IX.4.1 b Allgemeine Lösung

Um die allgemeine Lösung der klassischen Wellengleichung (IX.30) herzuleiten, ist es günstig, die Fourier-Darstellung der räumlichen Abhängigkeit von $f(t,\vec{r})$ einzuführen. Somit schreibt man

$$f(t,\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(t,\vec{k})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}, \tag{IX.38a}$$

wobei die räumlich Fourier-transformierte Funktion $\tilde{f}(t,\vec{k})$ durch

$$\tilde{f}(t,\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t,\vec{r})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \mathrm{d}^3\vec{r} \tag{IX.38b}$$

gegeben ist.

Unter Verwendung der Identität $\vec{\nabla}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}) = \mathrm{i}\vec{k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$ wird die klassische Wellengleichung (IX.30) angewandt auf die Darstellung (IX.38a) zu

$$\int \left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{f}(t,\vec{k})}{\partial t^2} - \vec{k}^2\tilde{f}(t,\vec{k})\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = 0,$$

wobei Integration über $\vec{k}$ und Ableitung nach der Zeit t oder nach den Ortskoordinaten $\vec{r}$ ausgetauscht wurden. Nach inverser Fourier-Transformation soll der Term in den eckigen Klammern verschwinden. Definiert man

$$\boxed{\omega_{\vec{k}} \equiv c|\vec{k}|,} \tag{IX.39}$$

so ergibt sich für jeden *Wellenvektor* $\vec{k}$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\tilde{f}(t,\vec{k})}{\partial t^2} + \omega_{\vec{k}}^2\,\tilde{f}(t,\vec{k}) = 0. \tag{IX.40a}$$

Man erkennt die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz $\omega_{\vec{k}}$. Deren allgemeine Lösung ist der Form

$$\tilde{f}(t,\vec{k}) = \tilde{f}_+(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t} + \tilde{f}_-(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t} \tag{IX.40b}$$

mit zwei beliebigen Funktionen $\tilde{f}_+(\vec{k})$ und $\tilde{f}_-(\vec{k})$.

Wenn die gesuchte Lösung $f(t,\vec{r})$ reellwertig sein soll, stehen $\tilde{f}_+(\vec{k})$ und $\tilde{f}_-(\vec{k})$ in Zusammenhang miteinander. Die komplexe Konjugation der Beziehung (IX.38a) lautet

$$f(t,\vec{r})^* = \int_{\mathbb{R}^3}\big[\tilde{f}(t,\vec{k})\big]^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = \int_{\mathbb{R}^3}\big[\tilde{f}(t,-\vec{k})\big]^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3},$$

wobei die zweite Gleichung aus der Substitution $\vec{k}\to-\vec{k}$ folgt. $f(t,\vec{r})$ nimmt reelle Werte an, wenn $f(t,\vec{r}) = f(t,\vec{r})^*$, d.h. nach Vergleich des letzten Terms in der obigen Gleichung mit dem Term auf der rechten Seite von Gl. (IX.38a), wenn

$$\tilde{f}(t,\vec{k}) = \tilde{f}(t,-\vec{k})^*$$

für alle t und $\vec{k}$. Angewandt auf die Lösung (IX.40b) lautet diese Bedingung

$$\tilde{f}_+(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t} + \tilde{f}_-(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t} = \big[\tilde{f}_+(-\vec{k})\big]^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t} + \big[\tilde{f}_-(-\vec{k})\big]^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t},$$

d.h. nach Identifizierung der Terme in $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t}$

$$\tilde{f}_-(\vec{k}) = \big[\tilde{f}_+(-\vec{k})\big]^* \quad \forall\vec{k}. \tag{IX.41}$$

Die Terme in $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t}$ führen zur gleichen Bedingung.

