IX.5 Klassische Theorie der Strahlung

In diesem Abschnitt werden die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit gegebener äußerer Quellen anhand von retardierten Potentialen gelöst. Dafür wird zunächst die retardierte Greensche Funktion der D'Alembert-Gleichung eingeführt (§ IX.5.1). Mit deren Hilfe können die elektromagnetischen Potentiale für jede beliebige Ladungs- und Stromverteilung ausgedrückt werden (§ IX.5.2). Dann befasst sich § IX.5.3 mit der Herleitung einer Näherung der Potentiale, die in großer Entfernung von den Quellen gilt. Schließlich wird das durch ein bewegtes geladenes Punktteilchen erzeugte elektromagnetische Feld bestimmt (§ IX.5.4). Dabei wird insbesondere die durch eine beschleunigte Punktladung abgestrahlte Leistung berechnet.

IX.5.1 Greensche Funktion der klassischen Wellengleichung

Die Bewegungsgleichungen (IX.21) für die elektromagnetischen Potentiale in der Lorenz-Eichung sind lineare partielle Differentialgleichungen der Form

$$\Box f(t,\vec{r}) = J(t,\vec{r}) \tag{IX.56}$$

mit vorgegebenem rechtem Glied J, d.h. einer inhomogenen klassischen Wellengleichung (inhomogenen D'Alembert-Gleichung).

Die Lösung ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung der assoziierten homogenen Differentialgleichung — die in § IX.4.1 b berechnet wurde — und aus einer speziellen Lösung, die hiernach bestimmt wird.

Sei $G(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')$ eine Greensche Funktion der Gleichung (IX.56), d.h. eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Box G(t,\vec{r};t',\vec{r}\,') = \delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{IX.57a}$$

genügen. Dann ist die Faltung von G und J eine spezielle Lösung der Gl. (IX.56):

$$f(t,\vec{r}) = \int G(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')\,J(t',\vec{r}\,')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'. \tag{IX.57b}$$

Wenn $\Box$ den d'Alembert-Operator bezüglich der nicht-gestrichenen Variablen $t,\vec{r}$ bezeichnet, gilt tatsächlich

$$\Box f(t,\vec{r}) = \Box\left[\int G(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')\,J(t',\vec{r}\,')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\right] = \int \Box G(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')\,J(t',\vec{r}\,')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$
$$= \int \delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\,J(t',\vec{r}\,')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = J(t,\vec{r}).$$

Hiernach wird gezeigt, dass die Differentialgleichung (IX.57a) zwei unabhängige Lösungen hat, die im Unendlichen verschwinden, und zwar

$$G_{\rm ret.}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,') \equiv \frac{-1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\!\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} - (t-t')\right), \tag{IX.58a}$$

$$G_{\rm adv.}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,') \equiv \frac{-1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\!\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} + (t-t')\right). \tag{IX.58b}$$

- $G_{\rm ret.}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')$ ist die *retardierte Greensche Funktion*: liegt der „Beobachtungspunkt" — wo die Lösung f von Gl. (IX.56) ausgewertet bzw. gemessen wird — im Raumzeitpunkt $P=(t,\vec{r})$, dann ist der Träger von $G_{\rm ret.}$ lokalisiert auf der Menge der Punkte $(t',\vec{r}\,')$ mit $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = c(t-t')$ und somit $t'\leq t$: diese Punkte bilden den *Rückwärtslichtkegel* (oder *Vergangenheits-Lichtkegel*) des Punkts P.

- $G_{\rm adv.}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')$ ist die *avancierte Greensche Funktion*: $G_{\rm adv.}$ ist lokalisiert auf dem Vorwärtslichtkegel $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = -c(t-t')$, woraus $t'\geq t$ folgt, des Beobachtungspunktes $(t,\vec{r})$.

Allgemeiner ist jede Funktion der Form

$$G(t,\vec{r};t',\vec{r}\,') = \alpha\, G_{\rm ret.}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,') + \beta\, G_{\rm adv.}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,') \quad \text{mit } \alpha+\beta=1$$

ebenfalls eine im Unendlichen verschwindende Greensche Funktion der inhomogenen klassischen Wellengleichung (IX.56).

Bemerkung: Bezeichnet man die retardierte bzw. avancierte Greensche Funktion $G_{\rm ret.}$ bzw. $G_{\rm adv.}$ mit G_- bzw. G_+, so gilt

$$G_\mp(t,\vec{r};t',\vec{r}\,') = \frac{-c}{2\pi}\Theta\big(\pm(t-t')\big)\,\delta\big(-c^2(t-t')^2+|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2\big),$$

wobei die einzige Rolle der Heaviside-Funktion Θ darin besteht, den Rückwärts- bzw. Vorwärtslichtkegel des Punkts $(t,\vec{r})$ auszuwählen.

Sei $\tau\equiv t-t'$ und $\varrho\equiv|\vec{r}-\vec{r}\,'|$. Aus $\delta(f(x))=\sum_i\delta(x-x_i)/|f'(x_i)|$, wobei die Summe über die Nullstellen x_i der Funktion f läuft [Gl. (C.22)], folgt [vgl. auch Gl. (C.23)]

$$\frac{-c}{2\pi}\Theta(\pm\tau)\,\delta(-c^2t^2+\varrho^2) = \frac{-c}{2\pi}\Theta(\pm\tau)\left[\frac{\delta(\varrho-c\tau)}{|2c\tau|}+\frac{\delta(\varrho+c\tau)}{|2c\tau|}\right] = \frac{-c}{4\pi\varrho}\delta(\varrho\mp c\tau) = \frac{-1}{4\pi\varrho}\delta\Big(\frac{\varrho}{c}\mp\tau\Big),$$

wobei $\varrho\geq 0$ und die Skalierungseigenschaft (C.17a) der δ-Distribution benutzt wurden. □

Bestimmung der Greenschen Funktionen zur inhomogenen D'Alembert-Gleichung

Um eine Lösung der Gleichung (IX.57) zu finden, ist es günstig, die Fourier-Darstellungen

$$\delta(t-t') = \int e^{-i\omega(t-t')}\,\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') = \int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\,\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$$

und

$$G(t,\vec{r};t',\vec{r}\,') = \int \tilde{G}(\omega,\vec{k})\,e^{-i[\omega(t-t')-\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')]}\,\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tag{IX.59}$$

der δ-Distributionen und der gesuchten Greenschen Funktion einzuführen. Somit gilt

$$\begin{aligned}\Box G(t,\vec{r};t',\vec{r}\,') &= \int\tilde{G}(\omega,\vec{k})\left[\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\triangle\right)e^{-i[\omega(t-t')-\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')]}\right]\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\\ &= \int\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\vec{k}^2\right)\tilde{G}(\omega,\vec{k})\,e^{-i[\omega(t-t')-\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')]}\,\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}.\end{aligned}$$

Dies muss gleich

$$\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') = \int e^{-i[\omega(t-t')-\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')]}\,\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$$

sein, woraus

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\vec{k}^2\right)\tilde{G}(\omega,\vec{k}) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{G}(\omega,\vec{k}) = \frac{-1}{\vec{k}^2-\omega^2/c^2}$$

folgt. Nach Einsetzen in die Fourier-Darstellung (IX.59) ergibt sich dann

$$G(t,\vec{r};t',\vec{r}\,') = -\int\frac{e^{-i[\omega(t-t')-\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')]}}{\vec{k}^2-\omega^2/c^2}\,\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}. \tag{IX.60}$$

Dieser Ausdruck ist aber mehrdeutig, weil der Nenner des Integranden verschwindet.

