

VIII.1.3 Integrale Formulierung der Grundgleichungen der Magnetostatik

In diesem Paragraphen werden die integralen Formulierungen dargestellt, die den lokalen Grundgleichungen (VIII.1) der Magnetostatik entsprechen.

VIII.1.3a Erhaltung des elektrischen Stroms

Die Divergenzbildung der stationären Maxwell–Ampère-Gleichung (VIII.1b) gibt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) = 0. \quad (\text{VIII.13})$$

Unter Verwendung des Integralsatzes von Gauß ergibt sich dann

$$0 = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) \, d^3\vec{r} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{S} \quad (\text{VIII.14})$$

d.h. der resultierende Ladungsstrom durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens \mathcal{V} verschwindet: der einströmende Ladungsstrom muss wieder herausströmen, entsprechend der Abwesenheit von Quellen des elektrischen Stroms.

Bemerkung: Dementsprechend wird ein allgemeines Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$, dessen Divergenz überall verschwindet — wie z.B. die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ —, als *quellfrei* bezeichnet.

⁽⁷²⁾In Lehrbüchern findet man oft die Forderung, dass der Betrag $|\vec{V}(\vec{r})|$ schneller als $1/r$ für $r \rightarrow \infty$ abnehmen soll. Mathematisch gilt das Ergebnis auch mit schwächeren Annahmen über \vec{V} , vgl. z.B. Ref. [29] für eine Diskussion.

^(aj)H. VON HELMHOLTZ, 1821–1894

Aus dieser Erhaltung des Ladungsstroms folgt auch, dass die elektrische Stromstärke I durch den Querschnitt eines leitenden Drahts konstant entlang des Drahts bleibt.

Eine zweite Folgerung der Ladungsstromerhaltung ist die *Kirchhoffsche*^(ak) *Knotenregel*,⁽⁷³⁾ laut der die Summe der an einem Leiterknoten zufließenden elektrischen Ströme gleich der Summe der daraus abfließenden Ströme ist.

Beweis: Betrachtet man ein Volumen \mathcal{V} um den Knoten, so ist der nach außen gerichtete Fluss der Stromdichte $\vec{j}_{\text{el.}}$ durch die Fläche $\partial\mathcal{V}$ gleich der algebraischen Summe der Stromstärken in den Leitern, wobei aus- bzw. einfließende Ströme positiv bzw. negativ gezählt werden. Für das Beispiel der Abb. VIII.1

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{S} = I_1 - I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0.$$

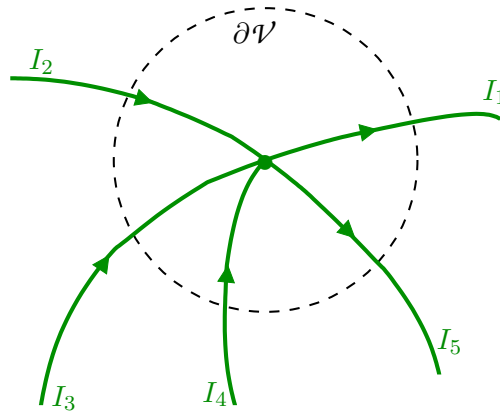


Abbildung VIII.1 – Knotenregel

VIII.1.3 b Fluss der magnetischen Induktion

Sei $\partial\mathcal{V}$ eine geschlossene Fläche, die ein Gebiet \mathcal{V} einschließt. Der magnetische Fluss durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ wird durch

$$\Phi_B \equiv \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{S} \quad (\text{VIII.15})$$

definiert. Dabei ist $d^2\vec{S} = d^2S \vec{e}_n$ der vektorielle Oberflächenelement, wobei \vec{e}_n den nach außen ausgerichteten Normaleinheitsvektor zu d^2S bezeichnet.

Unter Verwendung des Integralsatzes von Gauß ist das Oberflächenintegral auf der rechten Seite gleich dem Volumenintegral der Divergenz des Integranden, d.h.

