VIII.2 Multipolentwicklung

Ähnlich der in Abschn. VII.3 studierten Entwicklung des elektrostatischen Skalarpotentials $\Phi(\vec{r})$ einer Ladungsverteilung $\rho_{\text{el.}}$ als Summe der durch sukzessive Multipolmomente erzeugten Potentiale, wobei das 2^ℓ-te Moment einen Beitrag proportional zu $1/r^{\ell+1}$ liefert, kann das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ einer Ladungsstromverteilung $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ ebenfalls als Summe der Effekte von Multipolmomenten geschrieben werden.

VIII.2.1 Multipolmomente einer Ladungsstromverteilung

Es wird angenommen, dass die Stromverteilung innerhalb eines Volumens $\mathcal{V}$ in der Umgebung des Ursprungs des Bezugssystems lokalisiert ist, wobei $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ in jedem Punkt des Rands $\partial\mathcal{V}$ von $\mathcal{V}$ Null ist. Das magnetische Feld wird in einem weit entfernten Punkt $\vec{r}$ gesucht, d.h. $|\vec{r}-\vec{r}\,'| \gg R$ für jeden $\vec{r}\,' \in \mathcal{V}$, wobei R eine typische Länge für das Volumen $\mathcal{V}$ ist.

Gemäß der Gl. (VIII.9) lautet das Vektorpotential (in Coulomb-Eichung)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

Dank den Annahmen ist der Abstand $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ im Nenner des Integranden ungefähr gleich $r \equiv |\vec{r}|$. Somit kann der Bruch $1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ mithilfe einer Taylor-Entwicklung angenähert werden.Zur ersten

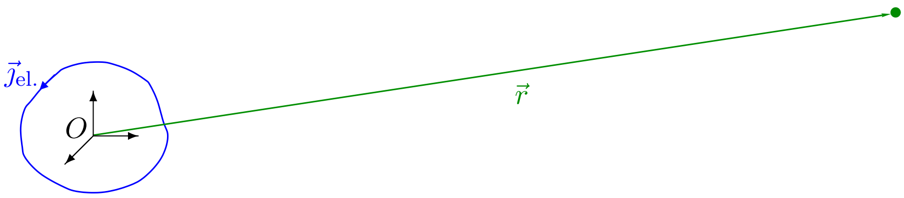

Abbildung VIII.5

Ordnung in $\vec{r}'$ gilt

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \mathcal{O}\bigg(\frac{1}{r^3}\bigg) = \frac{1}{r} + \sum_{k=1}^{3} \frac{x^k}{r^3} x'^k + \mathcal{O}\bigg(\frac{1}{r^3}\bigg),$$

wobei die $\{x^k\}$ bzw. $\{x'^k\}$ die kartesischen Koordinaten von $\vec{r}$ bzw. $\vec{r}\,'$ in einem System mit Basisvektoren $\{\vec{e}_k\}$ sind. Das Einsetzen dieser Entwicklung in die Formel für das Vektorpotential gibt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{\mathcal{V}} \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\sum_{k=1}^{3} x^k \int_{\mathcal{V}} x'^k \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' + \cdots . \tag{VIII.26}$$

Die Integrale in dieser Entwicklung des Vektorpotentials in Potenzen von $1/r$ sind die (kartesischen) *magnetischen Multipolmomente* der Ladungsstromverteilung. Wie wir jetzt sehen werden ist der erste Term in der Tat Null, so dass der führende Beitrag jener des Dipolmoments ist.

Lemma: Sei f bzw. $\vec{J}$ eine kontinuierlich differenzierbare skalare Funktion bzw. ein quellfreies Vektorfeld auf einem Bereich $\mathcal{V}$, wobei $\vec{J}$ in jedem Punkt des Rands $\partial\mathcal{V}$ von $\mathcal{V}$ verschwindet. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = 0. \tag{VIII.27}$$

Beweis: Dank der Annahme $\vec{J}(\vec{r}\,') = \vec{0}$ in jedem Punkt $\vec{r}\,' \in \partial\mathcal{V}$ gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} f(\vec{r}\,')\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}} = 0.$$

Die Transformation des Oberflächenintegrals mit dem Integralsatz von Gauß ergibt unter Verwendung der Produktregel

$$0 = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot\big[f(\vec{r}\,')\vec{J}(\vec{r}\,')\big]\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \int_{\mathcal{V}} \big[f(\vec{r}\,')\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r}\,') + \vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r}\,')\big]\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