Sei $g(k_0,\vec{R})\equiv\displaystyle\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{\vec{k}^2-k_0^2}\,d^3\vec{k}$. Unter Einführung des Winkels θ zwischen $\vec{k}$ und $\vec{R}$ ergibt sich

$$g(k_0,\vec{R}) = 2\pi\int_0^\infty k^2\left[\int_{-1}^1\frac{e^{ikR\cos\theta}}{k^2-k_0^2}\,d(\cos\theta)\right]dk = \frac{2\pi}{iR}\int_0^\infty\frac{k}{k^2-k_0^2}\big(e^{ikR}-e^{-ikR}\big)\,dk,$$

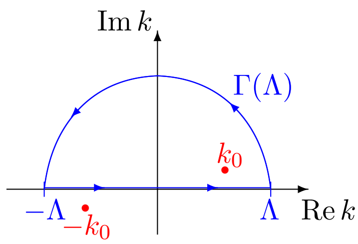

Abbildung IX.2 – Integrationskontour für die Berechnung von $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{k^2-k_0^2}\,\mathrm{d}k$ mit $R>0$.

wobei $R=|\vec{R}|$ und $k=|\vec{k}|$. Dies lautet noch

$$g(k_0,\vec{R})=\frac{2\pi}{\mathrm{i}R}\left(\int_0^\infty\frac{k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}R}}{k^2-k_0^2}\,\mathrm{d}k-\int_0^\infty\frac{k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{k^2-k_0^2}\,\mathrm{d}k\right)=\frac{2\pi}{\mathrm{i}R}\int_{-\infty}^\infty\frac{k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{k^2-k_0^2}\,\mathrm{d}k,$$

wobei die letzte Gleichung aus der Substitution $k\to -k$ im zweiten Integral folgt.

Für $k_0\in\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}k_0\neq 0$ ist die Funktion $g(k_0,\vec{r})$ wohldefiniert. Wenn $\Gamma(\Lambda)$ die in Abb. IX.2 dargestellte Integrationskontour bezeichnet, dann ist für $R>0$

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{k^2-k_0^2}\,\mathrm{d}k=\lim_{\Lambda\to\infty}\int_{\Gamma(\Lambda)}\frac{k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{k^2-k_0^2}\,\mathrm{d}k$$

laut dem Residuensatz gleich $2\pi\mathrm{i}$ multipliziert mit dem Residuum von $k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}/(k^2-k_0^2)$ am Pol in der Halbebene $\operatorname{Im}k>0$. Für $\operatorname{Im}k_0>0$ liegt dieser Pol bei $k=k_0$ und das Residuum ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0R}/2$. Für $\operatorname{Im}k_0<0$ liegt der Pol bei $k=-k_0$, mit Residuum $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0R}/2$. Somit gilt

$$g(k_0,\vec{R})=\begin{cases}\dfrac{2\pi^2}{|\vec{R}|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|\vec{R}|} & \text{wenn }\operatorname{Im}k_0>0,\\[2mm] \dfrac{2\pi^2}{|\vec{R}|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0|\vec{R}|} & \text{wenn }\operatorname{Im}k_0<0.\end{cases}$$

Um den Fall $k_0\in\mathbb{R}$ zu behandeln, werden die Funktionen

$$g_\pm(k_0,\vec{R})\equiv\lim_{\epsilon\to 0^+}g(k_0\pm\mathrm{i}\epsilon,\vec{R})=\frac{2\pi^2}{|\vec{R}|}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k_0|\vec{R}|}$$

definiert. Mit deren Hilfe lassen sich aus Gl. (IX.60) zwei Greensche Funktionen herleiten, und zwar

$$G_\pm(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^\infty g_\pm\!\left(\frac{\omega}{c},\vec{r}-\vec{r}\,'\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}=\frac{-1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\int_{-\infty}^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t'\mp|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi},$$

d.h.

$$G_\pm(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')=\frac{-1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\!\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\mp(t-t')\right),\qquad\text{(IX.61)}$$

entsprechend der retardierten (G_+) und avancierten (G_-) Greenschen Funktionen (IX.58).

IX.5.2 Retardierte Potentiale

Mit Hilfe der gerade eingeführten Greenschen Funktionen können nun spezielle Lösungen der Bewegungsgleichungen (IX.21) für die elektromagnetischen Potentiale geschrieben werden. Somit liefert das Einsetzen der retardierten Greenschen Funktion (IX.58a) in die allgemeine Formel (IX.57b) mit Quellterm $-\rho_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')/\epsilon_0$ bzw. $-\mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')$

$$\Phi_{\text{ret.}}(t,\vec{r})=-\frac{1}{\epsilon_0}\int G_{\text{ret.}}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')\,\rho_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\qquad\text{(IX.62a)}$$

bzw.

$$\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) = -\mu_0 \int G_{\text{ret.}}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')\,\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'. \tag{IX.62b}$$

Diese Ausdrücke sehen offensichtlich sehr ähnlich aus. Daher werden detaillierte Berechnungen hiernach nur am Beispiel des Vektorpotentials $\vec{A}_{\text{ret.}}$ durchgeführt.