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3\vec{r}.$$

Wegen der Maxwell–Thomson-Gleichung (VIII.1a) ist die rechte Seite dieser Gleichung immer Null, unabhängig von \mathcal{V}

$$\Phi_B = 0. \quad (\text{VIII.16})$$

Das heißt, der magnetische Fluss durch jede geschlossene Fläche ist immer Null.

VIII.1.3 c Ampère-Gesetz

Sei \mathcal{S} eine Fläche und $\partial\mathcal{S}$ deren Rand. Das Flächenintegral über \mathcal{S} der stationären Maxwell–Ampère-Gleichung (VIII.1b) lautet

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{S} = \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{S}.$$

⁽⁷³⁾ ... auch bekannt als *erstes Kirchhoffsches Gesetz*.

^(ak) G. KIRCHHOFF, 1824–1887

Dabei ist das Integral auf der rechten Seite genau gleich der Stärke I des elektrischen Stroms durch \mathcal{S} . Wiederum lässt sich auf der linken Seite das Flächenintegral einer Rotation über \mathcal{S} mit dem Integralsatz von Stokes in ein Linienintegral entlang des geschlossenen Rands $\partial\mathcal{S}$ transformieren. Somit ergibt sich das *Ampère-Gesetz*

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{S} = \mu_0 I. \quad (\text{VIII.17})$$

Bemerkung: Das Linienintegral eines Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{r})$ entlang einer geschlossenen Kurve \mathcal{C} wird *Zirkulation* des Feldes längs \mathcal{C} genannt. Dementsprechend tritt auf der linken Seite des Ampère-Gesetzes (VIII.17) die Zirkulation des Magnetfeldes längs des Rands $\partial\mathcal{S}$.

Dann besagt das Ampère-Gesetz, dass die Zirkulation der magnetischen Induktion längs einer geschlossenen Kurve $\partial\mathcal{S}$ gleich μ_0 mal dem elektrischen Strom durch eine von $\partial\mathcal{S}$ aufgespannte Fläche ist.

VIII.1.4 Magnetisches Feld induziert durch einfache Ladungsströme

Im Fall eines Ladungsstroms durch einen dünnen Draht vereinfacht sich das Integral im Biot-Savart-Gesetz (VIII.7) oder in den äquivalenten Formeln (VIII.6) und (VIII.10). Betrachtet man nämlich ein infinitesimales Volumenelement $d^3\vec{r}'$ um einen Teil des Drahts, so lässt sich dieses als $d^2\mathcal{S}' d\ell'$ schreiben, mit $d\ell'$ der Länge von $d^3\vec{r}'$ entlang des Drahts und $d^2\mathcal{S}'$ die Fläche des Querschnitts von $d^3\vec{r}'$ senkrecht dazu.

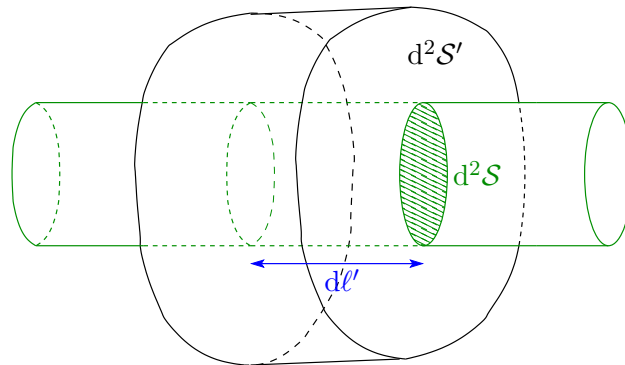


Abbildung VIII.2

Sei \vec{e}_{\parallel} der Einheitsvektor in Drahtrichtung — d.h. kollinear zur Stromdichte $\vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}')$ —, sowie Vektoren $d\vec{\ell}' \equiv d\ell' \vec{e}_{\parallel}$ und $d^2\vec{S}' \equiv d^2\mathcal{S}' \vec{e}_{\parallel}$, im Einklang mit der üblichen Definition des vektoriellen Flächenelements. Dann gilt

$$\vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}' = \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}') d^2\mathcal{S}' d\ell' = [\vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}') \cdot d^2\vec{S}'] d\vec{\ell}'.$$

