I.1.3 c Konservative Kräfte

Definition: Ein zeitunabhängiges Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ wird *konservativ* genannt, wenn es ein Skalarfeld[(6)] $V(\vec{r})$ gibt, das

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})} \tag{I.10}$$

erfüllt. $V(\vec{r})$ wird *Potential* oder auch (und eigentlich genauer) *potentielle Energie* genannt.

In Gl. (I.10) bezeichnet der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$, angewandt auf eine skalare Funktion auf $\mathbb{R}^3$, den *Gradienten* dieser Funktion.

Für konservative Kraftfelder hängt die durch die Kraft zwischen zwei Punkten verrichtete Arbeit nicht vom Weg ab.

Beweis: Das Resultat folgt aus

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \big[\vec{\nabla} V(\vec{x})\big] \cdot \mathrm{d}\vec{x} = -\big[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)\big] \tag{I.11}$$

unter Verwendung der Tatsache, dass $V(\vec{r})$ eine Stammfunktion von $\vec{\nabla} V(\vec{r})$ ist. □

Bemerkung: Offensichtlich ist $V(\vec{r})$ nur bis auf eine additive Konstante eindeutig. Die Letztere wird oft so gewählt, dass das Potential im Unendlichen verschwindet.

Behauptung: Sei ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$, definiert auf einem *einfach zusammenhängenden Gebiet* $\mathcal{G}$ von $\mathbb{R}^3$.[(7)] Dann ist $\vec{F}(\vec{r})$ genau dann konservativ, wenn seine Rotation in jedem Punkt von $\mathcal{G}$ verschwindet:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{G}. \tag{I.12}$$

Dass die Rotation eines konservativen Kraftfeldes null ist, folgt direkt aus der Identität

$$\vec{\nabla} \times \big[\vec{\nabla} V(\vec{r})\big] = \vec{0},$$

die sich z.B. komponentenweise beweisen lässt: die i-te Komponente (in einem kartesischen Koordinatensystem) des Terms auf der linken Seite ist $\epsilon^{ijk}\partial_j\partial_k V(\vec{r})$, wobei ϵ^{ijk} das Levi-Civita-Symbol[(c)] und ∂_ℓ die Ableitung nach der Komponenten x^ℓ des Ortsvektors ist. Dabei ist ϵ^{ijk} antisymmetrisch unter dem Austausch von j und k, während die zweite Ableitung $\partial_j\partial_k$ symmetrisch ist, so dass die Summe über alle Werte dieser Indizes Null ergibt.

Zum Beweis, dass sich ein rotationsfreies Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ als (das Negative des) Gradienten eines skalaren Potentials $V(\vec{r})$ schreiben lässt, soll man zunächst einen beliebigen Punkt $\vec{r}_0$ in $\mathcal{G}$ wählen

---

(6) D.h. eine zahlenwertige Funktion des Ortsvektors $\vec{r}$.

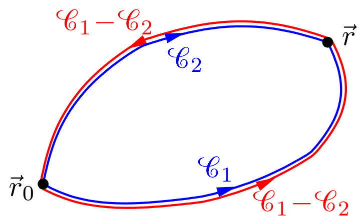
(7) Ein Gebiet wird als *einfach zusammenhängend* bezeichnet, wenn sich jeder geschlossene Weg im Gebiet stetig zu einem Punkt zusammenziehen lässt, ohne das Gebiet zu verlassen. Zum Beispiel ist eine Ebene ($\mathbb{R}^2$) einfach zusammenhängend, während $\mathbb{R}^2$ ohne einen Punkt nicht mehr einfach zusammenhängend ist.

(c) T. Levi-Civita, 1873–1941

und V durch

$$V(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,'$$

für jeden $\vec{r} \in \mathcal{G}$ definieren. Das Integral auf der rechten Seite der obigen Formel ist eindeutig definiert, wenn das Linienintegral $\int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ unabhängig vom gewählten Weg ist. Betrachte man zwei unterschiedliche Wege $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ in $\mathcal{G}$, die von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ führen. Dann definiert