Mit dem expliziten Ausdruck (IX.58a) der retardierten Greenschen Funktion gelten

$$\begin{aligned}\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) &= -\mu_0 \int \frac{-1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\!\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} - (t-t')\right)\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\left[\int \delta\!\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')\,\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\end{aligned} \tag{IX.63a}$$

und für das Skalarpotential

$$\Phi_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\left[\int \delta\!\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\rho_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')\,\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}^3\vec{r}\,'. \tag{IX.63b}$$

Nach Durchführen des Integrals über die Zeitvariable t' kommen

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\rho_{\text{el.}}\!\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c},\vec{r}\,'\right)\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \quad &\text{(IX.64a)}\\ \vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\vec{\jmath}_{\text{el.}}\!\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c},\vec{r}\,'\right)\mathrm{d}^3\vec{r}\,'. \quad &\text{(IX.64b)}\end{aligned}}$$

Φ_{ret} und $\vec{A}_{\text{ret.}}$ heißen *retardierte Potentiale*. Dabei hängt das Skalar bzw. Vektorpotential am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t von der Ladungsdichte $\rho_{\text{el.}}$ bzw. Stromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ am Ort $\vec{r}\,'$ zur früheren, *retardierten* Zeit $t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$ ab. Die Verzögerung entspricht genau der Reisezeit des Lichts von $\vec{r}\,'$ bis zu $\vec{r}$.

Bemerkungen:

∗ Die retardierten Potentiale genügen automatisch der Lorenz-Eichbedingung (IX.16).

Das Einsetzen der Gl. (IX.62) in die letztere gibt nämlich

$$\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi_{\text{ret.}}(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) = \\ -\mu_0\int\left[\frac{\partial G_{\text{ret.}}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')}{\partial t}\,\rho_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,') + \vec{\nabla}G_{\text{ret.}}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')\cdot\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')\right]\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

Die Ableitung der retardierten Greenschen Funktion nach t bzw. nach den Komponenten von $\vec{r}$ kann durch das Negative der Ableitung nach t' bzw. nach den Komponenten von $\vec{r}\,'$ ersetzt werden:

$$\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi_{\text{ret.}}(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) = \\ \mu_0\int\left[\frac{\partial G_{\text{ret.}}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')}{\partial t'}\,\rho_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,') + \vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}G_{\text{ret.}}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')\cdot\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')\right]\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

Jetzt können partielle Integrationen über die Zeit t' (für den ersten Summanden im Integral) oder die Ortskoordinaten $\vec{r}\,'$ (für den zweiten Summanden) durchgeführt werden. Unter der Annahme, dass die integrierten Terme verschwinden — entsprechend der Abwesenheit von Ladungen und Strömen im Unendlichen —, kommt

$$\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi_{\text{ret.}}(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) = -\mu_0\int G_{\text{ret.}}(t,\vec{r};t',\vec{r}\,')\left[\frac{\partial\rho_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')}{\partial t'} + \vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\cdot\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t',\vec{r}\,')\right]\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

Der Term in eckigen Klammern stellt genau die linke Seite der Kontinuitätsgleichung (IX.7) dar, d.h. er verschwindet. □

$*$ Wenn die Quellen $\rho_{\text{el.}}(t', \vec{r}\,')$, $\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t', \vec{r}\,')$ des elektromagnetischen Feldes vor einem Zeitpunkt t_0 identisch verschwinden, dann sind die Potentiale $\Phi_{\text{ret.}}(t, \vec{r})$, $\vec{A}_{\text{ret.}}(t, \vec{r})$ für $t \leq t_0$ ebenfalls Null.

$*$ Mithilfe der avancierten Greenschen Funktion $G_{\text{adv.}}$ lassen sich auch *avancierte Potentiale* bestimmen. Physikalisch werden solche Potentiale üblicherweise im Namen vom Prinzip der *Kausalität* nicht angenommen: das Effekt — Potential am Punkt $(t, \vec{r})$ — könne nicht vor der Ursache — Quelle am Punkt $(t + |\vec{r} - \vec{r}\,'|/c, \vec{r}\,')$ — kommen. Diese *Wahl* der Lösung mit retardiertem Potential schließt also einen Unterschied zwischen Vergangenheit und Zukunft („elektromagnetischer Zeitpfeil“) ein, der in den Maxwell-Gleichungen nicht existiert.

Referenz [30] legt eine „Begründung“ dieser Wahl dar, die aber nicht zwangsläufig ist: beispielsweise haben Wheeler und Feynman [31] lineare Kombinationen von retardierten und avancierten Potentialen benutzt, um Probleme der klassischen Elektrodynamik von Punktladungen — insbesondere deren Selbstwechselwirkung — zu lösen.

Stationäre Quellen

Falls die Quellen — Ladungs- und Stromverteilungen — des elektromagnetischen Feldes stationär sind, lauten die retardierten Potentiale (IX.64)

$$\Phi_{\text{ret.}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, \mathrm{d}^3\vec{r}\,', \tag{IX.65a}$$

$$\vec{A}_{\text{ret.}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, \mathrm{d}^3\vec{r}\,'. \tag{IX.65b}$$

Man findet also genau die Lösungen (VII.22) bzw. (VIII.10) der Poisson-Gleichungen der Elektrostatik (VII.4) bzw. der Magnetostatik (VIII.9) wieder.

IX.5.4 Potentiale und Felder einer bewegten Punktladung

Dieser Paragraph beginnt mit der Berechnung der Potentiale und Felder, die durch eine bewegte Punktladung mit der Bahnkurve $\vec{x}(t)$ erzeugt werden, entsprechend einer Ladungsdichte bzw. Stromdichte [vgl. Gl. (VI.6)]

$$\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = q\delta^{(3)}\big(\vec{r}-\vec{x}(t)\big) \quad \text{bzw.} \quad \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = q\vec{v}(t)\,\delta^{(3)}\big(\vec{r}-\vec{x}(t)\big).$$

Danach wird die Leistung, die durch die abgestrahlten Felder transportiert wird, bestimmt.

IX.5.4 a Liénard–Wiechert-Potentiale

Mit dieser Form für die Quellterme lauten die retardierten Potentiale (IX.63)

$$\begin{aligned}\vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) &= -\frac{\mu_0 q}{4\pi}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\bigg(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\bigg)\vec{v}(t')\,\delta^{(3)}\big(\vec{r}\,'-\vec{x}(t')\big)\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{v}(t')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}\,\delta\bigg(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c}\bigg)\mathrm{d}t', \qquad \text{(IX.72a)}\end{aligned}$$

wobei das Integral über $\vec{r}\,'$ durchgeführt wurde, und ähnlich

$$\Phi_{\rm ret.}(t,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}\,\delta\bigg(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c}\bigg)\,{\rm d}t' \qquad \text{(IX.72b)}$$

Wie im § IX.5.2 werden die Herleitungen hiernach nur im Fall des Vektorpotentials detailliert.

Das Argument $f(t') \equiv t - t' - |\vec{r}-\vec{x}(t')|/c$ der δ-Distribution im Integranden verschwindet für einen einzigen Wert von t', der als $t_{\rm ret.}$ bezeichnet wird und *retardierte Zeit* heißt. $t_{\rm ret.}$ ist die Zeit, zu der die Raumzeitlinie — d.h. die Trajektorie in der Raumzeit — $\big(t',\vec{x}(t')\big)$ der Punktladung den Rückwärtslichtkegel des Punkts $(t,\vec{r})$ durchschneidet (Abb. IX.3).

