I.1 Grundbegriffe der newtonschen Mechanik

Die Mechanik beschäftigt sich mit der Bewegung von physikalischen Systemen, d.h. mit der zeitlichen Änderung ihrer Position (und, bei ausgedehnten Systemen, ihrer Ausrichtung) im Raum. Zur genaueren Beschreibung der Bewegung müssen deshalb Modelle für die physikalischen Raum und Zeit spezifiziert werden (§ I.1.1). In § I.1.2 werden einige zusätzliche Basisdefinitionen und -Begriffe eingeführt, welche für die Formulierung der Gesetze der newtonschen Dynamik vorausgesetzt sind oder in der Beschreibung von Systemen bzw. von deren Bewegung benutzt werden. Schließlich werden mechanische Kräfte und ihre mathematische Modellierung in § I.1.3 eingeführt.

Die in diesem Abschnitt diskutierten Begriffe sind nicht auf den Rahmen der newtonschen Mechanik beschränkt, sondern bleiben ohne Änderung noch relevant in den anderen Formulierungen der klassischen Mechanik, die in Kap. III–V behandelt werden. Es sei hier schon erwähnt, dass manche Grundannahmen jenseits des nicht-relativistischen Rahmens nicht mehr erfüllt sind — wie z.B. die Absolutheit von Raum und Zeit in der relativistischen Mechanik —, während einige Begriffe an Bedeutung verlieren — beispielsweise wird die Bahnkurve in der Quantenmechanik nur als klassisches Analogon gesehen.

I.1.1 Raumzeit der newtonschen Mechanik

Nach Newton sind der Raum, in welchem physikalische Systeme sich befinden, und die Zeit, deren Vergehen die Entwicklung der Systeme erlaubt, *absolute* Größen. Das heißt, sie stellen einen allgemeinen Rahmen dar, in welchem physikalische Prozesse stattfinden, ohne durch diese Prozesse bzw. die daran beteiligten Systeme beeinflusst zu werden.

I.1.1 a Der Raum der newtonschen Mechanik

Der räumliche Rahmen der newtonschen Mechanik — und allgemeiner der nicht-relativistischen Physik — ist ein dreidimensionaler euklidischer Punktraum $\mathscr{E}_3$, hiernach oft *Ortsraum* genannt, dessen Punkte alle äquivalent sind. Dieser Raum ist statisch, er ändert sich also nicht mit der Zeit.

Dem Ort eines (als punktförmig modellierten) Systems zu einer gegebenen Zeit wird ein Punkt $P \in \mathscr{E}_3$ zugeordnet. Zur Kennzeichnung dieses Orts werden einerseits *Bezugssysteme* eingeführt, entsprechend Beobachtern, die sich möglicherweise bewegen.

Andererseits können in jedem Bezugssystem *Koordinatensysteme* eingeführt werden, mit insbesondere einem Ursprungspunkt, der in diesem Skript oft mit O bezeichnet wird. Eine wichtige Eigenschaft von euklidischen Räumen ist die Existenz von überall im Raum geltenden *kartesischen Koordinatensystemen*, bestehend aus dem Nullpunkt O und drei zueinander orthogonalen Achsen mit festen Richtungen.

Nach der Angabe des Nullpunkts eines Bezugssystems kann man den (Orts)Vektor zwischen diesem Ursprung und jedem beliebigen Punkt $P \in \mathscr{E}_3$ betrachten. Die Menge aller solcher Vektoren — die im Folgenden mit Pfeilen gekennzeichnet werden, z.B. $\vec{r}$ — bildet einen dreidimensionalen Vektorraum, auf dem eine euklidische Struktur definiert werden kann. Somit entspricht der Betrag $\|\vec{r}\| \equiv r$ des Vektors $\vec{r}$ dem Abstand zwischen seinen Endpunkten im Punktraum. Hiernach wird oft der Einheitsvektor $\vec{e}_r$ in Richtung von $\vec{r}$ benutzt, d.h. der auf 1 normierte Vektor, für welchen $\vec{r} \equiv r\,\vec{e}_r$ gilt (falls $\vec{r} \neq \vec{0}$).