$\mathscr{C}_2$ trivial einen Weg $-\mathscr{C}_2$ (mit gleicher Kurve und umgekehrter Parametrisierung) von $\vec{r}$ nach $\vec{r}_0$, und somit einen geschlossenen Weg $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2$ mit Anfangs- und Endpunkt in $\vec{r}_0$. Aus dem Satz von Stokes[d] folgt für das Wegintegral der Kraft entlang $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2$

$$\oint_{\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,' = \int_{\mathcal{S}} \big[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}\,')\big] \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}} = 0,$$

wobei $\mathcal{S}$ die durch die Kurve $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2$ abgeschlossene Fläche bezeichnet, während die letzte Gleichheit aus der Annahme $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ folgt, die in jedem Punkt von $\mathcal{S}$ gilt (dank der Annahme eines einfach zusammenhängenden Gebiets). Andererseits gilt

$$\oint_{\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,' = \int_{\mathscr{C}_1} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,' - \int_{\mathscr{C}_2} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,',$$

woraus die gesuchte Unabhängigkeit des Wegintegrals vom Weg folgt. □

I.2 Newtonsche Gesetze

Basierend auf den in Abschn. I.1 eingeführten Begriffen, insbesondere auf der Existenz absoluter Raum und Zeit, können die dynamischen Gesetze, die die Wirkung von Kräften auf mechanische Systeme bestimmen, angegeben werden. Dabei besagen diese Gesetze aber nichts über die mathematische Form der Kräfte: diese hängen von der Situation ab und sollen durch zusätzliche Theorien oder Modelle präzisiert werden.

I.2.1 Erstes newtonsches Gesetz

Das erste newtonsche Gesetz — das auch *erstes Axiom*, *lex prima* oder *Trägheitsgesetz* genannt wird — besagt die Existenz von bevorzugten Bezugssystemen, in denen der Bewegungszustand eines Körpers sich nicht ändert, so lange keine Kraft auf ihn ausgeübt wird:

Erstes newtonsches Gesetz

Es gibt besondere Bezugssysteme, sog. Inertialsysteme*, in denen ein Massenpunkt, der keiner Kraft unterliegt, in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung beharrt.* (I.13)

Anders gesagt bleibt in Inertialsystemen die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t)$ eines *kräftefreien* Massenpunkts konstant, d.h. seine Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}(t)$ verschwindet.

Bemerkungen:

∗ Eigentlich wurde dieses Prinzip schon durch Galilei[e] formuliert, weshalb es auch seinen Namen trägt. Dazu ist der obige Ausdruck des Gesetzes in der Tat nicht die ursprüngliche Formulierung,

[d] G. G. Stokes, 1819–1903 [e] G. Galilei, 1564–1642

denn es gab bei Newton keinen Bezug auf Inertialsysteme.

∗ Das Gesetz setzt die Existenz eines kräftefreien Zustands implizit voraus. In der Praxis ist dies eine Idealisierung, denn kein Körper kann von der (anziehenden) Schwerkraft der anderen Körper im Universum isoliert werden.
Was aber praktisch realisierbar ist — zumindest in sehr guter Näherung —, ist dass die Resultierende der auf ein System wirkenden Kräfte verschwindet, was sich dann als äquivalent zur Abwesenheit von Kräfte herausstellt.

∗ Auf Inertialsysteme wird in Abschn. I.3 genauer eingegangen; als solches gilt für Experimente auf der Erde ein Bezugssystem, das sich relativ zu „Fixsternen", oder besser weit entfernten Galaxien oder Quasars, nicht bewegt.

I.2.2 Zweites newtonsches Gesetz

Das zweite newtonsche Gesetz — auch *zweites Axiom*, *lex secunda* oder *Bewegungsgesetz* genannt — beschreibt die Änderung der Bewegung eines Körpers mit Impuls $\vec{p}(t)$ unter dem Einfluss einer Gesamtkraft $\vec{F}$:

Zweites newtonsches Gesetz

$$\boxed{\textit{In Inertialsystemen gilt}\quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{p}}(t) = \vec{F}.} \tag{I.14a}$$

In dieser *Bewegungsgleichung* kann der Impuls $\vec{p}(t)$ durch die Masse m und die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ des Körpers ausgedrückt werden. Wenn die Masse in der Bewegung konstant bleibt, so kann sie aus der Zeitableitung herausgezogen werden. Dann wird Gl. (I.14a) zu

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}(t) = \vec{F}.} \tag{I.14b}$$

Das heißt, die Beschleunigung des Körpers ist proportional zur Kraft, welche die Bewegung beeinflusst, und antiproportional zur Masse m.