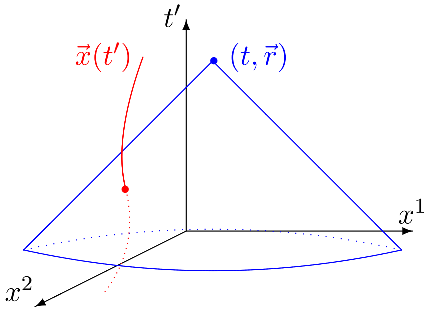

Abbildung IX.3 – Retardierte Zeit.

Somit genügt die retardierte Zeit der impliziten Gleichung

$$t_{\rm ret.} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{x}(t_{\rm ret.})|}{c}. \qquad \text{(IX.73)}$$

Die Integration nach t' in Gl. (IX.72a) folgt aus der Formel $\delta\big(f(t')\big) = \delta(t'-t_{\rm ret.})/|f'(t_{\rm ret.})|$, wobei hier

$$f'(t') = -1 + \frac{1}{c}\frac{\vec{r}-\vec{x}(t')}{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}\cdot\vec{v}(t').$$

Daher gilt

$$f'(t_{\rm ret.}) = -1 + \vec{e}_{\rm ret.}\cdot\vec{\beta}_{\rm ret.},$$

mit dem Einheitsvektor

$$\vec{e}_{\rm ret.} \equiv \frac{\vec{r}-\vec{x}(t_{\rm ret.})}{|\vec{r}-\vec{x}(t_{\rm ret.})|} \equiv \frac{\vec{X}_{\rm ret.}}{|\vec{X}_{\rm ret.}|} \qquad \text{(IX.74a)}$$

in Richtung von $\vec{X}_{\rm ret.} \equiv \vec{r}-\vec{x}(t_{\rm ret.})$, d.h. von der Quelle des Potentials bis zu dessen Beobachtungspunkt, während

$$\vec{\beta}_{\rm ret.} = \frac{\vec{v}_{\rm ret.}}{c} \equiv \frac{\vec{v}(t_{\rm ret.})}{c} \qquad \text{(IX.74b)}$$

die Geschwindigkeit der Punktladung zur retardierten Zeit bezeichnet. Da der Betrag von $\vec{\beta}_{\rm ret.}$ streng kleiner als 1 ist, bleibt $f'(t_{\rm ret.})$ immer negativ.

Somit ergeben sich die *Liénard*[ap]*–Wiechert*[aq]*-Potentiale*

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}_{\rm ret.}}{|\vec{r}-\vec{x}(t_{\rm ret.})| - [\vec{r}-\vec{x}(t_{\rm ret.})]\cdot\dfrac{\vec{v}_{\rm ret.}}{c}}, \qquad \text{(IX.74c)}$$

und

$$\Phi(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{x}(t_{\rm ret.})| - [\vec{r}-\vec{x}(t_{\rm ret.})]\cdot\dfrac{\vec{v}_{\rm ret.}}{c}}. \qquad \text{(IX.74d)}$$

[ap] A.-M. Liénard, 1869–1958 [aq] E. Wiechert, 1861–1928

Dabei hängt die Geschwindigkeit $\vec{v}_{\rm ret.}$ der Punktladung zur retardierten Zeit von $t_{\rm ret.}$ und somit implizit von t und $\vec{r}$ ab.

Bemerkung: Der Nenner dieser Potentiale ist immer positiv.

IX.5.4 b Elektrisches und magnetisches Feld

Das elektrische und das magnetische Feld können aus den Gl. (IX.12) und (IX.13) hergeleitet werden. Die Liénard–Wiechert-Potentiale (IX.74) hängen aber nicht nur explizit von der Raumzeitvariablen t und $\vec{r}$ ab, sondern auch implizit über die retardierte Zeit (IX.73). Dementsprechend ist die Berechnung der Felder etwa mühsam. Letztendlich findet man die retardierten Feldern:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(1-\vec{e}_{\rm ret.}\cdot\vec{\beta}_{\rm ret.})^3}\left(\frac{\vec{e}_{\rm ret.}-\vec{\beta}_{\rm ret.}}{\gamma_{\rm ret.}^2\big|\vec{X}_{\rm ret.}\big|^2} + \frac{\vec{e}_{\rm ret.}\times\big[\big(\vec{e}_{\rm ret.}-\vec{\beta}_{\rm ret.}\big)\times\vec{a}_{\rm ret.}\big]}{c^2\big|\vec{X}_{\rm ret.}\big|}\right), \tag{IX.75a}$$

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{1}{c}\,\vec{e}_{\rm ret.}\times\vec{E}(t,\vec{r}), \tag{IX.75b}$$

mit $\vec{\beta}_{\rm ret.}$ bzw. $\vec{a}_{\rm ret.}$ der auf c normierten Geschwindigkeit bzw. der Beschleunigung der Punktladung zur retardierten Zeit und $\gamma_{\rm ret.}\equiv(1-\vec{\beta}_{\rm ret.}^2)^{-1/2}$ dem entsprechenden Lorentz-Faktor.

Beweis: Um die retardierten Felder herzuleiten, lohnt es sich, die Potentiale (IX.74c)–(IX.74d) umzuschreiben [vgl. Gl. (IX.72)]

$$\Phi(t,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}\,\delta\bigg(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c}\bigg)\,{\rm d}t' \tag{IX.76a}$$

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{v}(t')}{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}\,\delta\bigg(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c}\bigg)\,{\rm d}t'. \tag{IX.76b}$$

Sei jetzt $\vec{X}(t')\equiv\vec{r}-\vec{x}(t')$ mit $\vec{e}(t')\equiv\vec{X}(t')/|\vec{X}(t')|$ dem entsprechenden Einheitsvektor. Aus diesen Gleichungen folgen

$$\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[-\frac{1}{\big|\vec{X}(t')\big|^2}\,\delta\bigg(t-t'-\frac{\big|\vec{X}(t')\big|}{c}\bigg) - \frac{1}{c\big|\vec{X}(t')\big|}\,\delta'\bigg(t-t'-\frac{\big|\vec{X}(t')\big|}{c}\bigg)\Bigg]\,\vec{e}(t')\,{\rm d}t',$$

$$\frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{v}(t')}{\big|\vec{X}(t')\big|}\,\delta'\bigg(t-t'-\frac{\big|\vec{X}(t')\big|}{c}\bigg)\,{\rm d}t'.$$

