IX.1 Grundgesetze

In diesem Abschnitt werden zuerst die nicht-stationären Maxwell-Gleichungen dargelegt und die Deutung der zeitabhängigen Terme diskutiert (§ IX.1.1). Dann werden Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung hergeleitet (§ IX.1.2), deren Lösung oft einfacher ist.

IX.1.1 Maxwell-Gleichungen

Die schon in Kapitel VI eingeführten zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) \tag{IX.1a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t,\vec{r}) = 0 \tag{IX.1b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} = \vec{0} \tag{IX.1c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t,\vec{r}) - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}). \tag{IX.1d}$$

Relativ zu den stationären Gleichungen (VII.1) und (VIII.1) der Elektro- und Magnetostatik treten zwei neue Terme auf, und zwar die Zeitableitungen in den zwei letzten Gleichungen. Natürlich sind diese Zeitableitungen nötig, um eine mögliche Zeitentwicklung der Felder zu beschreiben.

IX.1.1 a Faraday-Induktionsgesetz

Schreibt man die Maxwell–Faraday-Gleichung (IX.1c) in der Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t}, \tag{IX.2}$$

so kann die Änderung der magnetischen Flussdichte auf der rechten Seite als Quellterm für die Rotation des elektrischen Feldes gesehen werden.

Zur Interpretation dieser Gleichung kann man eine feste ruhende orientierte Fläche $\mathcal{S}$ betrachten und Gl. (IX.2) darüber integrieren:

$$\int_{\mathcal{S}} \big[\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{r})\big] \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}} = -\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}}. \tag{IX.3}$$

Da die Fläche zeitunabhängig ist, kann die Zeitableitung auf der rechten Seite aus dem Integral herausgezogen werden:

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{S}} \vec{B}(t,\vec{r}) \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B(t),$$

wobei Φ_B der Fluss der magnetischen Induktion durch die Fläche $\mathcal{S}$ ist.

Wiederum kann die linke Seite der Gl. (IX.3) mit dem Integralsatz von Stokes transformiert werden: wenn $\partial\mathcal{S}$ den (orientierten) Rand der Fläche $\mathcal{S}$ bezeichnet, gilt

$$\int_{\mathcal{S}} \big[\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{r})\big] \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}} = \oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{E}(t,\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

Schließlich ergibt sich

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{E}(t,\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{S}} \vec{B}(t,\vec{r}) \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{IX.4}$$

Wendet man dieses Ergebnis auf den Fall an, wo die Fläche $\mathcal{S}$ durch einen ruhenden geschlossenen Kreisleiter $\mathscr{C}$ aufspannt wird (Abb. IX.1), so ist das Linienintegral entlang $\mathscr{C}$ die sog. *elektromotorische Kraft* U — die trotz ihrer Bezeichnung keine Kraft ist, sondern eine elektrische Spannung:

$$U \equiv \oint_{\mathscr{C}} \vec{E}(t,\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

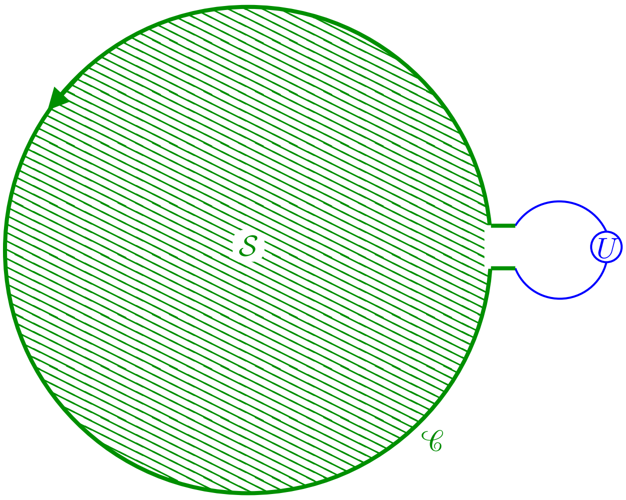

Abbildung IX.1

Dies entspricht der Energie erhalten durch eine Einheitsladung, wenn sie den Kreis einmal umläuft. (Wird der Kreis irgendwo leicht getrennt, so ist U die elektrische Spannung zwischen den Enden, wie in Abb. IX.1 dargestellt wird.) Dann ergibt sich das *Faraday-Induktionsgesetz*

$$\boxed{U = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B(t)}{\mathrm{d}t}.} \tag{IX.5}$$

Bemerkungen:

∗ Wenn die Fläche $\mathcal{S}$, durch welche der magnetische Fluss zeitlich variiert, nicht fest ist, müssen zusätzliche Terme in der obigen Argumentation berücksichtigt werden. Physikalisch bleibt das Ergebnis das gleiche.

∗ In einem geschlossenen Kreisleiter wird das induzierte elektrische Feld die Ladungsträger in Bewegung bringen, d.h. es entsteht ein elektrischer Strom. Wiederum wird dieser Strom über die Maxwell–Ampère-Gleichung ein magnetisches Feld $\vec{B}_{\text{ind.}}$ erzeugen, das nach der *Lenzschen*[al] *Regel* der Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife entgegenwirkt.