Wiederum ist der euklidische Vektorraum nach Festlegung eines kartesischen Koordinatensystems isomorph zum *Koordinatenraum* $\mathbb{R}^3$ aller möglichen 3-Tupel (x^1, x^2, x^3) von Koordinaten. Diese ein-

eindeutige Beziehung wird günstig als[(4)]

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{I.1a}$$

geschrieben, was eigentlich

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x^i \, \vec{e}_i \equiv x^i \, \vec{e}_i \tag{I.1b}$$

mit den Basisvektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des Koordinatensystems bedeutet, wobei in der zweiten Gleichheit die einsteinsche Summenkonvention benutzt wird.

Für kartesische Koordinaten wird auch die Notation (x, y, z) bzw. $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ statt (x^1, x^2, x^3) bzw. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ verwendet.

Hiernach wird der Vektorraum der Ortsvektoren entweder mit $\mathscr{E}_3$ — um seine euklidische Struktur zu betonen — oder mit $\mathbb{R}^3$ — wegen der Isomorphie mit dem Koordinatenraum — bezeichnet.

I.1.1 b Die Zeit in der newtonschen Mechanik

In der nicht-relativistischen Mechanik ist die Zeit der ein kontinuierlicher eindimensionaler Parameter — so dass Zeitpunkte als Elemente von $\mathbb{R}$ modelliert werden —, der *universell* ist. Das heißt, die Zeit vergeht gleich schnell für alle Beobachter, unabhängig von ihrer Position und ihrer Bewegung. Insbesondere können zumindest prinzipiell alle Beobachter ihre jeweiligen Uhren zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 synchronisieren; dann bleiben diese Uhren auch in der Zukunft synchronisiert, d.h. wenn zwei Beobachter sich wieder treffen, zeigen ihre jeweiligen Uhren die gleiche Zeit $t_1 > t_0$, egal was ihre Bewegungen in der Zwischenzeit waren.

Bemerkung: Diese Synchronisierungseigenschaft gilt nicht mehr im relativistischen Kontext.

I.1.2 Beschreibung von mechanischen Systemen und ihrer Bewegung

I.1.2 a Idealisierte Systeme

Die Mechanik befasst sich nicht nur mit realistischen physikalischen Systemen, sondern auch mit Idealisierungen, deren Bewegung viel einfacher zu beschreiben und bestimmen ist.

Das einfachste solche Modell ist der *Massenpunkt* oder *Punktmasse*: dabei handelt es sich um einen punktförmigen Gegenstand, ohne innere Struktur, der nur eine Eigenschaft besitzt, und zwar seine Masse m.

> Die Bewegung eines physikalischen Körpers lässt sich mit diesem Modell gut beschreiben, wenn die Ausdehnung des Körpers für das betrachtete Problem irrelevant ist.

Ist der Massenpunkt neben seiner Masse m noch mit einer elektrischen Ladung q versehen, so dass es in einem elektromagnetischen Feld einer entsprechenden Kraft unterliegt, dann spricht man von einer *Punktladung*

Bemerkung: Wie in § I.2.2 weiter diskutiert wird, handelt es sich bei der hier mit m bezeichneten Größe um die *träge Masse* des Massenpunkts bzw. der Punktladung.

Ein weiteres idealisiertes Modell, und zwar jetzt für einen physikalischen Körper, dessen Ausdehnung eine Rolle spielt, ist das des *starren Körpers*, der Thema des Abschn. IV.2 sein wird.