Die Substitution $s=f(t')=t-t'-\big|\vec{X}(t')\big|/c$ gibt ${\rm d}s/{\rm d}t'=-1+\vec{e}\cdot\vec{\beta}$ und dadurch

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-\vec{e}\cdot\vec{\beta}}\left[\frac{\vec{e}}{\big|\vec{X}\big|^2}\,\delta(s)+\frac{\vec{e}-\vec{\beta}}{c\big|\vec{X}\big|}\,\delta'(s)\right]{\rm d}s, \tag{IX.77}$$

wobei $\vec{e}$, $\vec{X}$, $\vec{v}$ und $\vec{\beta}\equiv\vec{v}/c$ zur Zeit $t'=f^{-1}(s)$ zu betrachten sind. Der Term mit der Ableitung der δ-Distribution kann mithilfe partieller Integration berechnet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{e}-\vec{\beta}}{c\big(1-\vec{e}\cdot\vec{\beta}\big)\big|\vec{X}\big|}\,\delta'(s)\,{\rm d}s = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta(s)\,\frac{\rm d}{{\rm d}s}\left[\frac{\vec{e}-\vec{\beta}}{c\big(1-\vec{e}\cdot\vec{\beta}\big)\big|\vec{X}\big|}\right]{\rm d}s$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(s)\,\frac{1}{1-\vec{e}\cdot\vec{\beta}}\,\frac{\rm d}{{\rm d}t'}\left[\frac{\vec{e}-\vec{\beta}}{c\big(1-\vec{e}\cdot\vec{\beta}\big)\big|\vec{X}\big|}\right]{\rm d}s.$$

Die Ableitung nach t' im Integranden folgt aus den Ableitungen

$$\frac{\rm d}{{\rm d}t'}\frac{1}{\big|\vec{X}\big|} = \frac{\vec{e}\cdot\vec{v}}{\big|\vec{X}\big|^2},\qquad \frac{{\rm d}\vec{e}}{{\rm d}t'} = \frac{(\vec{e}\cdot\vec{v})\,\vec{e}-\vec{v}}{\big|\vec{X}\big|},\qquad \frac{\rm d}{{\rm d}t'}\frac{1}{1-\vec{e}\cdot\vec{\beta}} = \frac{1}{\big(1-\vec{e}\cdot\vec{\beta}\big)^2}\left[\frac{\vec{e}\cdot\vec{a}}{c}+\frac{(\vec{e}\cdot\vec{v})^2-\vec{v}^2}{c\big|\vec{X}\big|}\right],$$

mit der Beschleunigung $\vec{a}={\rm d}\vec{v}/{\rm d}t'$ der Punktladung. Dies führt zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left[\frac{\vec{\mathrm{e}}-\vec{\beta}}{c(1-\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\beta})|\vec{X}|}\right]=\frac{1}{|\vec{X}|(1-\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\beta})^2}\left[\frac{(\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{a})\vec{\mathrm{e}}-\vec{a}-(\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{a})\vec{\beta}+(\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\beta})\vec{a}}{c^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2(\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\beta})-(\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\beta})^2-\vec{\beta}^2}{|\vec{X}|}\vec{\mathrm{e}}-\frac{1-\vec{\beta}^2}{|\vec{X}|}\vec{\beta}\right],$$

so dass Gl. (IX.77) insgesamt lautet

$$\vec{E}(t,\vec{r})=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(s)}{|\vec{X}|(1-\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\beta})^3}\left(\frac{(\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{a})(\vec{\mathrm{e}}-\vec{\beta})-\left[\vec{\mathrm{e}}\cdot(\vec{\mathrm{e}}-\vec{\beta})\right]\vec{a}}{c^2}+\frac{(1-\vec{\beta}^2)(\vec{\mathrm{e}}-\vec{\beta})}{|\vec{X}|}\right)\mathrm{d}s.$$

Dann ist der Integrand gleich dem Produkt eines Terms $\delta(s)$ mit einer Funktion von s: das Integral ist einfach der Wert der Letzteren für $s=0$, d.h. $t'=t_{\text{ret.}}$. Somit findet man Gl. (IX.75a).

Das magnetische Feld $\vec{B}(t,\vec{r})$ lässt sich ähnlich berechnen, ausgehend aus

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}(t,\vec{r})=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\mathrm{e}}(t')\times\vec{v}(t')\left[\frac{-1}{|\vec{X}(t')|^2}\,\delta\!\left(t-t'-\frac{|\vec{X}(t')|}{c}\right)-\frac{1}{c|\vec{X}(t')|}\,\delta'\!\left(t-t'-\frac{|\vec{X}(t')|}{c}\right)\right]\mathrm{d}t'.$$

Die retardierten elektromagnetischen Felder (IX.75) bestehen aus einem Beitrag proportional zu $1/|\vec{X}_{\text{ret.}}|^2$ und einem Term proportional zu $1/|\vec{X}_{\text{ret.}}|$. In einem Bezugssystem, das sich mit der Punktladung zur retardierten Zeit mitbewegt, d.h. wo $\vec{\beta}_{\text{ret.}}=\vec{0}$, lauten sie

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}}{|\vec{X}_{\text{ret.}}|^2}+\frac{\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}\times(\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}\times\vec{a}_{\text{ret.}})}{c^2|\vec{X}_{\text{ret.}}|}\right],\qquad \vec{B}=\frac{1}{c}\,\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}\times\vec{E}.$$

Das elektrische Feld ist die Summe aus dem Coulomb-Feld in $1/|\vec{X}_{\text{ret.}}|^2$ einer ruhenden Punktladung

$$\vec{E}_{\text{Coul.}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}}{|\vec{X}_{\text{ret.}}|^2},\qquad \vec{B}_{\text{Coul.}}=\vec{0},$$

und, wenn die retardierte Beschleunigung $\vec{a}_{\text{ret.}}$ der Punktladung nicht Null ist, aus dem *Strahlungsfeld* in $1/|\vec{X}_{\text{ret.}}|$

$$\vec{E}_{\text{Strahl.}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2|\vec{X}_{\text{ret.}}|}\,\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}\times(\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}\times\vec{a}_{\text{ret.}}),\qquad \vec{B}_{\text{Strahl.}}=\frac{1}{c}\,\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}\times\vec{E}_{\text{Strahl.}}.$$

Diese Strahlungsfelder sind senkrecht zu $\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}$.

Ähnlicherweise entspricht der Beitrag in $1/|\vec{X}_{\text{ret.}}|^2$ in Gl. (IX.75) dem Coulomb-Feld, und der Term in $1/|\vec{X}_{\text{ret.}}|$, dem Strahlungsfeld.