Bemerkungen:

∗ Das erste Gesetz ist ein Spezialfall des zweiten mit $\vec{F} = \vec{0}$.

∗ Die Masse m in der Bewegungsgleichung (I.14b) ist die sog. *träge Masse* des Massenpunkts, die ein Maß für die Trägheit des letzteren gegenüber Änderungen seines Bewegungszustands darstellt. Bei der trägen Masse handelt es sich um eine universale Eigenschaft des Körpers, welche die gleiche bleibt, egal welchen Kräften er unterliegt.

∗ Im zweiten Gesetz wird implizit vorausgesetzt, dass die Kraft $\vec{F}$ auf einen Körper möglicherweise von seiner Position $\vec{x}$ und seiner Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ abhängen kann, sowie von der Zeit t, nicht aber von höheren Ableitungen.

Dank der letzteren Bemerkung stellt die vektorielle Bewegungsgleichung (I.14b) ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar. Wenn die mathematische Form der Kraft $\vec{F} = \vec{F}\big(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)\big)$ sowie Anfangsbedingungen $\vec{x}(t_0)$, $\dot{\vec{x}}(t_0)$ zu irgend einer Referenzzeit t_0 gegeben sind, dann hat dieses System eine eindeutige Lösung $\vec{x}(t)$.

Physikalisch bedeutet diese Eindeutigkeit der Lösung, dass die Kenntnis des Bewegungszustands $\big(\vec{x}(t_0), \dot{\vec{x}}(t_0)\big)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 ausreicht, um den Bewegungszustand $\big(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)\big)$ zu jedem anderen Zeitpunkt t vollständig festzustellen. Dementsprechend ist die newtonsche Mechanik völlig *deterministisch*.

Beispiel: Massenpunkt im homogenen Schwerefeld mit Luftreibung

Betrachtet sei die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse m unter dem Einfluss der Schwerkraft und einer Reibungskraft. Die Resultierende der auf ihn wirkenden Kraft lautet

$$\vec{F} = \vec{F}_{\rm S} + \vec{F}_{\rm R}, \tag{I.15a}$$

wobei das Superpositionsprinzip für Kräfte (I.20) benutzt wurde. Dabei ist die Schwerkraft

$$\vec{F}_{\rm S} \equiv m_{\rm S}\vec{g}, \tag{I.15b}$$

wobei die Schwerebeschleunigung $\vec{g}$ prinzipiell nach unten gerichtet ist[(8)] — obwohl das im Folgenden keine Rolle spielt —, während $m_{\rm S}$ die *schwere Masse* des Körpers bezeichnet. Experimentell ist die letztere proportional zur trägen Masse, $m_{\rm S} \propto m$, wie sich im berühmten Ergebnis „im Vakuum fallen alle Körper gleich“ widerspiegelt. Mit der Wahl $m_{\rm S} = m$ gilt $|\vec{g}| \simeq 9{,}8\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ auf der Erdoberfläche.

Hier werden zwei Annahmen gemacht, und zwar dass träge und schwere Masse erstens die gleiche Dimension M haben, und sich somit mit der gleichen Einheit quantifizieren lassen, und zweitens denselben numerischen Wert haben, was wiederum den Wert der Schwerkraftbeschleunigung g festlegt.

Für die Reibungskraft wird die Form der Stokes'schen Reibung

$$\vec{F}_{\rm R} \equiv -\alpha_{\rm R}\vec{v} \tag{I.15c}$$

angenommen, mit einer positiven Konstanten $\alpha_{\rm R}$. Dabei ist $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Massenpunkts relativ zum „Medium“ (z.B. Luft), das die Reibung verursacht.

Unter diesen Voraussetzungen lautet die Bewegungsgleichung (I.14b)

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\vec{g} - \alpha_{\rm R}\vec{v}(t),$$

d.h., mit $\gamma_{\rm R} \equiv \alpha_{\rm R}/m$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma_{\rm R}\vec{v}(t) = \vec{g}. \tag{I.16}$$

Somit ergibt sich eine lineare inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Ihre Lösung erfolgt wie üblich.

Zuerst wird die allgemeine Lösung $\vec{v}_{\rm h}$ der assoziierten homogenen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\rm h}(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma_{\rm R}\vec{v}_{\rm h}(t) = 0$$

gesucht, und zwar

$$\vec{v}_{\rm h}(t) = \vec{C}\,\mathrm{e}^{-\gamma_{\rm R}t}$$

mit beliebigem $\vec{C} \in \mathbb{R}^3$.