I.1.2 b Kinematische Größen

Die zeitliche Reihenfolge der sukzessiven Positionen eines (Massen)Punkts im Ortsraum bildet seine *Bahnkurve* oder *Trajektorie*. Unter Betrachtung der Vektorraum-Struktur des Ortsraums kann

[(4)] Hier steht das Gleichheitszeichen für „wird dargestellt durch“.

diese Bahnkurve als eine Funktion $\vec{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathscr{E}_3$ angesehen werden — oder äquivalent, nach Angabe eines Koordinatensystems, als eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung: Mathematisch genauer sollte man zwischen der Trajektorie — was im engeren Sinne die geometrische Kurve in $\mathscr{E}_3$ oder $\mathbb{R}^3$ bezeichnet — und der *Zeit-Ort-Funktion* $\vec{x}(t)$ unterscheiden, wobei die letztere die Parametrisierung der Kurve — mathematisch ein *Weg* — durch die Zeit t ist. In der Tat kann die Position auf einer Bahnkurve nicht nur durch die Zeit, sondern durch andere Parameter parametrisiert werden, wie es im Beispiel 1 des § I.1.3 b der Fall sein wird.

Gegeben die durch die Zeit parametrisierte Bahnkurve $\vec{x}(t)$ eines Massenpunkts, ist dessen instantane *Geschwindigkeit* zur Zeit t die Rate der Änderung der Zeit-Ort-Funktion zu diesem Zeitpunkt, d.h.

$$\boxed{\vec{v}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{x}}(t),} \tag{I.2}$$

wobei hier und im Folgenden der Überpunkt eine zeitliche Ableitung darstellt. Dabei ist der Vektor $\vec{v}(t)$ einen Tangentialvektor zur Bahnkurve im Punkt $\vec{x}(t)$. Die physikalische Dimension der Geschwindigkeit ist $[v] = \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}$, wobei L für Länge und T für Zeit (time) steht; dementsprechend ist die Einheit im SI-System der $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Wiederum ist die *Beschleunigung* des Massenpunkts als die zweite Ableitung der Zeit-Ort-Funktion nach der Zeit definiert

$$\boxed{\vec{a}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{v}}(t),} \tag{I.3}$$

mit physikalischer Dimension bzw. SI-Einheit $[a] = \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}$ bzw. $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Schließlich wird der *(kinetische) Impuls* des Massenpunkts als das Produkt aus seiner Masse und Geschwindigkeit definiert

$$\boxed{\vec{p}(t) \equiv m\vec{v}(t),} \tag{I.4}$$

während sein *Drehimpuls* bezüglich des Nullpunkts $\vec{r} = \vec{0}$ des Bezugssystems das Kreuzprodukt aus Ortsvektor und Impuls ist

$$\boxed{\vec{L}(t) \equiv \vec{x}(t) \times \vec{p}(t).} \tag{I.5}$$

Die jeweiligen physikalischen Dimensionen und SI-Einheiten sind $[p] = \mathsf{M}\,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}$, in $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, und $[L] = \mathsf{M}\,\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$ mit Einheit $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$, wobei M für Masse steht.

I.1.3 Mechanische Kräfte

Erfahrungsgemäß spiegeln Änderungen des Bewegungszustands eines physikalischen Körpers die Wirkung von äußeren Ursachen wider, welche (mechanische) *Kräfte* heißen. Diese werden hiernach allgemein mit dem Zeichen F bezeichnet. Die physikalische Dimension einer Kraft ist $[F] = \mathsf{M}\,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}$ und die zugehörige SI-Einheit ist das Newton, wobei $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Nach der Einführung der mathematischen Modellierung von mechanischen Kräften (§ I.1.3 a) wird die sog. Arbeit einer Kraft entlang einer Wegstrecke definiert (§ I.1.3 b). In vielen Situationen hängt diese Arbeit nur von den Endpunkten der zurückgelegten Strecke ab; in solchen Fällen entspricht die durch die Kraft verrichtete Arbeit (dem Negativen) der Änderung der potentiellen Energie des Systems (§ I.1.3 c).

Bemerkung: Neben den „wirksamen“ Kräften, die zu einer Beschleunigung führen — wie z.B. die für den freien Fall eines Körpers verantwortliche Schwerkraft —, gibt es auch Kräfte, deren „Rolle“ darin besteht, die möglichen Bewegungen einzuschränken. Ein Beispiel davon ist die durch einen

Tisch auf einen Körper ausgeübte Kraft, die zusammen mit der Schwerkraft dazu führt, dass die Bewegung des Körpers unter dem Einfluss anderer Kräfte in der Tischebene bleibt. Solche Kräfte werden oft als *Zwangskräfte* bezeichnet.