Bemerkung: Wenn die Punktladung beschleunigt wird, muss sie einer Kraft unterliegen, d.h. sie muss in einem elektromagnetischen Feld sein: dieses „äußere" Feld wird hier nicht präzisiert. Dagegen lässt sich die Kraft $\vec{F}(t)$, die für die Beschleunigung zur Zeit t verantwortlich ist, dank dem Grundgesetz der Mechanik (XI.14) einfach durch die kinetischen Größen der Punktladung ausdrücken:

$$\vec{F}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\gamma(t)\,\vec{v}(t)\right]=\gamma(t)\,m\Big(\vec{a}(t)+\gamma^2(t)\left[\vec{\beta}(t)\cdot\vec{a}(t)\right]\vec{\beta}(t)\Big)\tag{IX.78}$$

mit m der Masse der Punktladung.

Beispiel: Punktladung in gleichförmiger geradliniger Bewegung

Wenn $\vec{a}_{\text{ret.}}=\vec{0}$ zu jeder retardierten Zeit vereinfacht sich das elektrische Feld (IX.75) zu

$$\vec{E}(t,\vec{r})=\frac{q}{4\pi\epsilon_0(1-\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}\cdot\vec{\beta})^3}\frac{\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}-\vec{\beta}}{\gamma^2|\vec{X}_{\text{ret.}}|^2}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{X}_{\text{ret.}}-|\vec{X}_{\text{ret.}}|\vec{\beta}}{\gamma^2\big(|\vec{X}_{\text{ret.}}|-\vec{X}_{\text{ret.}}\cdot\vec{\beta}\big)^3},\tag{IX.79}$$

mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{\beta}$.

Aus $|\vec{X}_{\rm ret.}| = |\vec{r} - \vec{x}(t_{\rm ret.})| = c(t - t_{\rm ret.})$ folgt für die gleichförmige Bewegung der Punktladung

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_{\rm ret.}) + c\vec{\beta}(t - t_{\rm ret.}) = \vec{x}(t_{\rm ret.}) + |\vec{X}_{\rm ret.}|\vec{\beta},$$

d.h. für den Vektor im Zähler der Gl. (IX.79) $\vec{X}_{\rm ret.} - |\vec{X}_{\rm ret.}|\vec{\beta} = \vec{r} - \vec{x}(t)$: das elektrische Feld zur Zeit t ist in der *momentanen* Richtung von der Ladung nach $\vec{r}$, nicht in der „retardierten" Richtung gerichtet.

IX.5.4 c Abgestrahlte Leistung

Sei $\mathrm{d}^2\mathcal{S}$ ein Flächenelement in einem Punkt $\vec{r}$ im Abstand X einer Punktladung, von der aus $\mathrm{d}^2\mathcal{S}$ unter einem Raumwinkelelement $\mathrm{d}^2\Omega$ gesehen wird. Der Einheitsvektor in Richtung von der Punktladung nach $\vec{r}$ wird mit $\vec{e}_{\rm ret.}$ bezeichnet.

Ein Beobachter $\mathcal{B}$ in $\vec{r}$ misst die elektromagnetischen Felder (IX.75): die Energie, die pro Einheit der Eigenzeit t von $\mathcal{B}$ durch $\mathrm{d}^2\mathcal{S}$ strömt, ist die von $\mathcal{B}$ empfangene Leistung

$$\mathrm{d}^2\mathscr{P} = \vec{S}_{\rm e.m.} \cdot \vec{e}_{\rm ret.}\, X^2\, \mathrm{d}^2\Omega,$$

mit $\vec{S}_{\rm e.m.} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ dem Poynting-Vektor in $\vec{r}$ [Gl. (IX.23b)]. Für große Abstände $X \to \infty$ trägt der Coulomb-Anteil der retardierten Felder nicht bei, und man darf das Strahlungsfeld alleine betrachten. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{P}}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} X^2 \Big[\vec{E}_{\rm Strahl.} \times \big(\vec{e}_{\rm ret.} \times \vec{E}_{\rm Strahl.}\big)\Big] \cdot \vec{e}_{\rm ret.}.$$

Das doppelte Kreuzprodukt lautet $\vec{E}^2_{\rm Strahl.}\vec{e}_{\rm ret.} - (\vec{e}_{\rm ret.} \cdot \vec{E}_{\rm Strahl.})\vec{E}_{\rm Strahl.}$, wobei der zweite Term wegen der Orthogonalität von $\vec{E}_{\rm Strahl.}$ und $\vec{e}_{\rm ret.}$ Null ist. Damit ergibt sich unter Berücksichtigung des Ausdrucks des Strahlungsfeldes in Gl. (IX.75a)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{P}}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{(4\pi)^2 c\big(1 - \vec{e}_{\rm ret.} \cdot \vec{\beta}_{\rm ret.}\big)^6} \Big|\vec{e}_{\rm ret.} \times \big[\big(\vec{e}_{\rm ret.} - \vec{\beta}_{\rm ret.}\big) \times \vec{a}_{\rm ret.}\big]\Big|^2,$$

wobei ein Faktor $1/(\mu_0\epsilon_0^2 c^5)$ in μ_0/c transformiert wurde.

Wegen Energieerhaltung ist die elektromagnetische Energie, welche die Punktladung in Richtung von $\mathrm{d}^2\mathcal{S}$ abstrahlt, gleich der Energie, die (später) im Beobachtungspunkt $\vec{r}$ durch $\mathrm{d}^2\mathcal{S}$ strömt. Die Leistung, die durch die Punktladung abgestrahlt wird, ist genau diese Energie, bezogen auf die Einheit der Eigenzeit der Punktladung. Diese Eigenzeit ist gerade die retardierte Zeit $t_{\rm ret.}$, so dass die pro Raumwinkelelement abgestrahlte Leistung durch

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{P}_0}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{P}}{\mathrm{d}^2\Omega}\frac{\partial t}{\partial t_{\rm ret.}} = \frac{\mu_0 q^2}{(4\pi)^2 c\big(1 - \vec{e}_{\rm ret.} \cdot \vec{\beta}_{\rm ret.}\big)^5} \Big|\vec{e}_{\rm ret.} \times \big[\big(\vec{e}_{\rm ret.} - \vec{\beta}_{\rm ret.}\big) \times \vec{a}_{\rm ret.}\big]\Big|^2 \qquad \text{(IX.80)}$$

gegeben wird, wobei $\partial t/\partial t_{\rm ret.} = 1 - \vec{e}_{\rm ret.} \cdot \vec{\beta}_{\rm ret.}$ benutzt wurde.

