Kapitel IX

Zeitabhängige elektromagnetische Felder

Im Gegensatz zu den stationären Fällen der Elektro- und Magnetostatik sind das elektrische und das magnetische Feld im allgemeineren zeitabhängigen Fall miteinander gekoppelt. Diese Kopplung wird durch zusätzliche Terme in den Grundgleichungen berücksichtigt, die zu neuen Phänomenen führen (Abschn. IX.1).

In Abschn. IX.2 wird gezeigt, dass sich das elektrische und das magnetische Feld aus elektromagnetischen Potentialen ableiten lassen, die nicht eindeutig bestimmt sind. Darüber hinaus werden Bewegungsgleichungen für diese Potentiale hergeleitet. Dem elektromagnetischen Feld können noch eine Energie und ein Impuls zugeordnet werden, oder genauer, entsprechende Dichten und Stromdichten (Abschn. IX.3), die ziemlich anschaulichen Bilanzgleichungen genügen.

Der zweite Teil des Kapitels befasst sich mit Anwendungen der zuvor eingeführten Begriffe und Ergebnisse. Zunächst werden Lösungen zu den Bewegungsgleichungen für die Felder oder Potentiale im Vakuum in Abwesenheit von Quellen untersucht, entsprechend elektromagnetischen Wellen (Abschn. IX.4). Dann wird eine allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen mit Hilfe sogenannter retardierter Potentiale dargelegt, die das elektromagnetische Feld erzeugt durch beliebige Ladungs- und Stromverteilungen angibt (Abschn. IX.5).

IX.1 Grundgesetze

In diesem Abschnitt werden zuerst die nicht-stationären Maxwell-Gleichungen dargelegt und die Deutung der zeitabhängigen Terme diskutiert (§ IX.1.1). Dann werden Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung hergeleitet (§ IX.1.2), deren Lösung oft einfacher ist.

IX.1.1 Maxwell-Gleichungen

Die schon in Kapitel VI eingeführten zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) \tag{IX.1a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t,\vec{r}) = 0 \tag{IX.1b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} = \vec{0} \tag{IX.1c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t,\vec{r}) - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} = \mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}). \tag{IX.1d}$$

Relativ zu den stationären Gleichungen (VII.1) und (VIII.1) der Elektro- und Magnetostatik treten zwei neue Terme auf, und zwar die Zeitableitungen in den zwei letzten Gleichungen. Natürlich sind diese Zeitableitungen nötig, um eine mögliche Zeitentwicklung der Felder zu beschreiben.

IX.1.2 Bewegungsgleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder

Die Maxwell-Gleichungen (IX.1) sind gekoppelte partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für $\vec{E}(t,\vec{r})$ und $\vec{B}(t,\vec{r})$. Mit einigen Umrechnungen lassen sich entkoppelte Bewegungsgleichungen erhalten.

Somit ist die Differentialgleichung (IX.9) für $\vec{E}(t,\vec{r})$ unabhängig von $\vec{B}(t,\vec{r})$, und umgekehrt tritt $\vec{E}(t,\vec{r})$ nicht in der Bewegungsgleichung (IX.11) für $\vec{B}(t,\vec{r})$ auf. Die beiden Felder bleiben aber miteinander gekoppelt, beispielsweise über die Maxwell–Faraday-Gleichung (IX.1c). Das heißt, man kann zwar entkoppelte Bewegungsgleichungen finden, die aber nicht unabhängig voneinander sind: physikalisch wird die Kopplung nicht aufgehoben.

IX.1.2 a Bewegungsgleichung für das elektrische Feld

Die Rotationsbildung der Maxwell–Faraday-Gleichung (IX.1c) ergibt

$$\vec{\nabla} \times \big[\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{r})\big] + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} = \vec{0}.$$

Der erste Term kann mit der Identität $\vec{\nabla} \times \big(\vec{\nabla} \times \vec{V}\big) = \vec{\nabla}\big(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\big) - \triangle\vec{V}$ transformiert werden. Im zweiten Term können partielle Zeit- und Raumableitung ausgetauscht werden, was zu

$$\vec{\nabla}\big[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t,\vec{r})\big] - \triangle\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{\nabla} \times \vec{B}(t,\vec{r})\big] = \vec{0}$$

führt. Dabei kann $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ unter Verwendung der Maxwell–Gauß-Gleichung (IX.1a) durch die Ladungsdichte ausgedrückt werden. Währenddessen lässt sich $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ mithilfe der Maxwell–Ampère-Gleichung (IX.1d) umschreiben. Dies ergibt

$$\frac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) - \triangle\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t}\right] = \vec{0}.$$