Der erste Term in den eckigen Klammern verschwindet dank der Quellfreiheit von $\vec{J}$, woraus das gesuchte Ergebnis folgt. □

Wendet man dieses Lemma mit $\vec{J} = \vec{\jmath}_{\text{el.}}$ und $f(\vec{r}\,') = x'^k$ an, wobei eine triviale Berechnung $\vec{\nabla} f(\vec{r}\,') = \vec{e}_k$ ergibt, so kommt für jedes $k = 1, 2, 3$

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \int_{\mathcal{V}} j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = 0,$$

d.h. insgesamt

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \vec{0}. \tag{VIII.28}$$

Somit ist der erste Beitrag auf der rechten Seite der Multipolentwicklung (VIII.26) Null. Das heißt, es gibt keine „magnetische Monopole" — entsprechend der Abwesenheit eines Quellterms auf der rechten Seite der Maxwell–Thomson-Gleichung (VIII.1a).

Sei jetzt $f(\vec{r}\,') = x'^k x'^l$ mit $k, l \in \{1, 2, 3\}$; dann ist $\vec{\nabla} f(\vec{r}\,') = x'^l\,\vec{e}_k + x'^k\,\vec{e}_l$ und das Lemma (VIII.27) gibt

$$\int_{\mathcal{V}} \big[x'^l j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,') + x'^k j^l_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\big]\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = 0.$$

Diese Gleichung kann verwendet werden, um das Integral des zweiten Terms in Gl. (VIII.26) umzuschreiben:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} x'^k \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' &= \sum_{l=1}^{3} \vec{\mathrm{e}}_l \int_{\mathcal{V}} x'^k j^l_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \\ &= \sum_{l=1}^{3} \vec{\mathrm{e}}_l \left\{ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \left[x'^k j^l_{\text{el.}}(\vec{r}\,') + x'^l j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\right] \mathrm{d}^3\vec{r}\,' + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \left[x'^k j^l_{\text{el.}}(\vec{r}\,') - x'^l j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\right] \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \right\} \\ &= \sum_{l=1}^{3} \frac{\vec{\mathrm{e}}_l}{2} \int_{\mathcal{V}} \left[x'^k j^l_{\text{el.}}(\vec{r}\,') - x'^l j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\right] \mathrm{d}^3\vec{r}\,'. \end{aligned} \tag{VIII.29}$$

Als nächstes kann das Integrand in der dritten Zeile als

$$x'^k j^l_{\text{el.}}(\vec{r}\,') - x'^l j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,') = \sum_{m,n=1}^{3} \left(\delta^{km}\delta^{ln} - \delta^{lm}\delta^{kn}\right) x'^m j^n_{\text{el.}}(\vec{r}\,') = \sum_{i,m,n=1}^{3} \epsilon^{ikl}\epsilon^{imn} x'^m j^n_{\text{el.}}(\vec{r}\,')$$

geschrieben werden. Definiert man das *magnetische Dipolmoment* der elektrischen Ladungsstromverteilung durch

$$\boxed{\vec{\mu} \equiv \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \vec{r}\,' \times \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'} \tag{VIII.30a}$$

mit kartesischen Komponenten

$$\mu^i = \sum_{m,n=1}^{3} \frac{\epsilon^{imn}}{2} \int_{\mathcal{V}} x'^m j^n_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,', \tag{VIII.30b}$$

so gilt

$$\int_{\mathcal{V}} x'^k \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \sum_{i,l=1}^{3} \epsilon^{ikl}\mu^i\,\vec{\mathrm{e}}_l.$$

Nach Multiplikation mit x^k und Summe über $k = 1,2,3$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{3} x^k \int_{\mathcal{V}} x'^k \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \sum_{i,k,l=1}^{3} \epsilon^{ikl}\mu^i\,x^k\,\vec{\mathrm{e}}_l = \vec{\mu}\times\vec{r}.$$

Somit wird die Entwicklung (VIII.26) zu

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3} + \cdots} \tag{VIII.30c}$$

Die zugehörige magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ ergibt sich aus der Rotationsbildung dieses Vektorpotentials. Insbesondere gilt für das magnetische Feld eines reinen magnetischen Dipols $\vec{\mu}$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{\mu})\vec{r} - \vec{r}^{\,2}\vec{\mu}}{r^5}.} \tag{VIII.31}$$

Wie erwartet nimmt der Betrag des Vektorpotentials (VIII.30c) wie $1/r^2$ ab, und dementsprechend die Stärke des magnetischen Feldes wie $1/r^3$.