∗ Das Prinzip des Induktionsgesetzes wird zu Nutze gemacht, um elektrische Ströme zu erzeugen.

IX.1.1 b Maxwellscher Verschiebungsstrom

Die zweite Modifikation relativ zum stationären Fall ist die Zeitableitung in der Maxwell–Ampère-Gleichung (IX.1d), die sich auch als

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t,\vec{r}) = \mu_0 \left[\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t}\right] \tag{IX.6}$$

schreiben lässt. In dieser Form kann der zweite Term in den eckigen Klammern als eine Ladungsstromdichte interpretiert werden: dieser Term ist der sog. Maxwellsche *Verschiebungsstrom*.

Dank diesem Term enthalten die Maxwell-Gleichungen (IX.1) automatisch die *Ladungserhaltung* für die Quellen. Leitet man nämlich die Maxwell–Gauß-Gleichung (IX.1a) nach der Zeit ab, so ergibt sich

$$\frac{\partial \rho_{\text{el.}}(t,\vec{r})}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{r})\big].$$

[al] E. Lenz, 1804–1865

Andererseits lautet die Divergenz der Maxwell–Ampère-Gleichung (IX.1d)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \big[\vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{r})\big] - \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{r})}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{r})\big],$$

wobei in der zweiten Gleichung die partiellen Ableitungen von $\vec{E}$ nach der Zeit und nach den Ortskoordinaten ausgetauscht wurden, während $\vec{\nabla} \cdot \big(\vec{\nabla} \times \vec{B}\big) = 0$ benutzt wurde. Die Summe der zwei letzten Gleichungen lautet dann

$$\boxed{\frac{\partial \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) = 0.} \tag{IX.7}$$

Diese Differentialgleichung wird als *Kontinuitätsgleichung* bezeichnet. Sie stellt die lokale Formulierung der Erhaltung der elektrischen Ladung dar.

Um die entsprechende Integralform zu finden kann man ein festes Raumgebiet $\mathcal{V}$ mit Rand $\partial\mathcal{V}$ betrachten und die Gl. (IX.7) über das Volumen $\mathcal{V}$ integrieren:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r})}{\partial t} \, \mathrm{d}^3\vec{r} = -\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \, \mathrm{d}^3\vec{r}.$$

Da das Volumen $\mathcal{V}$ zeitunabhängig ist, kann die Zeitableitung im linken Glied aus dem Integral herausgezogen werden. Währenddessen kann das rechte Glied mit dem Integralsatz von Gauß transformiert werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \, \mathrm{d}^3\vec{r} = -\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}}. \tag{IX.8}$$

Der Term auf der linken Seite ist die (totale) Zeitableitung der Gesamtladung $Q_{\text{in}}(t)$ innerhalb des Volumens $\mathcal{V}$. Das Flächenintegral auf der rechten Seite ist der nach außen gerichtete Fluss der Ladungsstromdichte durch $\partial\mathcal{V}$. Physikalisch bedeutet Gl. (IX.8), dass die Änderung der Gesamtladung Q_{in} pro Zeiteinheit gleich der durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ „verlorenen“ Ladung pro Zeiteinheit ist: dies ist eine Bilanzgleichung für eine erhaltene Größe, nämlich hier die elektrische Ladung.

IX.4 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

In Abwesenheit von Quellen, $\rho_{\text{el.}} = 0$ und $\vec{\jmath}_{\text{el.}} = \vec{0}$, nehmen die Bewegungsgleichungen (IX.9) und (IX.11) für die elektromagnetischen Felder oder (IX.21) für die Potentiale in Lorenz-Eichung die gleiche Form an, und zwar

$$\boxed{\text{im Vakuum}\ \begin{cases} \square\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{0} \quad \text{und} \quad \square\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{0}; & \text{(IX.29a)} \\[2ex] \square\Phi(t,\vec{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \square\vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{0} \quad \text{(in Lorenz-Eichung).} & \text{(IX.29b)} \end{cases}}$$

Zur Umschreibung einiger Gleichungen führt man eine positive Zahl c gemäß

$$\boxed{c^2 \equiv \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}} \tag{IX.29c}$$

ein. Dann wird der D'Alembert-Operator (IX.10) zu

$$\boxed{\square \equiv -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \triangle}. \tag{IX.29d}$$

Die Bewegungsgleichungen (IX.29) sind alle der gleichen Form $\square f(t,\vec{r}) = 0$, mit einer skalaren oder vektoriellen Funktion f. Die Lösungen dieser Differentialgleichung — die auch in anderen Bereichen der Physik auftritt — werden zunächst in § IX.4.1 vorgestellt. Dann werden die Ergebnisse auf den Fall des elektromagnetischen Feldes im Vakuum angewandt, wobei die Eigenschaften des Feldes einer Welle präzisiert werden (§ IX.4.2).