Äquivalent gilt

$$\boxed{\Box\vec{E}(t,\vec{r}) \equiv -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t^2} + \triangle\vec{E}(t,\vec{r}) = \mu_0\frac{\partial\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r})}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}).} \tag{IX.9}$$

Dabei ist der *d'Alembert*[(am)]*-Operator* $\Box$ gemäß

$$\Box \equiv -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \triangle \tag{IX.10}$$

definiert.[(75)]

IX.1.2 b Bewegungsgleichung für das magnetische Feld

Betrachtet man als Anfangspunkt die Maxwell–Ampère-Gleichung (IX.1d) und bildet man deren Rotation, so ergibt sich

$$\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{r})\right] - \epsilon_0\mu_0\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} = \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}).$$

Dabei ist $\vec{\nabla}\times\big(\vec{\nabla}\times\vec{B}\big)$ wegen der Maxwell–Thomson-Gleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ einfach gleich $-\triangle\vec{B}$. Dann können Ableitungen bezüglich der Zeit- und Ortsvariablen im zweiten Term ausgetauscht werden, und die resultierende Rotation $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ mithilfe der Maxwell–Faraday-Gleichung (IX.1c) umgeschrieben werden. Insgesamt ergibt sich

$$-\triangle\vec{B}(t,\vec{r}) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t^2} = \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}),$$

d.h.

$$\boxed{\Box\vec{B}(t,\vec{r}) \equiv -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t^2} + \triangle\vec{B}(t,\vec{r}) = \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}).} \tag{IX.11}$$

Die Gleichungen (IX.9) für das elektrische Feld $\vec{E}$ und (IX.11) für die magnetische Induktion $\vec{B}$ sind anscheinend entkoppelte (inhomogene) lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Felder sollen aber noch der Maxwell–Faraday-Gleichung (IX.1c) genügen, so dass sie nicht unabhängig voneinander sind: die Bewegungsgleichungen (IX.9) und (IX.11) sind also eigentlich redundant.

IX.2 Elektrodynamische Potentiale

Wie im stationären Fall können ein Skalar- und ein Vektorpotential eingeführt werden, aus denen sich das elektrische und das magnetische Feld ableiten lassen (§ IX.2.1). Im Gegensatz zu den stationären Potentialen hängen aber jetzt beide Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ vom Vektorpotential ab. Dementsprechend sind die Eichtransformationen der Potentiale, welche die elektromagnetischen Felder invariant lassen,

[(75)] Oft wird der d'Alembert-Operator als das Negative des hier betrachteten Differentialoperators definiert.

[(am)] J. le Rond d'Alembert, 1717–1783

nicht unabhängig voneinander, sondern beide Potentiale müssen gleichzeitig transformiert werden (§ IX.2.2). Schließlich werden in § IX.2.3 Bewegungsgleichungen für die Potentiale dargelegt, die aus den Maxwell-Gleichungen folgen.

IX.2.1 Definition

IX.2.1 a Vektorpotential

Die Maxwell–Thomson-Gleichung (IX.1b) hat die gleiche Form, wie in der Magnetostatik. Daher kann man wie in § VIII.1.1 die Existenz eines differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ folgern, mit dem die Beziehung

$$\boxed{\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t,\vec{r})} \tag{IX.12}$$

in jedem Punkt $\vec{r}$ und zu jeder Zeit t erfüllt wird: $\vec{A}(t,\vec{r})$ ist das (elektrodynamische) *Vektorpotential*.

Ähnlich wie in der Magnetostatik existiert eine (Eich)Freiheit in der Auswahl von $\vec{A}(t,\vec{r})$. Ist ein erstes Vektorpotential $\vec{A}$ für eine bestimmte magnetische Induktion $\vec{B}$ geeignet, dann so ist auch das Vektorfeld $\vec{A}'(t,\vec{r}) \equiv \vec{A}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{r})$, wobei $\chi(t,\vec{r})$ eine beliebige skalare Funktion von Zeit und Ort ist.

IX.2.1 b Skalarpotential

Setzt man die Beziehung (IX.12) in die Maxwell–Faraday-Gleichung (IX.1c) ein, so kommt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{\nabla} \times \vec{A}(t,\vec{r})\big] = \vec{0}.$$

Nach Austauschen der Zeit- und Ortsableitungen im zweiten Term kann man einfacher

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\right] = \vec{0}.$$

schreiben. Daraus folgt, dass es ein skalares Feld $\Phi(t,\vec{r})$ existiert, das (elektrodynamische) *Skalarpotential*, das die Beziehung

$$\boxed{\vec{E}(t,\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}} \tag{IX.13}$$

zu jeder Zeit t und in jedem Punkt $\vec{r}$ erfüllt.

