem $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ verschwindet, dann gilt $\ddot{\vec{x}}\,'(t) = \vec{0}$ für einen Beobachter, dessen Koordinatensystem mit demjenigen in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ über eine Galilei-Transformation zusammenhängt.

Um zu zeigen, dass das zweite newtonsche Gesetz (I.14) ebenfalls in beiden Bezugssystemen $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ und $\mathcal{B}'$ gleichzeitig gilt, soll noch das Transformationsgesetz für Kräfte präzisiert werden. Dafür soll man die Form der Kraft genauer berücksichtigen.

- Kräfte der Form $\vec{F} = F\,\vec{e}_F$ relativ zu $\mathcal{B}_\mathrm{I}$, mit konstantem Betrag F und einer festen Richtung $\vec{e}_F$ im Raum, transformieren sich unter Drehungen genau wie Ortsvektoren — indem $\vec{e}_F$ für einen Inertialbeobachter in $\mathcal{B}'$ gedreht aussieht —, während sie unter Translationen oder Galilei-Boosts invariant bleiben. Somit gilt die Gleichung $m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}$ sowohl in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ als (mit „gestrichenen“, transformierten Vektoren) in $\mathcal{B}'$.

  Ein Beispiel für eine solche Kraft ist die Schwerkraft $m\vec{g}$ in einem homogenen Schwerefeld.

- Realistische ortsabhängige Kräfte hängen nicht vom Ortsvektor des Körpers ab, auf den sie ausgeübt werden, sondern nur von seinem Abstandsvektor von einem anderen Körper. Dies ist z.B. der Fall der newtonschen Gravitationskraft zwischen zwei Massenpunkten. Dieser Abstandsvektor, und somit die Kraft, bleibt unverändert unter Translationen oder Galilei-Boosts, während es sich unter Drehungen genau wie ein Ortsvektor bzw. eine Beschleunigung verhält. Wieder gilt $m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}$ sowohl in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ als in $\mathcal{B}'$.

- Bei geschwindigkeitsabhängigen Kräften ist eine zusätzliche Fallunterscheidung nötig.
  - Bei Reibungskräften, wie z.B. bei der Stokesschen Reibung (I.15c), ist die relevante Geschwindigkeit diejenige relativ zum Ruhesystem eines Mediums — z.B. der Luft oder Flüssigkeit, durch welche der Körper sich bewegt. Diese Relativgeschwindigkeit ändert sich nicht, bis auf Änderungen der beobachteten Richtung, unter den Transformationen der § I.3.1–I.3.3, so dass die Gleichung $m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}$ die gleiche Form in $\mathcal{B}_\mathrm{I}$ und in $\mathcal{B}'$ annimmt.

[12] Diese Gruppe wird manchmal mit Gal(3) bezeichnet.

[h] N. H. Abel, 1802–1829

– Der Fall der Lorentz-Kraft ist mehr problematisch.
In Abwesenheit eines elektrischen Feldes $\vec{E}$ lautet sie $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, mit $\vec{B}$ einem statischen magnetischen Feld. Dabei ist $\vec{v}$ die Geschwindigkeit der bewegten Punktladung relativ zum Bezugssystem, in dem $\vec{E} = \vec{0}$ und $\vec{B}$ stationär ist. In Bezugssystemen, die sich relativ zu diesem Bezugssystem mit einer Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegen, nehmen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unterschiedliche Forme an, wie man im Rahmen der Elektrodynamik nachprüfen kann. Die Felder ändern sich dabei so, dass die Lorentz-Kraft, einschließlich des Terms mit $\vec{E}$, (in Betrag) invariant bleibt. Dies gilt zumindest annähernd, solange $|\vec{u}|$ „klein" ist, und zwar gegenüber der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Für entsprechende Galilei-Boosts erhält die Gleichung $m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}$ die gleiche Form im gleichförmig bewegten Bezugssystem als in einem Inertialsystem.

Eigentlich transformieren sich die Gleichungen der Elektrodynamik unter Galilei-Boosts nicht, wie sie sollten, damit Galilei-Transformationen die richtigen Transformationen zwischen Inertialsystemen darstellen.

Abgesehen vom oben erwähnten Problem mit der Lorentz-Kraft nimmt die mathematische Formulierung (I.14) des zweiten newtonschen Gesetzes die gleiche Form in allen Bezugssystemen an, die sich aus einem Inertialsystem über eine Galilei-Transformation ableiten lassen. Deshalb sind diese Bezugssysteme auch Inertialsysteme.