Setzt man schließlich die Lösung (IX.40b) der Gl. (IX.40a) in die Fourier-Darstellung (IX.38a) ein, so lautet die letztere

$$f(t,\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \Big[\tilde{f}_+(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t} + \tilde{f}_-(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t}\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = \int_{\mathbb{R}^3} \Big[\tilde{f}_+(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})} + \tilde{f}_-(-\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\Big]\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}.$$

Dabei wurde im zweiten Summanden des Integranden des letzten Integrals die Substitution $\vec{k}\to-\vec{k}$ unter Berücksichtigung von $\omega_{-\vec{k}}=\omega_{\vec{k}}$ durchgeführt. Ersetzt man in jenem Term $\tilde{f}_-(-\vec{k})$ durch $\big[\tilde{f}_+(\vec{k})\big]^*$, wie aus Bedingung (IX.41) folgt, so sieht man, dass der Term genau komplex konjugiert zum ersten Summanden ist. Unter Einführung der Notation $a(\vec{k})\equiv 2\tilde{f}_+(\vec{k})$ ergibt sich somit für die allgemeine reelle Lösung der klassischen Wellengleichung (IX.30)

$$f(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\bigg[\int_{\mathbb{R}^3} a(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg]. \tag{IX.42}$$

Somit lässt sich die allgemeine Lösung als Superposition von (unendlich vielen) ebenen Wellen $a(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$ schreiben. Die Beziehung (IX.39) zwischen Kreisfrequenz $\omega_{\vec{k}}$ und Wellenvektor $\vec{k}$ dieser ebenen Wellen heißt *Dispersionsrelation*.

Das Verhältnis $c_\varphi(\vec{k})\equiv\omega_{\vec{k}}/|\vec{k}|$ ist die *Phasengeschwindigkeit* der Welle mit Wellenvektor $\vec{k}$ — wobei im Fall der klassischen Wellengleichung (IX.30) $c_\varphi(\vec{k})=c$ für alle $\vec{k}$.

Bemerkung: Die komplexe Amplitude $a(\vec{k})\in\mathbb{C}$ lässt sich prinzipiell durch die Angabe von Anfangsbedingungen $f(t=0,\vec{r})$ und $\partial f(t=0,\vec{r})/\partial t$ festlegen.

IX.4.2 Elektromagnetische Wellen

IX.4.2 a Elektromagnetische Potentiale

Gemäß den Ergebnissen des vorigen § IX.4.1 lauten die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen (IX.29b) für die elektromagnetischen Potentiale im Vakuum

$$\Phi(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\bigg[\int a(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg] \tag{IX.43a}$$

und

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\bigg[\int \vec{b}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg] \tag{IX.43b}$$

mit beliebigen $a(\vec{k})\in\mathbb{C}$ und $\vec{b}(\vec{k})\in\mathbb{C}^3$ und der Dispersionsrelation

$$\omega_{\vec{k}} \equiv c|\vec{k}|. \tag{IX.43c}$$

Dabei sollen Φ und $\vec{A}$ die Lorenz-Eichbedingung (IX.16) erfüllen:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\bigg(\int\bigg[-\frac{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}}{c^2}a(\vec{k}) + \mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{b}(\vec{k})\bigg]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg) = 0.$$

Die elektromagnetischen Potentiale Φ und $\vec{A}$ können noch über die Eichtransformation (IX.14) durch äquivalente Potentiale Φ' und $\vec{A}'$ ersetzt werden, die ebenfalls der Lorenz-Bedingung genügen, solange die Funktion χ der Transformation die Gleichung (IX.17) — d.h. die klassische Wellengleichung — erfüllt. Mit

$$\chi(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\bigg[\int d(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg]$$

gelten

$$\Phi'(t,\vec{r}) = \Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial\chi(t,\vec{r})}{\partial t} = \mathrm{Re}\bigg(\int\Big[a(\vec{k}) + \mathrm{i}\omega_{\vec{k}}\,d(\vec{k})\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg)$$

und

$$\vec{A}'(t,\vec{r}) = \vec{A}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\bigg(\int\Big[\vec{b}(\vec{k}) + \mathrm{i}\vec{k}d(\vec{k})\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg).$$

Eine besonders geeignete Wahl ist $d(\vec{k}) = \mathrm{i}a(\vec{k})/\omega_{\vec{k}}$ für jeden $\vec{k}$, die zum einfachen Skalarpotential

$$\Phi'(t,\vec{r}) = 0 \tag{IX.44a}$$

führt. Wiederum lautet das entsprechende Vektorpotential

$$\vec{A}'(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\bigg[\int \vec{\varepsilon}(\vec{k})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg], \tag{IX.44b}$$

wobei der *Polarisationsvektor* $\vec{\varepsilon}(\vec{k})$ durch

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k}) \equiv \vec{b}(\vec{k}) + \mathrm{i}\vec{k}d(\vec{k}) = \vec{b}(\vec{k}) - \frac{a(\vec{k})}{\omega_{\vec{k}}}\vec{k}$$

gegeben ist. Dabei kann noch $\vec{\varepsilon}(\vec{k})$ reell oder komplex sein.