I.1.3 a Mathematische Modellierung

Neben ihrem Betrag hat eine Kraft erfahrungsgemäß auch eine Richtung: somit ist die Schwerkraft auf einen Körper an der Erdoberfläche „nach unten“, Reibungskräfte sind „entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung“[5], usw. Dementsprechend werden Kräfte in der newtonschen Mechanik durch dreidimensionale Vektoren $\vec{F}$ dargestellt.

Diese Modellierung durch Vektoren geht mit einer wichtigen Eigenschaft einher, und zwar mit einem *Superpositionsprinzip*. Laut dem letzteren sind Kräfte in der newtonschen Mechanik additiv, d.h. wenn zwei unterschiedliche Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ auf einen Körper wirken, dann ist ihre Resultierende durch die Summe $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ gegeben. Dank der Vektorraum-Struktur ist diese Summe wieder ein Vektor, d.h. kann eine Kraft darstellen.

> Dieses Superpositionsprinzip gilt nicht mehr im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Wie wir unten weiter sehen werden — vgl. der dritten Bemerkung nach Gl. (I.14b) —, kann die mathematische Form der Kraft auf einen bewegten Körper in den üblichen Fällen eine Funktion der Zeit t, der Position $\vec{x}(t)$ und der Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t)$ des Körpers sein, d.h. $\vec{F} = \vec{F}\big(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)\big)$. Falls $\vec{F}$ nicht von der Geschwindigkeit abhängt, sondern nur vom Ort (und von der Zeit), wird $\vec{F}(t, \vec{r})$ *Kraftfeld* genannt.

Sei $\vec{F}$ eine Kraft. Das zugehörige *Drehmoment* bezüglich eines Bezugspunkts O wird definiert als

$$\vec{\mathcal{M}} \equiv \vec{r} \times \vec{F}, \tag{I.6}$$

wobei $\vec{r}$ der Abstandsvektor von O zum Angriffspunkt der Kraft ist

I.1.3 b Arbeit einer Kraft

Wird die Wirkung einer Kraft über ein Zeitintervall — oder genauer über die Strecke, welche das mechanische System in diesem Zeitintervall zurücklegt — passend integriert, so ergibt sich die Arbeit der Kraft.

Definition: Die durch eine Kraft $\vec{F}$ geleistete *Arbeit* in der Verschiebung eines Körpers um das infinitesimale Wegelement $\mathrm{d}\vec{\ell}$ entlang seiner Bahnkurve ist

$$\boxed{\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.} \tag{I.7a}$$

> Die hier verwendete Notation $\mathrm{d}W$ ist relativ standard, bedeutet aber nicht, dass $\mathrm{d}W$ das totale Differential einer Funktion W ist — was nur gilt, wenn $\vec{F}$ konservativ ist, s. § I.1.3 c. Eine bessere Notation wäre δW, wie in der Thermodynamik oder der Statistischen Mechanik üblich ist.

Aus Gl. (I.7a) folgt die Arbeit einer Kraft entlang einer endlichen Wegstrecke $\mathscr{C}$, indem die elementaren Beiträge entlang infinitesimaler Wegelemente summiert werden. Daraus ergibt sich ein Kurvenintegral entlang des Wegs $\mathscr{C}$:

$$\boxed{W = \int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.} \tag{I.7b}$$

Die physikalische Dimension der Arbeit einer Kraft ist $[W] = \mathsf{M}\,\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-2}$.

Zur Berechnung des Kurvenintegral in Gl. (I.7b) muss man in der Praxis eine Parametrisierung des Wegs $\mathscr{C}$ einführen. Oft, aber nicht unbedingt, kann die Zeit t als Parameter benutzt werden.

[5] Genauer, zur lokalen Bewegungsrichtung im Punkt wo die Reibungskraft wirkt.