Bemerkungen:

$*$ Die SI-Einheit des magnetischen Dipolmoments ist das $\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$, entsprechend der physikalischen Dimension $[\mu] = \mathsf{I}\,\mathsf{L}^2$.

$*$ Die Gleichungen (VIII.30c) und (VIII.31) für das Potential und das Feld eines magnetischen Dipols sind analog den Gl. (VII.34a) und (VII.34b) für einen elektrostatischen Dipol.

VIII.2.2 Magnetisches Dipolmoment einer Leiterschleife

Durch eine Leiterschleife $\mathscr{C}$ fließt ein elektrischer Strom I, der einer Ladungsstromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ entspricht. Unter Nutzung der Substitution (VIII.18) lautet das zugehörige magnetische Dipolmoment (VIII.31)

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{1}{2}\oint_{\mathscr{C}} I\,\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{\ell},$$

wobei $\mathrm{d}\vec{\ell}$ das gerichtete Linienelement entlang der Schleife bezeichnet. Im Integranden ist $\frac{1}{2}\,\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{\ell}$ ein Vektor, der senkrecht zur Ebene der Schleife steht, und dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt $\mathrm{d}\mathcal{S}$ des durch $\vec{r}$ und $\mathrm{d}\vec{\ell}$ aufgespannten Dreiecks ist. In der Integration entlang der Schleife ergibt sich die gesamte Fläche $\mathcal{S}$, die durch den Leiter aufgespannt wird, und somit

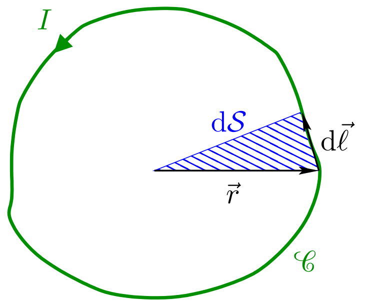

Abbildung VIII.6

$$\vec{\mu} = I\,\vec{\mathcal{S}} \tag{VIII.32}$$

wobei der orthogonale Flächenvektor $\vec{\mathcal{S}}$ in Richtung des Daumens der rechten Hand zeigt, wenn die anderen Finger die Richtung des Stroms anzeigen.

Bemerkungen:

∗ Das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl des Ursprungspunktes $\vec{r} = \vec{0}$, der auch außer der Schleife gewählt werden kann.

∗ Betrachtet man die bewegten Ladungsträger in der Leiterschleife, die für die elektrische Stromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ verantwortlich sind, so ist das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ proportional zu deren Bahndrehimpuls $\vec{L}$.

VIII.2.3 Magnetischer Dipol in einem äußeren magnetischen Feld

Der Einfluss eines magnetischen Feldes auf eine Stromverteilung kann durch die magnetischen Multipolmomente der letzeren ausgedrückt werden.

VIII.2.3 a Kraft auf einen magnetischen Dipol in einem magnetischen Feld

Sei angenommen, dass sich die Stromverteilung $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ innerhalb eines Gebiets $\mathcal{V}$ in der Umgebung des Nullpunkts des Koordinatensystems befindet, wo eine nicht-spezifizierte Quelle eine magnetische Induktion $\vec{B}$ erzeugt. Ausgehend von der Lorentz-Kraftdichte (VIII.23) lautet die Kraft auf die Stromverteilung

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r}.$$

Dessen i-te kartesische Komponente lautet

$$F^i = \epsilon^{ikl}\int_{\mathcal{V}} j^k_{\text{el.}}(\vec{r})\,B^l(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r}.$$

In diesem Ausdruck kann das magnetische Feld als Taylor-Entwicklung um den Nullpunkt geschrieben werden:

$$B^l(\vec{r}) = B^l(\vec{0}) + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}B^l(\vec{0}) + \cdots.$$

Somit gilt

$$F^i = \sum_{k,l=1}^{3}\epsilon^{ikl}\left[\int_{\mathcal{V}} j^k_{\text{el.}}(\vec{r})\,B^l(\vec{0})\,\mathrm{d}^3\vec{r} + \int_{\mathcal{V}} j^k_{\text{el.}}(\vec{r})\,\vec{r}\cdot\vec{\nabla}B^l(\vec{0})\,\mathrm{d}^3\vec{r} + \cdots\right].$$

Im ersten Term auf der rechten Seite kann $B^l(\vec{0})$ aus dem Integral herausgezogen werden: dieser konstante Faktor multipliziert dann das Volumenintegral von $j^k_{\text{el.}}$, das gemäß Gl. (VIII.28) Null ist.