Um die letztere partielle Ableitung zu erhalten, kann man Gl. (IX.73) differenzieren, was zu

$$\mathrm{d}t_{\rm ret.} - \mathrm{d}t + \frac{1}{c}\frac{\vec{X}_{\rm ret.} \cdot \mathrm{d}\vec{X}_{\rm ret.}}{|\vec{X}_{\rm ret.}|} = \mathrm{d}t_{\rm ret.} - \mathrm{d}t + \frac{1}{c}\,\vec{e}_{\rm ret.} \cdot (\mathrm{d}\vec{r} - \vec{v}_{\rm ret.}\,\mathrm{d}t_{\rm ret.}) = 0$$

führt, d.h. $\big(1 - \vec{e}_{\rm ret.} \cdot \vec{\beta}_{\rm ret.}\big)\,\mathrm{d}t_{\rm ret.} = \mathrm{d}t - \vec{e_{\rm ret.}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}/c$. Dann gelten

$$\frac{\partial t_{\rm ret.}}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{e}_{\rm ret.} \cdot \vec{\beta}_{\rm ret.}}, \qquad \vec{\nabla} t_{\rm ret.} = -\frac{\vec{e}_{\rm ret.}}{c\big(1 - \vec{e}_{\rm ret.} \cdot \vec{\beta}_{\rm ret.}\big)}.$$

Bemerkungen:

∗ Eine nicht-beschleunigte Punktladung strahlt keine Energie ab!

∗ Aus Sicht der Punktladung entspricht die als elektromagnetisches Feld abgestrahlte Energie bzw. Leistung einem *Strahlungsverlust*.

Dieser Verlust liegt einem wichtigen Problem der klassischen Physik zugrunde, und zwar der Frage der Stabilität von Atomen: die an den Atomkern gebundenen Elektronen unterliegen einer anziehenden Kraft, und werden daher beschleunigt. Wenn sie teil ihrer Energie als Strahlung verlieren, sollte ihre kinetische Energie allmählich kleiner werden, d.h. sie sollten irgendwann auf den Atomkern fallen. Dies ist aber nicht der Fall, was im Rahmen der klassischen Physik nicht erklärbar ist, und stellt damit eine wichtige Begründung für die Quantenmechanik — oder zumindest für etwas jenseits der klassischen Physik — dar.

Nicht-relativistischer Grenzfall

Im Fall $|\vec{\beta}_{\text{ret.}}| \ll |\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}| = 1$ vereinfacht sich Gl. (IX.80) zu

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{P}_0}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{(4\pi)^2 c}\left|\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}} \times \left(\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}} \times \vec{a}_{\text{ret.}}\right)\right|^2.$$

Sei θ der Winkel zwischen der retardierten Beschleunigung $\vec{a}_{\text{ret.}}$ und der Beobachtungsrichtung $\vec{\mathrm{e}}_{\text{ret.}}$; dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{P}_0}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{(4\pi)^2 c}|\vec{a}_{\text{ret.}}|^2 \sin^2\theta = \frac{q^2|\vec{a}_{\text{ret.}}|^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{\sin^2\theta}{4\pi}.$$

Die Strahlungsleistung ist maximal für $\theta = \frac{\pi}{2}$, d.h. senkrecht zur Richtung der Beschleunigung.

Die gesamte abgestrahlte Leistung ergibt sich durch Integration dieser Formel über den Raumwinkel: mit $\mathrm{d}^2\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ erhält man die *Larmor*[(ar)]*-Formel*

$$\boxed{\mathscr{P}_0 = \int \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{P}_0}{\mathrm{d}^2\Omega}\,\mathrm{d}^2\Omega = \frac{2}{3}\frac{q^2|\vec{a}_{\text{ret.}}|^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}.} \tag{IX.81}$$

Allgemeiner Fall

Die Larmor-Formel (IX.81) gilt in einem mitbewegten Inertialsystem $\mathscr{B}_0$, relativ zu welchem die retardierte Geschwindigkeit der Punktladung momentan verschwindet. In einem Bezugssystem $\mathscr{B}_{\vec{v}}$, wo die retardierte Geschwindigkeit der Punktladung den Wert $\vec{v}$ annimmt, gilt

$$\mathscr{P}_0 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\, a^{\mu}_{\text{ret.}} a_{\text{ret.}\,\mu}, \tag{IX.82}$$

mit $a^\mu \equiv \mathrm{d}u^\mu/\mathrm{d}\tau \equiv \mathrm{d}^2x^\mu/\mathrm{d}\tau^2$ den kontravarianten Komponenten der Viererbeschleunigung (XI.15) der Punktladung, die hier zur retardierten Zeit betrachtet werden soll.
Diese Formel lässt sich noch umschreiben als

$$\mathscr{P}_0 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\gamma^6_{\text{ret.}}\left[\left(\vec{a}_{\text{ret.}}\right)^2 - \left(\vec{\beta}_{\text{ret.}} \times \vec{a}_{\text{ret.}}\right)^2\right]. \tag{IX.83}$$

Beweis der relativistischen Formeln (IX.82)–(IX.83):
Der erste Schritt besteht in der Beobachtung, dass die abgestrahlte Leistung Lorentz-invariant ist. Es seien $\mathrm{d}\mathscr{E}_0$ bzw. $\mathrm{d}\mathscr{E}$ das Differential der Energie im Bezugssystem $\mathscr{B}_0$ bzw. $\mathscr{B}_{\vec{v}}$, und $\mathrm{d}t_0$ bzw. $\mathrm{d}t$ die entsprechenden Differentiale der Zeit. Dann gelten $\mathrm{d}\mathscr{E} = \gamma\,\mathrm{d}\mathscr{E}_0$ und $\mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}t_0$, mit $\gamma = 1/\sqrt{1-\vec{v}^{\,2}/c^2}$ dem Lorentz-Faktor. Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_0}{\mathrm{d}t_0} = \mathscr{P}_0.$$

Berechnet man dann das Lorentz-Skalar $a^\mu a_\mu$ der Viererbeschleunigung, so kommt erstens

$$a^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\,\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}t} = \left(\gamma^4\vec{\beta}\cdot\vec{a}, \gamma^2\vec{a} + \gamma^4(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\vec{\beta}\right)$$

mit der Beschleunigung $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ der Punktladung, und daher

$$a^\mu a_\mu = \gamma^4\left[\vec{a}^{\,2} + \gamma^2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)^2\right]. \tag{IX.84}$$

[(ar)] J. Larmor, 1857–1942

Im Bezugssystem $\mathscr{B}_0$, wo $\vec{\beta} = \vec{0}$ bzw. $\gamma = 1$, stimmen die Formeln (IX.81) und (IX.82) miteinander überein. Da der Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (IX.82) ein Lorentz-Skalar ist, erhält er den gleichen Wert in allen Inertialsystemen, d.h. die Formel gilt in allen solchen Bezugssystemen.

