IX.5.3 Multipolentwicklung

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen können zuerst auf den Fall von periodisch oszillierenden Quellen angewandt werden zwar

$$\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = \operatorname{Re}\Big[\rho_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big] \quad , \quad \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = \operatorname{Re}\Big[\vec{\jmath}_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big] \tag{IX.66}$$

mit gegebenen Amplituden ρ_0, $\vec{\jmath}_0$. Dann gilt

$$\frac{\partial\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = \operatorname{Re}\Big(\big[-\mathrm{i}\omega\rho_0(\vec{r}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}_0(\vec{r})\big]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big).$$

Laut der Kontinuitätsgleichung (IX.7) ist die linke Seite dieser Gleichung gleich Null, was nur dann möglich ist, wenn der Term in rechteckigen Klammern verschwindet, d.h.

$$-\mathrm{i}\omega\rho_0(\vec{r}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}_0(\vec{r}) = 0. \tag{IX.67}$$

Mit der elektrischen Ladungsstromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ der Gl. (IX.66) wird das retardierte Vektorpotential (IX.64b) zu

$$\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) = \operatorname{Re}\left[\frac{\mu_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{4\pi}\int\vec{\jmath}_0(\vec{r}\,')\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\right]. \tag{IX.68}$$

Sei angenommen, dass die Ladungsstromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ innerhalb eines Gebiets $\mathcal{V}$ in der Umgebung des Nullpunkts $\vec{r}\,' = \vec{0}$ lokalisiert ist, und dass sie am Rand $\partial\mathcal{V}$ des Gebiets verschwindet.

Das elektromagnetische Feld wird in einem „weit entfernten“ Punkt $\vec{r}$ untersucht, d.h. $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$ gilt für jeden Punkt $\vec{r}\,' \in \mathcal{V}$. Dementsprechend darf man in erster Näherung $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ durch $r \equiv |\vec{r}|$ in Gl. (IX.68) ersetzen; daraus folgt

$$\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) \simeq \operatorname{Re}\left[\frac{\mu_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-r/c)}}{4\pi r}\int_{\mathcal{V}}\vec{\jmath}_0(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\right]. \tag{IX.69}$$

Zur Berechnung des Terms in eckigen Klammern kann man das Integral

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x'^k} \big[x'^l j_0^k(\vec{r}\,')\big]\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

betrachten. Es lässt sich einerseits direkt integrieren, denn der Integrand eine Ableitung ist: da $j_0(\vec{r}\,') = 0$ für $\vec{r}\,' \in \partial\mathcal{V}$ ist das Integral gleich Null. Andererseits kann man die Produktregel verwenden, woraus sich

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x'^k} \big[x'^l j_0^k(\vec{r}\,')\big]\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \int_{\mathcal{V}} \sum_{k=1}^{3} \left[\delta^{kl} j_0^k(\vec{r}\,') + x'^l \frac{\partial j_0^k(\vec{r}\,')}{\partial x'^k}\right] \mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \int_{\mathcal{V}} \Big[j_0^l(\vec{r}\,') + x'^l \vec{\nabla}_{\vec{r}\,'} \cdot \vec{j}_0(\vec{r}\,')\Big]\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

ergibt, mit dem Gradient $\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}$ bezüglich der Komponenten von $\vec{r}\,'$. Daher gilt

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{j}_0(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = -\int_{\mathcal{V}} \vec{r}\,'\big[\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'} \cdot \vec{j}_0(\vec{r}\,')\big]\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

Aus der Beziehung (IX.67) folgt dann

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{j}_0(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = -\mathrm{i}\omega \int_{\mathcal{V}} \vec{r}\,'\rho_0(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

Somit wird das retardierte Potential (IX.69) zu

$$\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) \simeq \mathrm{Re}\left[-\mathrm{i}\omega \frac{\mu_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-r/c)}}{4\pi r} \int_{\mathcal{V}} \vec{r}\,'\rho_0(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\right].$$

Dabei ist das Integral genau das in Gl. (VII.27c) definierte elektrische Dipolmoment $\vec{P}_0$ der Ladungsverteilung, die das Potential verursacht. Insgesamt lautet das retardierte Vektorpotential

$$\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi r}\omega \vec{P}_0 \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{IX.70}$$

Dabei handelt es sich um *Dipolstrahlung*

Aus diesem Vektorpotential leitet man für $r \gg c/\omega$ die elektromagnetischen Felder

$$\vec{B}(t,\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi c r}\omega^2 \vec{\mathrm{e}}_r \times \vec{P}_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{IX.71a}$$

und

$$\vec{E}(t,\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r}\omega^2 \vec{\mathrm{e}}_r \times \big(\vec{\mathrm{e}}_r \times \vec{P}_0\big) \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{IX.71b}$$

ab, wobei $\vec{\mathrm{e}}_r$ den Einheitsvektor entlang $\vec{r}$ bezeichnet.