Daraus folgt

$$\int \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}' = \int \left(\int [\vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}') \cdot d^2\vec{S}'] \right) d\vec{\ell}'.$$

Zum Flächenintegral trägt nur der in Abb. (VIII.2) Querschnitt $d^2\mathcal{S}$ bei, was die Stromstärke I des Ladungsstroms ergibt. Insgesamt können Volumenintegrale durch Linienintegrale entlang des Drahts ersetzt werden, mit der Substitution

$$\vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}' = I d\vec{\ell}' \quad (\text{VIII.18})$$

im Integranden, wie z.B. für das Biot-Savart-Gesetz (VIII.7) in Gl. (VIII.21) gemacht wird.

Wem diese Substitution nicht gefällt, kann stattdessen die Ladungsstromdichte durch den Draht mithilfe einer zweidimensionalen Delta-Distribution schreiben:

$$\vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) = I \delta(x^1) \delta(x^2) \vec{e}_3,$$

wobei ein (lokales) Koordinatensystem gewählt wurde, in dem der unendlich dünne Draht entlang der x^3 -Achse liegt. Nach Einsetzen in ein Integral ergibt sich das gleiche wie mit der Substitution (VIII.18).

VIII.1.4a Magnetisches Feld eines dünnen geradlinigen Draht

Durch einen unendlich langen dünnen geradlinigen elektrischen Leiter fließt ein stationärer Ladungsstrom I . Dieser erzeugt in jedem Punkt \vec{r} außerhalb des Drahts eine magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$.

Wegen der Zylindersymmetrie um den Draht ist es sinnvoll, Zylinderkoordinaten (r, θ, z) mit den zugehörigen Basisvektoren $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ einzuführen. Dabei zeigt in jedem Punkt \vec{e}_r in die Radialrichtung weg vom Draht, während \vec{e}_θ orthogonal dazu ist.

Wegen der Zylindersymmetrie kann der Betrag des Magnetfeldes in einem Punkt nur von dessen Abstand r zur Achse des Leiters abhängen, sei $B(r)$.

Sei \mathcal{C} ein Kreis mit Radius R in einer Ebene senkrecht zum Draht, wobei der letztere durch das Zentrum des Kreises durchläuft; dann ist $|\vec{B}(\vec{r})|$ konstant entlang \mathcal{C} . Wegen der Symmetrie der Geometrie unter Spiegelungen bezüglich der Ebene von \mathcal{C} muss $\vec{B}(\vec{r})$ in einem Punkt \vec{r} des Kreises in der Ebene liegen; genauer ist $\vec{B}(\vec{r})$ tangential zum Kreis, denn es orthogonal zum Abstandsvektor zur Drahtachse ist. Die genaue Richtung, und zwar mit einer positiven Komponente entlang \vec{e}_θ , folgt aus der Rechte-Hand-Regel: $\vec{B}(\vec{r}) = B(R) \vec{e}_\theta$ für $\vec{r} \in \mathcal{C}$.

Da $\vec{B}(\vec{r})$ in jedem Punkt \vec{r} des Kreises tangential dazu ist, lautet die Zirkulation der magnetischen Induktion entlang \mathcal{C}

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} |\vec{B}(\vec{r})| dl = 2\pi R B(R),$$

wobei die zweite Gleichung den konstanten Wert von $|\vec{B}(\vec{r})|$ auf \mathcal{C} berücksichtigt. Laut dem Ampère-Gesetz ist diese Zirkulation gleich $\mu_0 I$, woraus sich $B(R) = \mu_0 I / 2\pi R$ und somit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad \text{für } r > 0 \quad (\text{VIII.19})$$

ergibt.