Sei ϑ der Winkel zwischen $\vec{\beta}$ und $\vec{a}$. Aus

$$\vec{a}^{\,2} - \big(\vec{\beta} \times \vec{a}\big)^2 = \vec{a}^{\,2} - \vec{\beta}^{\,2}\vec{a}^{\,2}(1 - \cos^2\vartheta) = \big(1 - \vec{\beta}^{\,2}\big)\vec{a}^{\,2} + \big(\vec{\beta} \cdot \vec{a}\big)^2 = \frac{1}{\gamma^2}\vec{a}^{\,2} + \big(\vec{\beta} \cdot \vec{a}\big)^2$$

und dem Viererquadrat (IX.84) folgt dann die Identität der rechten Gliedern der Gl. (IX.82) und (IX.83). □

Beschleunigung parallel zur Geschwindigkeit

Wenn Beschleunigung und Geschwindigkeit parallel zueinander sind, gelten $\vec{a}_{\text{ret.}} \times \vec{\beta}_{\text{ret.}} = \vec{0}$ und $\vec{e}_{\text{ret.}} \cdot \vec{\beta}_{\text{ret.}} = |\vec{\beta}_{\text{ret.}}| \cos\theta$. Dann lautet Gl. (IX.80)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{P}_0}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 |\vec{a}_{\text{ret.}}|^2}{(4\pi)^2 c} \frac{\sin^2\theta}{\big(1 - |\vec{\beta}_{\text{ret.}}| \cos\theta\big)^5}. \tag{IX.85}$$

Für $|\vec{\beta}_{\text{ret.}}| \to 1$ wird also $\mathrm{d}^2\mathscr{P}_0/\mathrm{d}^2\Omega$ groß in der Vorwärtsrichtung $\cos\theta = 1$.

Genauer kann man prüfen, dass das Maximum von $\mathrm{d}^2\mathscr{P}_0/\mathrm{d}^2\Omega$ im Fall $1-|\vec{\beta}_{\text{ret.}}| \ll 1$ für $\theta \simeq 1/2\gamma$ erreicht wird.

Die Integration der Leistung (IX.85) über den ganzen Raumwinkel führt zu

$$\mathscr{P}_0 = \frac{2}{3}\frac{\mu_0 q^2 |\vec{a}_{\text{ret.}}|^2}{4\pi c}\gamma^6 = \frac{2}{3}\frac{q^2 |\vec{a}_{\text{ret.}}|^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\gamma^6, \tag{IX.86}$$

mit dem Lorentz-Faktor γ assoziiert mit der Geschwindigkeit der Punktladung. Dieses Resultat folgt auch direkt aus der relativistischen Formel (IX.83).

Die Leistung (IX.86) wird also unendlich groß, wenn die Geschwindigkeit der Punktladung gegen c strebt. Dieses Resultat zeigt, dass es nicht möglich ist, eine Punktladung bis zur Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen: dies würde eine unendliche Energie erfordern, um die abgestrahlte Leistung zu kompensieren.

Wenn Beschleunigung und Geschwindigkeit parallel zueinander sind, nimmt die Kraft (IX.78), die für die Beschleunigung der Punktladung verantwortlich ist, die Form

$$\vec{F}(t) = \gamma(t)^3\, m\vec{a}(t)$$

an. Somit lässt sich die Leistung (IX.86) als

$$\mathscr{P}_0 = \frac{2}{3}\frac{\mu_0 q^2}{4\pi m^2 c}\big|\vec{F}(t_{\text{ret.}})\big|^2 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3}\big|\vec{F}(t_{\text{ret.}})\big|^2$$

schreiben.

Beschleunigung senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit

Wenn Beschleunigung und Geschwindigkeit orthogonal sind, entsprechend einer Kreisbewegung, lautet die abgestrahlte Leistung (IX.83)

$$\mathscr{P}_0 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\gamma_{\text{ret.}}^6\big(1 - \vec{\beta}_{\text{ret.}}^2\big)|\vec{a}_{\text{ret.}}|^2 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\gamma_{\text{ret.}}^4|\vec{a}_{\text{ret.}}|^2. \tag{IX.87}$$

Dazu lautet die Kraft (IX.78) auf die Punktladung $\vec{F}(t) = \gamma(t)m\vec{a}(t)$, so dass diese Leistung dadurch noch als

$$\mathscr{P}_0 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3}\gamma_{\text{ret.}}^2\big|\vec{F}(t_{\text{ret.}})\big|^2.$$

ausgedrückt werden kann. Die abgestrahlte Leistung ist also größer um einen Faktor γ^2 relativ zum Fall einer Linearbewegung mit der gleichen Kraft. Somit wird mehr Energie als sog. *Synchrotron-*

strahlung in einem kreisförmigen Teilchenbeschleuniger (einem „Speicherring“, wie z.B. das LHC am CERN) verloren,[79] als in einem Linearbeschleuniger.

Bemerkung: Wenn ein geladenes Teilchen auf Materie stößt und dort von Wechselwirkungen mit den Atomen abgebremst wird, strahlt es ab. Die entsprechende Strahlung wird *Bremsstrahlung* (auch auf Englisch!) genannt.

Literatur zum Kapitel IX

- Feynman, *Vorlesungen über Physik. Band 2* [22] = *Lectures on Physics. Vol. II* [23] Kap. 18, 20–21, 27 & 29;
  Vorlesungen über Physik. Band 1 [24] = *Lectures on Physics. Vol. I* [25] Kap. 34.
- Fließbach, *Elektrodynamik* [3] Teil IV Kap. 16–17 & Teil V Kap. 20, 23–24.
- Greiner, *Klassische Elektrodynamik* [8] Teil IV Kap. 12–13, 15, 20–21.
- Griffiths, *Elektrodynamik* [9] = *Introduction to Electrodynamics* [10] Kap. 7–11.
- Jackson, *Klassische Elektrodynamik* [11] = *Classical Electrodynamics* [12] Kap. 6.1–6.5, 6.7, 7.1–7.2, 9.1–9.2 & 14.1–14.4.
- Landau & Lifschitz, *Klassische Feldtheorie* [14] = *The classical theory of fields* [28] Kap. 4 § 26, 29–31, 33, Kap. 6 § 46–48, Kap. 8 § 62–64 & Kap. 9 § 66–67 & 73–76.
- Nolting, *Elektrodynamik* [17] Kap. 4.1, 4.3 & 4.5.
- Scheck, *Klassiche Feldtheorie* [19] Kap. 1.3–1.6, 2.3, 3.5–3.6 & 4.1–4.2.

[79] Oder genauer, abgestrahlt: die emittierte Strahlung kann benutzt werden, um Materie zu untersuchen.