Im stationären Fall findet man die Beziehung (VII.3) zwischen elektrostatischem Potential und Feld wieder.

IX.2.2 Eichinvarianz

IX.2.2 a Eichtransformationen

Zwei Vektorpotentiale $\vec{A}$ und $\vec{A}' \equiv \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ führen zwar über die Beziehung (IX.12) zum gleichen magnetischen Feld $\vec{B}$; laut der Gl. (IX.13) würden sie zu unterschiedlichen elektrischen Feldern $\vec{E}$, $\vec{E}'$ führen.

Führt man aber eine gleichzeitige Transformation des Vektor- und des Skalarpotentials, und zwar die *Eichtransformation*

$$\Phi(t,\vec{r}) \to \Phi'(t,\vec{r}) \equiv \Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial \chi(t,\vec{r})}{\partial t}, \tag{IX.14a}$$

$$\vec{A}(t,\vec{r}) \to \vec{A}'(t,\vec{r}) \equiv \vec{A}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{r}), \tag{IX.14b}$$

wobei die skalare Funktion $\chi(t,\vec{r})$ beliebig ist, so bleiben die zwei abgeleiteten Felder $\vec{E}(t,\vec{r})$ und $\vec{B}(t,\vec{r})$ unverändert.

Beispiel: Dem elektromagnetischen Feld bestehend aus einem stationären und gleichförmigen elektrischen Feld $\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0$ und einer verschwindenden magnetischen Induktion $\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{0}$ kann man z.B. die einfachen Potentiale

$$\Phi(t,\vec{r}) = -\vec{r}\cdot\vec{E}_0, \quad \vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{0},$$

oder

$$\Phi'(t,\vec{r}) = 0, \quad \vec{A}'(t,\vec{r}) = -\vec{E}_0\, t$$

zuordnen. Eine Funktion χ, die von den ersten zu den zweiten führt, ist $\chi(t,\vec{r}) = -\vec{r}\cdot\vec{E}_0\, t$ (dazu darf man natürlich eine additive Konstante hinzufügen).

IX.2.2 b Spezielle Eichungen

Die Eichfreiheit kann benutzt werden, um eine Eichung zu benutzen, in welcher einige Gleichungen eine einfachere Form annehmen.

Eine erste oft auftretende Wahl ist die *Coulomb-Eichung*, die durch die Bedingung

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}) = 0.} \tag{IX.15}$$

[vgl. Gl. (VIII.4)] definiert ist. Bei festen $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feldern ist es immer möglich, Potentiale zu finden, die der Coulomb-Eichbedingung (IX.15) genügen.

Seien Φ, $\vec{A}$ Potentiale für ein gegebenes elektromagnetisches Feld. Wenn $\vec{A}$ die Bedingung (IX.15) erfüllt, ist der Fall erledigt. Sonst sucht man eine Funktion $\chi(t,\vec{r})$ derart, dass die über Gl. (IX.14) eichtransformierten Potentiale Φ', $\vec{A}'$ die Coulomb-Eichbedingung erfüllen. Die Divergenzbildung der Beziehung (IX.14b) zwischen $\vec{A}'$ und $\vec{A}$ lautet

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'(t,\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\chi(t,\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}) + \triangle\chi(t,\vec{r}).$$

Das Ziel ist, dass $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'(t,\vec{r}) = 0$ gilt. Dafür soll man eine Funktion χ finden, die die inhomogene Poisson-Gleichung

$$\triangle\chi(t,\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})$$

löst, wobei die rechte Seite eine vorgegebene Funktion ist. Laut den Ergebnissen des Abschn. VII.2 existiert eine solche Lösung immer. □

Eine andere günstige Eichung ist die *Lorenz*[an]*-Eichung*, entsprechend der Bedingung

$$\boxed{\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}) = 0.} \tag{IX.16}$$

Wir werden in § IX.2.3 c sehen, dass sich die Bewegungsgleichungen für die Potentiale in der Lorenz-Eichung stark vereinfachen. Ein zweiter Vorteil der Eichung wird auch in § XII.1.2 diskutiert.

Die Coulomb- und Lorenz-Eichbedingungen legen die elektromagnetischen Potentiale Φ und $\vec{A}$ nicht vollständig fest, sondern man kann in beiden Fällen unterschiedliche Paare $(\Phi,\vec{A})$ finden, welche die zugehörige Bedingung erfüllen.