Zweitens ist eine spezielle Lösung $\vec{v}_{\rm s}$ der homogenen Differentialgleichung gebraucht:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\rm s}(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma_{\rm R}\vec{v}_{\rm s}(t) = \vec{g}.$$

Zum Beispiel kann die stationäre (d.h. zeitunabhängige) Lösung

$$\vec{v}_{\rm s}(t) = \frac{1}{\gamma_{\rm R}}\vec{g}$$

gewählt werden.

Mit deren Hilfe kann als dritter Schritt die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (I.16) als Summe aus $\vec{v}_{\rm h}(t)$ und $\vec{v}_{\rm s}(t)$ geschrieben werden:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{\rm h}(t) + \vec{v}_{\rm s}(t) = \vec{C}\,\mathrm{e}^{-\gamma_{\rm R}t} + \frac{1}{\gamma_{\rm R}}\vec{g}.$$

[(8)] Definitionsgemäß gibt die lokale Richtung der Schwerebeschleunigung die sog. Vertikale in einem Punkt.

Dabei soll noch die Integrationskonstante $\vec{C}$ festgestellt werden, was unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (hier bei $t = t_0$)

$$\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(t{=}t_0) = \vec{C}\,\mathrm{e}^{-\gamma_{\mathrm{R}} t_0} + \frac{1}{\gamma_{\mathrm{R}}}\vec{g}$$

erfolgt. Aus der letzteren Gleichung folgt

$$\vec{C} = \vec{v}_0\,\mathrm{e}^{\gamma_{\mathrm{R}} t_0} - \frac{\mathrm{e}^{\gamma_{\mathrm{R}} t_0}}{\gamma_{\mathrm{R}}}\vec{g},$$

was schließlich zur Lösung

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0\,\mathrm{e}^{-\gamma_{\mathrm{R}}(t-t_0)} + \frac{1-\mathrm{e}^{-\gamma_{\mathrm{R}}(t-t_0)}}{\gamma_{\mathrm{R}}}\vec{g} \tag{I.17}$$

führt. Physikalisch findet man, dass der Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ wegen der Reibungskraft auf einer Zeitskala $\tau_{\mathrm{R}} \equiv \gamma_{\mathrm{R}}^{-1}$ exponentiell abnimmt. Dies führt zu einem stationären Endzustand, der unabhängig von der Anfangsbedingung ist.

Wenn nötig kann man auch die Bahnkurve des Massenpunkts über

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,\mathrm{d}t'$$

bestimmen, wobei $\vec{x}_0 \equiv \vec{x}(t{=}t_0)$ die Anfangsposition bei $t = t_0$ bezeichnet, und zwar

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \frac{1-\mathrm{e}^{-\gamma_{\mathrm{R}}(t-t_0)}}{\gamma_{\mathrm{R}}}\vec{v}_0 + \frac{\gamma_{\mathrm{R}}(t-t_0) + \mathrm{e}^{-\gamma_{\mathrm{R}}(t-t_0)} - 1}{\gamma_{\mathrm{R}}^2}\vec{g}. \tag{I.18}$$

Nach Abklingen der Exponentialterme, bleibt eine annähernd lineare Funktion der Zeit, in Kontrast zur quadratischen Abhängigkeit beim reibungsfreien Fall.

Die neugierige Leserin kann den Limes $\gamma_{\mathrm{R}} \to 0$ in Gl. (I.17) und (I.18) nehmen — anhand einer Taylor-Entwicklung[(f)] der Exponentialfunktion —, um die bekannten Ergebnisse des freien Falls wiederzuentdecken.

I.2.3 Drittes newtonsches Gesetz

Das dritte newtonsche Gesetz — auch bekannt als *drittes Axiom*, *lex tertia*, *Reaktionsprinzip* oder *Actio und Reactio* — verknüpft diejenigen Kräfte, welche zwei Körper aufeinander ausüben:

Drittes newtonsches Gesetz

Die von zwei Massenpunkten aufeinander ausgeübten Kräfte haben den gleichen Betrag aber entgegengesetzte Richtungen. (I.19a)

Wenn die zwei Körper jeweils durch 1 und 2 gekennzeichnet werden, und $\vec{F}_{2\to1}$ bzw. $\vec{F}_{1\to2}$ die auf den ersten durch den zweiten bzw. auf 2 durch 1 ausgeübte Kraft bezeichnet, dann gilt

$$\boxed{\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}.} \tag{I.19b}$$

Bemerkungen:

∗ Manchmal wird das Gesetz auch *Aktion gleich Reaktion* gennant: diese Bezeichnung hat aber den Nachteil, dass sie sich nur auf die Beträge der Kräfte bezieht, was irreführend sein kann.