IX.4.1 Klassische Wellengleichung

Dieses Paragraph befasst sich mit der Herleitung der (genügend regulären) reellen Lösungen der (*klassischen*) *Wellengleichung*[78] oder *D'Alembert-Gleichung*

$$\square f(t,\vec{r}) = 0 \tag{IX.30}$$

für skalare Funktionen f, wobei der D'Alembert-Operator durch Gl. (IX.29d) definiert ist.

IX.4.1 a Ebene Wellen

Als einfaches aber wichtiges Beispiel kann man zunächst eine Lösung betrachten, die von einer einzigen (kartesischen) Raumkoordinate $z = x^3$ abhängt: $f(t,z)$. Diese ist somit unabhängig von den dazu orthogonalen Koordinaten x^1, x^2, d.h. sie ist konstant in der sog. *transversalen* (x^1, x^2) Ebene, weshalb sie als *ebene Welle* bezeichnet wird.

Unter dieser Annahme wird die klassische Wellengleichung (IX.30) zur $(1+1)$-dimensionalen Differentialgleichung

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial z^2} = 0. \tag{IX.31}$$

Der Differentialoperator dieser Gleichung lässt sich als Produkt von Operatoren erster Ordnung schreiben:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f(t,z) = 0. \tag{IX.32}$$

[78] Gleichung (IX.30) wird oft als *die* Wellengleichung bezeichnet. Man findet aber auch andere partielle Differentialgleichungen mit zeit- und ortsabhängigen Lösungen, die als Wellen bezeichnet werden — z.B. für Schwerewellen in Flüssigkeiten, Stoßwellen in Fluiden, oder Wellenfunktionen in der Quantenmechanik. Deshalb wird hier die Bezeichnung „klassische Wellengleichung“ verwendet.

Zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung lohnt es sich, die Variablenänderung

$$x^+ \equiv z + ct \quad , \quad x^- \equiv z - ct \tag{IX.33a}$$

durchzuführen. Die entsprechende Rücktransformation zu den ursprünglichen Variablen lautet

$$t = \frac{x^+ - x^-}{2c} \quad , \quad x = \frac{x^+ + x^-}{2}. \tag{IX.33b}$$

Die partiellen Ableitungen nach den neuen Variablen lassen sich mit Hilfe der Kettenregel durch die Ableitungen nach den alten Variablen ausdrücken, und zwar

$$\frac{\partial}{\partial x^+} = \frac{\partial t}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{IX.34a}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x^-} = \frac{\partial t}{\partial x^-}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x^-}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{IX.34b}$$

Dank diesen Ergebnissen lautet die Differentialgleichung (IX.32) in den neuen Variablen

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^-}\frac{\partial}{\partial x^+}f(x^+, x^-) = 0,$$

d.h. noch

$$\frac{\partial^2 f(x^+, x^-)}{\partial x^- \partial x^+} = 0. \tag{IX.35}$$

Die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist der Form

$$f(x^+, x^-) = f_-(x^+) + f_+(x^-)$$

wobei f_- und f_+ zwei beliebige Funktionen einer einzigen reellen Variablen sind. Kommt man zurück zu den ursprünglichen Variablen t, z, so lautet die allgemeine Lösung der Gl. (IX.31)

$$f(t, z) = f_-(z + ct) + f_+(z - ct). \tag{IX.36}$$

Dieses mathematische Ergebnis lässt sich einfach physikalisch interpretieren. Betrachte man beispielsweise die Funktion $f_+(z - ct)$: sie nimmt den gleichen Wert für alle Raumzeitpunkte (t, z) an, für welche $z - ct$ einen konstanten Wert hat. Somit bleibt das Profil entlang der z-Achse des durch f modellierten Signals zur Zeit $t = t_0$ global unverändert zu einem späteren Zeitpunkt t_1. Es wird nur in positive z-Richtung um $\Delta z \equiv c(t_1 - t_0)$ verschoben, entsprechend einer Ausbreitung des Signals mit Geschwindigkeit $+c$.

Wiederum modelliert der Term f_- ein Signal, das sich in negative z-Richtung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c — will man die Richtung auch in der Geschwindigkeit berücksichtigen: $-c$ — fortpflanzt.

Solche sich ausbreitende Signale werden als *fortschreitende Wellen* bezeichnet.[78] Dann ist die allgemeine Lösung (IX.36) eine Superposition von rechts- und linkslaufenden ebenen Wellen.

Bemerkungen:

∗ Da die D'Alembert-Gleichung in einer räumlichen Dimension (IX.31) sowohl rechts- als linkslaufende Wellen beschreiben kann, wird sie manchmal *Zweiweg-Wellengleichung* genannt. Im Gegensatz dazu haben die Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t, z) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t, z) = 0 \tag{IX.37}$$

die allgemeinen Lösungen $f(t, z) = f_-(z + ct)$ bzw. $f(t, z) = f_+(z - ct)$, d.h. fortschreitende Wellen, die nur nach links bzw. rechts propagieren. Dementsprechend werden die Gleichungen (IX.37) *Einweg-Wellengleichungen* (in einer Dimension) genannt.

$*$ Im Fall mit $f_- = f_+$ in der Lösung (IX.36) breitet sich die resultierende Welle f nicht mehr aus: es handelt sich um eine *stehende Welle*.