Dies ist trivial der Fall der Coulomb-Eichung, deren Bedingung (IX.15) das Skalarpotential frei lässt. Dass auch die Lorenz-Eichung „unvollständig" ist, lässt sich einfach beweisen. Seien $(\Phi,\vec{A})$ und $(\Phi',\vec{A}')$ Paare von Potentialen, die der Gl. (IX.16) genügen, wobei die gestrichenen Potentiale mit den nicht-gestrichenen über die Beziehungen (IX.14) zusammenhängen. Dann gilt

$$\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi'(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}'(t,\vec{r}) - \left[\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})\right] = 0,$$

d.h. nach einer einfachen Berechnung

$$-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\chi(t,\vec{r})}{\partial t^2} + \triangle\chi(t,\vec{r}) = \Box\chi(t,\vec{r}) = 0. \tag{IX.17}$$

[an] L. Lorenz, 1829–1891

Diese Differentialgleichung hat nicht-triviale Lösungen — die in § IX.4.1 unten diskutiert werden —, so dass die gestrichenen und nicht-gestrichenen Potentiale ungleich sind.

IX.2.3 Bewegungsgleichungen für die elektrodynamischen Potentiale

IX.2.3 a Bewegungsgleichung für das Vektorpotential

Das Einsetzen der Beziehungen (IX.12) und (IX.13) in die Maxwell–Ampère-Gleichung ergibt unter Berücksichtigung der Formel für die Rotation einer Rotation

$$\begin{aligned}\mu_0\vec{\jmath}_{\rm el.}(t,\vec{r}) &= \vec{\nabla}\times\big[\vec{\nabla}\times\vec{A}(t,\vec{r})\big] - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\bigg[-\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\bigg] \\ &= \vec{\nabla}\big[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})\big] - \triangle\vec{A}(t,\vec{r}) + \epsilon_0\mu_0\vec{\nabla}\bigg[\frac{\partial\Phi(t,\vec{r})}{\partial t}\bigg] + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Nach trivialer Umschreibung lautet dies

$$\boxed{\Box\vec{A}(t,\vec{r}) \equiv -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t^2} + \triangle\vec{A}(t,\vec{r}) = -\mu_0\vec{\jmath}_{\rm el.}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\bigg[\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})\bigg].} \tag{IX.18}$$

Diese lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung stellt die Bewegungsgleichung für das Vektorpotential $\vec{A}(t,\vec{r})$ dar.

Bemerkung: Im zeitunabhängigen Fall vereinfacht sich Gl. (IX.18) zur Gleichung (VIII.8).

IX.2.3 b Bewegungsgleichung für das Skalarpotential

Setzt man in die Maxwell–Gauß-Gleichung (IX.1a) die Beziehung (IX.13) ein, so kommt

$$\frac{\rho_{\rm el.}(t,\vec{r})}{\epsilon_0} = \vec{\nabla}\cdot\bigg[-\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\bigg] = -\triangle\Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})\big]$$

oder äquivalent

$$\triangle\Phi(t,\vec{r}) = -\frac{\rho_{\rm el.}(t,\vec{r})}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})\big]. \tag{IX.19}$$

Man kann noch $\epsilon_0\mu_0\,\partial^2\Phi(t,\vec{r})/\partial t^2$ von beiden Seiten dieser Gleichung abziehen, um die Bewegungsgleichung in eine Form ähnlich der Gl. (IX.18) zu bringen:

$$\boxed{\Box\Phi(t,\vec{r}) \equiv -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\Phi(t,\vec{r})}{\partial t^2} + \triangle\Phi(t,\vec{r}) = -\frac{\rho_{\rm el.}(t,\vec{r})}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\bigg[\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})\bigg].} \tag{IX.20}$$

Bemerkung: Im stationären Fall vereinfacht sich Gl. (IX.20), oder noch einfacher Gl. (IX.19), zur Poisson-Gleichung (VII.4) der Elektrostatik.

IX.2.3 c Bewegungsgleichungen in speziellen Eichungen

Arbeitet man in der durch die Bedingung (IX.16) definierten Lorenz-Eichung, so vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (IX.18) und (IX.20) erheblich, und zwar zu

$$\boxed{\text{in Lorenz-Eichung}\ \left\{\begin{aligned}\Box\Phi(t,\vec{r}) &= -\frac{\rho_{\rm el.}(t,\vec{r})}{\epsilon_0} &&\text{(IX.21a)}\\ \Box\vec{A}(t,\vec{r}) &= -\mu_0\vec{\jmath}_{\rm el.}(t,\vec{r}). &&\text{(IX.21b)}\end{aligned}\right.}$$

Somit nehmen die Bewegungsgleichungen für die Potentiale die gleiche Form wie solche (IX.9), (IX.11) für die daraus abgeleiteten $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder an.