Dann lässt sich $\mathscr{C}$ genau durch die Zeit-Ort-Funktion $\vec{x}(t)$ für $t \in [t_1, t_2]$ beschreiben, und das infinitesimale Wegelement im Kurvenintegral ist $\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t$. Somit lautet die Arbeit entlang dem Weg $\mathscr{C}$

$$W = \int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}W = \int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \tag{I.8}$$

und das Kurvenintegral wird zu einem gewöhnlichen Integral. Dabei ist das Produkt $\vec{F} \cdot \vec{v}(t)$ die (instantane) *Leistung* der Kraft.

Beispiel 1:

Betrachte man die 2-dimensionale Bewegung (unter irgendeinem nicht-spezifizierten Einfluss) eines Massenpunkts, welcher der Kraft

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} ay \\ b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix}$$

mit Konstanten a, b unterliegt. Der Massenpunkt bewegt sich von einem Ausgangspunkt O mit Koordinaten $(x=0, y=0)$ zu einem Endpunkt P mit $(x=L, y=L)$. Wir wollen die Arbeit von $\vec{F}$ entlang zwei unterschiedlicher Wege $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ von O nach P berechnen.

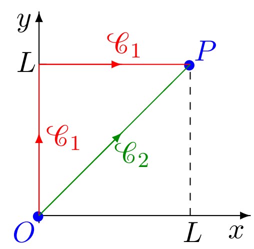

Abbildung I.1

Die Kurve $\mathscr{C}_1$ besteht aus zwei geraden Linienelementen mit $x = 0$, $0 \leq y \leq L$ bzw. $y = L$, $0 \leq x \leq L$. Somit lässt sich das Kurvenintegral entlang $\mathscr{C}_1$ als Summe von zwei einfachen Integralen schreiben:

$$W_1 = \int_{\mathscr{C}_1} \mathrm{d}W = \int_{\mathscr{C}_1} \vec{F}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_O^I \vec{F}(x=0,y) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_I^P \vec{F}(x,y=L) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell},$$

mit dem Punkt I mit Koordinaten $(x=0, y=L)$. Entlang des Linienelements von O nach I bzw. von I nach P kann man für $\mathscr{C}_1$ einfach y bzw. x als Parameter benutzen, was zu

$$W_1 = \int_0^L F_y(x=0,y)\,\mathrm{d}y + \int_0^L F_x(x,y=L)\,\mathrm{d}x$$

führt. Ersetzt man die Komponenten F_x, F_y durch ihre Ausdrücke, so kommt

$$W_1 = \int_0^L b\,\mathrm{d}y + \int_0^L aL\,\mathrm{d}x = bL + aL^2.$$

Wiederum lässt sich die Kurve $\mathscr{C}_2$ als

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s)=s \\ y(s)=s \end{pmatrix}$$

mit $s \in [0, L]$ parametrisieren; dann gilt $\mathrm{d}\vec{\ell} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}s$.

Dies gibt für die Arbeit von $\vec{F}$ entlang $\mathscr{C}_2$

$$W_2 = \int_{\mathscr{C}_2} \mathrm{d}W = \int_0^L \vec{F}\big(x(s), y(s)\big) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s.$$

Indem man das Skalarprodukt explizit schreibt, kommt

$$W_2 = \int_0^L (as + b)\,\mathrm{d}s = \left[\frac{as^2}{2} + bs\right]_0^L = \frac{aL^2}{2} + bL.$$

Somit ist $W_2 \neq W_1$: die Arbeit der Kraft $\vec{F}$ zwischen zwei Punkten hängt vom gewählten Weg ab.

Beispiel 2: Lorentz-Kraft

Eine bewegte Punktladung in einem Magnetfeld $\vec{B}$ — in Abwesenheit von elektrischem Feld — unterliegt der Lorentz-Kraft[b]

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{I.9}$$

Diese Kraft ist immer senkrecht zur Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Punktladung. Setzt man diese Kraft in Gl. (I.8) ein,

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \big[q\vec{v}(t) \times \vec{B}\big] \cdot \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t,$$

so findet man sofort, dass die Lorentz-Kraft keine Arbeit verrichtet, denn das Integrand ist null.

[b] H. A. Lorentz, 1853–1926