Es bleibt

$$F^i = \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon^{ikl} \int_{\mathcal{V}} j^k_{\text{el.}}(\vec{r})\, \vec{r}\cdot\vec{\nabla}B^l(\vec{0})\, \mathrm{d}^3\vec{r} + \cdots = \sum_{j,k,l=1}^{3} \epsilon^{ikl} \int_{\mathcal{V}} j^k_{\text{el.}}(\vec{r})\, x^j\, \frac{\partial B^l(\vec{0})}{\partial x^j}\, \mathrm{d}^3\vec{r} + \cdots$$

übrig. Die Ableitung im Integranden ist eine Konstante, die sich aus dem Integral herausziehen lässt. Dann erkennt man das Integral von $x^j j^k_{\text{el.}}$, das laut der Formel unten Gl. (VIII.30b) als

$$\int_{\mathcal{V}} x^j j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\, \mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \sum_{m=1}^{3} \epsilon^{mjk} \mu^m$$

umgeschrieben werden kann, wobei μ^m die m-te Komponente des magnetischen Dipolmoments der Stromverteilung ist. Dies gibt

$$F^i = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \epsilon^{ikl}\epsilon^{mjk}\mu^m \frac{\partial B^l(\vec{0})}{\partial x^j} = \sum_{j,l,m=1}^{3} \big(-\delta^{im}\delta^{jl} + \delta^{ij}\delta^{lm}\big)\mu^m \frac{\partial B^l(\vec{0})}{\partial x^j} = -\mu^i\, \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{0}) + \vec{\mu}\cdot\frac{\partial \vec{B}(\vec{0})}{\partial x^i}.$$

Der erste Term im rechten Glied der Gleichung verschwindet dank der Maxwell–Thomson-Gleichung. Dazu ist das magnetische Dipolmoment für eine gegebene Stromverteilung eine Konstante, die in der Ableitung des zweiten Terms mitgenommen werden kann:

$$F^i = \frac{\partial}{\partial x^j}\big[\vec{\mu}\cdot\vec{B}(\vec{0})\big].$$

Somit ergibt sich schließlich für die Kraft auf ein magnetisches Dipolmoment, das sich im Punkt $\vec{r}$ befindet ($\vec{r} = \vec{0}$ in der obigen Herleitung)

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}\big[\vec{\mu}\cdot\vec{B}(\vec{r})\big].} \tag{VIII.33}$$

Bemerkung: Laut dieser Formel erfährt ein magnetischer Dipol eine Kraft, wenn er sich in einem inhomogenen Feld befindet.

VIII.2.3 b Energie eines magnetischen Dipols in einem magnetischen Feld

Die Kraft (VIII.33) lässt sich trivial als das Negative eines Gradienten schreiben, und zwar

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V_{\text{W}}, \tag{VIII.34a}$$

wobei die Wechselwirkungsenergie zwischen dem Dipol und der magnetischen Induktion, aus der die Kraft abgeleitet wird, durch

$$\boxed{V_{\text{W}} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}(\vec{r})} \tag{VIII.34b}$$

gegeben ist.

Diese Wechselwirkungsenergie hat genau die gleiche Form wie jene eines elektrischen Dipols in einem elektrostatischen Feld, entsprechend dem zweiten Term in Gl. (VII.31).

Ebenfalls analog zum elektrostatischen Fall ist die Wechselwirkungsenergie zweier magnetischer Dipole $\vec{\mu}_a$ und $\vec{\mu}_b$: unter Verwendung des magnetischen Dipolfeldes (VIII.31) und der Gl. (VIII.34b) ergibt sich

$$V_{\text{W}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu}_a\cdot\vec{\mu}_b - 3\big(\vec{\mathrm{e}}_r\cdot\vec{\mu}_a\big)\big(\vec{\mathrm{e}}_r\cdot\vec{\mu}_b\big)}{r^3} \tag{VIII.35}$$

mit dem Abstandsvektor $\vec{r}$ zwischen den beiden (als punktförmig angenommenen) Dipole und dem zugehörigen Einheitsvektor $\vec{\mathrm{e}}_r \equiv \vec{r}/|\vec{r}|$. Diese Gleichung ist das genaue Pendant der Gl. (VII.35).