Eine Einschränkung über den Polarisationsvektor folgt aus der Eichbedingung. Mit $\Phi'(t,\vec{r}) = 0$ wird die Lorenz-Eichbedingung automatisch zur Coulomb-Eichbedingung (IX.15)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\bigg[\int \mathrm{i}\,\vec{\varepsilon}(\vec{k})\cdot\vec{k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg] = 0.$$

Diese Bedingung ist nur dann erfüllt, wenn

$$\boxed{\vec{\varepsilon}(\vec{k})\cdot\vec{k} = 0} \tag{IX.45}$$

für jeden Wellenvektor $\vec{k}$, d.h. wenn der Polarisationsvektor senkrecht auf die Ausbreitungsrichtung der entsprechenden ebenen Welle ist. Somit sind elektromagnetische Wellen im Vakuum *transversal polarisiert*.

IX.4.2 b Elektrisches und magnetisches Feld

Setzt man die elektromagnetischen Potentiale (IX.44) in die Beziehungen (IX.12) und (IX.13) ein, so lauten die zugehörgen elektrischen und magnetischen Felder

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{\partial\vec{A}'(t,\vec{r})}{\partial t} = \mathrm{Re}\bigg[\int \mathrm{i}\omega_{\vec{k}}\,\vec{\varepsilon}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg] \tag{IX.46a}$$

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}'(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\bigg[\int \mathrm{i}\vec{k}\times\vec{\varepsilon}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\bigg]. \tag{IX.46b}$$

Betrachte man eine *monochromatische* ebene Welle, d.h. eine Lösung mit nur einem einzigen Wellenvektor: $\vec{\varepsilon}(\vec{k}) = \mathcal{N}\,\vec{\varepsilon}(\vec{k}_0)\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}_0)$, wobei $\mathcal{N}$ eine unwesentliche Normierungskonstante bezeichnet. Dann gelten

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\Big[\mathrm{i}\omega_{\vec{k}_0}\,\vec{\varepsilon}(\vec{k}_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}_0}t-\vec{k}_0\cdot\vec{r})}\Big] \quad \text{und} \quad \vec{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\Big[\mathrm{i}\vec{k}_0\times\vec{\varepsilon}(\vec{k}_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}_0}t-\vec{k}_0\cdot\vec{r})}\Big].$$

Auf diesen Feldern erkennt man die folgenden Eigenschaften. Erstens sind $\vec{E}(t,\vec{r})$ und $\vec{B}(t,\vec{r})$ automatisch senkrecht aufeinander

$$\boxed{\vec{E}(t,\vec{r})\cdot\vec{B}(t,\vec{r}) = 0.} \tag{IX.47}$$

Dann sind $\vec{E}(t,\vec{r})$ und $\vec{B}(t,\vec{r})$ beide senkrecht zur Bewegungsrichtung $\vec{k}_0$

$$\boxed{\vec{k}_0\cdot\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{k}_0\cdot\vec{B}(t,\vec{r}) = 0.} \tag{IX.48}$$

Schließlich gilt dank $|\vec{k}_0| = \omega_{\vec{k}_0}/c$

$$\boxed{\big|\vec{B}(t,\vec{r})\big| = \frac{\big|\vec{E}(t,\vec{r})\big|}{c}.} \tag{IX.49}$$

IX.4.2 c Energie des elektromagnetischen Feldes

Betrachte man der Einfachheit halber die Felder (IX.46) für den Fall einer monochromatischen ebenen Welle mit Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}(\vec{k}) = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}_0)\vec{E}_0/(\mathrm{i}\omega_0)$ mit $\vec{E}_0 \in \mathbb{R}^3$ und $\omega_0 \equiv \omega_{\vec{k}_0}$. Da die Richtung des elektrischen Feldes — und daher auch der magnetischen Induktion — konstant bleibt, handelt es sich um eine *linear polarisierte* Welle. Es gelten dann