∗ Wie in der Bemerkung in § II.1.1 a weiter diskutiert wird, schließt dieses Gesetz implizit die Existenz von Drei-Körper-Kräften aus.

(f) B. Taylor, 1685–1731

$*$ Laut dem dritten Gesetz ist die Reaktion von Körper 2 auf Körper 1 instantan, wenn Körper 1 eine Kraft auf Körper 2 ausübt. Dies wird in der Relativitätstheorie nicht mehr möglich sein, wenn sich die Körper nicht berühren.

I.2.4 „Viertes newtonsches Gesetz"

Als viertes newtonsches Gesetz, oder *lex quarta*, wird oft das Superpositionsprinzip für Kräfte hinzugefügt, das in § I.1.3 schon dargelegt wurde:

Viertes newtonsches Gesetz

Wirken auf einen Massenpunkt mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_k$, so addieren sich diese vektoriell. (I.20a)

Das heißt, die resultierende Kraft auf den Massenpunkt ist

$$\boxed{\vec{F} \equiv \sum_{i=1}^{k} \vec{F}_k.} \tag{I.20b}$$

Es ist dann diese resultierende Kraft, die in der mathematischen Formulierung des zweiten Gesetzes (I.14) auftritt.

I.2.5 Energieerhaltung

Eine erste Folgerung der newtonschen Gesetze ist der Zusammenhang zwischen der Änderung der kinetischen Energie eines Massenpunkts und der Arbeit der auf ihn ausgeübten Kräfte.

Definition: Die *kinetische Energie* eines Massenpunkts mit Masse m und Impuls $\vec{p}$ bzw. Geschwindigkeit $\vec{v}$ wird definiert als

$$\boxed{T \equiv \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}.} \tag{I.21}$$

Bemerkung: Die physikalische Dimension bzw. die SI-Einheit einer Energie ist — wie bei einer mechanischen Arbeit! — $[E] = \mathsf{M}\,\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-2}$ bzw. das Joule[(g)] ($1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$).

Für einen Massenpunkt, der nur konservativen Kräften unterliegt, gilt der

Theorem (Energieerhaltungssatz):

Wenn alle Kräfte konservativ sind, ist die Summe $T + V \equiv E$ aus kinetischer und potentieller Energie eines Massenpunkts, entsprechend seiner Gesamtenergie, *erhalten.* (I.22)

Die Erweiterung dieses Ergebnisses auf Systeme aus mehreren Massenpunkten wird in § II.1.4 a dargelegt.

Der Satz lässt sich beweisen, indem das Integral[(9)]

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

auf zwei unterschiedliche Weisen geschrieben wird. Da die Kraft konservativ ist, ist das Integral einerseits laut Gl. (I.11) gleich $V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$.

[(9)] Die Eindeutigkeit der Definition des Integrals wurde im Beweis der Behauptung in § I.1.3 c gezeigt.

[(g)] J. P. Joule, 1818–1889

Andererseits gilt, unter Verwendung der newtonschen Bewegungsgleichung (I.14b) und der Identität $\mathrm{d}\vec{x} = \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t = \vec{p}(t)\,\mathrm{d}t/m$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{m} \frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{p}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\vec{p}(t)^2}{2} \right] \mathrm{d}t = T(t_2) - T(t_1). \tag{I.23}$$

Somit gilt $V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = T(t_2) - T(t_1)$, d.h.

$$T(t_1) + V(\vec{r}_1) = T(t_2) + V(\vec{r}_2),$$

wobei t_1 bzw. t_2 der Zeitpunkt ist, zu dem sich der Körper in $\vec{r}_1$ bzw. $\vec{r}_2$ befindet. □

In diesem Beweis bedeutet Gl. (I.23), dass die Arbeit der auf das System wirkenden Kräfte gleich der Änderung der kinetischen Energie des Systems ist.