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0 \cos\big(\omega_0 t - \vec{k}_0\cdot\vec{r}\big) \tag{IX.50a}$$

und

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0}\times\vec{E}_0}{c}\cos\big(\omega_0 t - \vec{k}_0\cdot\vec{r}\big) = \frac{\vec{k}_0\times\vec{E}_0}{\omega_0}\cos\big(\omega_0 t - \vec{k}_0\cdot\vec{r}\big). \tag{IX.50b}$$

Aus der Orthogonalität von $\vec{k}_0$ und $\vec{E}_0$ folgt $\big|\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0}\times\vec{E}_0\big| = \big|\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0}\big|\big|\vec{E}_0\big| = \big|\vec{E}_0\big|$, womit sich die Gleichung (IX.49) wiederfinden lässt.

Setzt man diese Felder in die Energiedichte (IX.23a) ein, so ergibt sich

$$e_{\text{e.m.}}(t,\vec{r}) = \left(\frac{\epsilon_0\vec{E}_0^2}{2} + \frac{\vec{E}_0^2}{2\mu_0 c^2}\right)\cos^2\big(\omega_0 t - \vec{k}_0\cdot\vec{r}\big)$$

d.h. unter Verwendung der Beziehung $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$

$$e_{\text{e.m.}}(t,\vec{r}) = \epsilon_0\vec{E}_0^2\cos^2\big(\omega_0 t - \vec{k}_0\cdot\vec{r}\big). \tag{IX.51}$$

Interessant ist auch der über die Zeit gemittelte Wert — definiert für eine beliebige periodische Funktion f durch

$$\langle f\rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{T}}\int_0^{\mathcal{T}} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{IX.52}$$

mit der Periode $\mathcal{T}$ der Funktion — von der Energiedichte. Im Fall der letzteren ist die Periodendauer $\mathcal{T} = 2\pi/\omega_0$: da der Mittelwert von cos^2 über eine Periode $\frac{1}{2}$ ist, gilt

$$\langle e_{\text{e.m.}}(\vec{r})\rangle = \frac{\epsilon_0\vec{E}_0^2}{2}. \tag{IX.53}$$

Diese zeitgemittelte Energiedichte ist auch unabhängig vom Ort.

Mit den Feldern (IX.50) wird der Poynting-Vektor (IX.23b) zu

$$\vec{S}_{\text{e.m.}}(t,\vec{r}) = \frac{\vec{E}_0\times(\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0}\times\vec{E}_0)}{\mu_0 c}\cos^2\big(\omega_0 t - \vec{k}_0\cdot\vec{r}\big).$$

Im doppelten Kreuzprodukt $\vec{E}_0\times\big(\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0}\times\vec{E}_0\big) = \big(\vec{E}_0\big)^2\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0} - \big(\vec{E}_0\cdot\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0}\big)\vec{E}_0$ verschwindet der zweite Term wegen der Transversalität der elektromagnetischen Welle im Vakuum. Somit gilt

$$\vec{S}_{\text{e.m.}}(t,\vec{r}) = \frac{\vec{E}_0^2}{\mu_0 c}\cos^2\big(\omega_0 t - \vec{k}_0\cdot\vec{r}\big)\,\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0} \tag{IX.54}$$

gerichtet entlang der Ausbreitungsrichtung $\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0}$, wie es intuitiv der Fall sein soll.

Gemittelt über die Zeit ergibt sich

$$\Big\langle\vec{S}_{\text{e.m.}}(\vec{r})\Big\rangle = \frac{\vec{E}_0^2}{2\mu_0 c}\,\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0} = \frac{\epsilon_0\vec{E}_0^2}{2}\,c\,\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0},$$

d.h. nach Vergleich mit der zeitgemittelten Energiedichte (IX.53)

$$\Big\langle\vec{S}_{\text{e.m.}}(\vec{r})\Big\rangle = \langle e_{\text{e.m.}}(\vec{r})\rangle\,c\,\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0}. \tag{IX.55}$$

Dies entspricht der Stromdichte assoziiert mit einer Dichte $\langle e_{\text{e.m.}}(\vec{r})\rangle$, die sich mit der (gerichteten) Geschwindigkeit $c\,\vec{\mathrm{e}}_{\vec{k}_0}$ ausbreitet.