Man prüft schnell nach, dass dieses Magnetfeld aus dem Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \vec{e}_z \quad \text{für } r > 0 \quad (\text{VIII.20})$$

abgeleitet werden kann. Dabei bezeichnet r_0 eine beliebige positive Zahl, die eingeführt wurde, damit das Argument des Logarithmus dimensionslos ist. Dazu erfüllt dieses Vektorpotential die Coulomb-Eichbedingung (VIII.4).

Bemerkung: Anhand einer ähnlicher Herangehensweise kann man zeigen, dass ein von einer gleichförmigen Ladungsstromdichte $\vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) = (I/\pi a^2) \Theta(r - a) \vec{e}_z$ durchflossener geradliniger Draht mit Radius a die magnetische Induktion

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta & \text{für } r \leq a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{für } r \geq a \end{cases}$$

erzeugt.

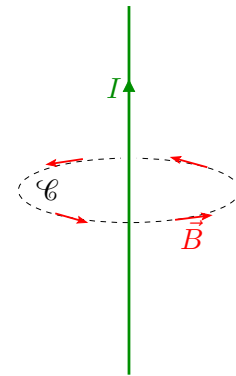


Abbildung VIII.3

VIII.1.4b Magnetisches Feld einer Leiterschleife

Als Ladungsstrom wird jetzt ein stationärer Strom I durch eine kreisförmige Leiterschleife \mathcal{C} mit Radius R betrachtet. Gesucht ist die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ in einem Punkt P auf der Achse des Kreises. Sei O das Zentrum von \mathcal{C} und z der Abstand zwischen O und P .

Laut dem Biot-Savart-Gesetz (VIII.7) mit der Substitution (VIII.18) ist das durch die Leiterschleife erzeugte magnetische Feld durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0 I d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (\text{VIII.21})$$

gegeben. Dabei ist \vec{r}' der Ortsvektor des Linienelements $d\vec{\ell}'$ entlang des Leiters.

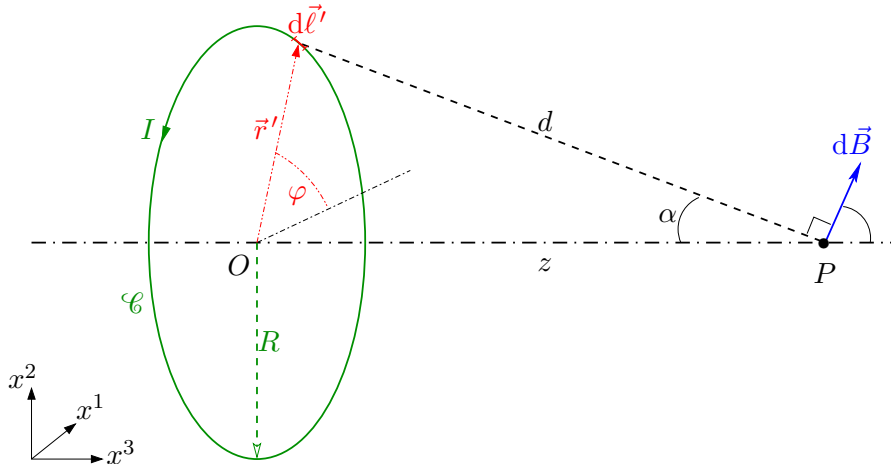


Abbildung VIII.4

Ein solches Leiterelement erzeugt eine infinitesimale magnetische Induktion $d\vec{B}$, die durch das Integrand des Kurvenintegrals gegeben ist. Dieses Feld ist senkrecht zum Abstandsvektor $\vec{r} - \vec{r}'$ von $d\ell'$ bis zum Punkt P , wie in Abb. VIII.4 dargestellt wird. Da das Problem Zylindersymmetrie um die Achse des Kreises besitzt, muss das durch den ganzen Stromkreis erzeugte Feld $\vec{B}(z)$ parallel dieser Achse sein. Dementsprechend wird hiernach nur die Komponente der Gl. (VIII.21) entlang der Kreisachse betrachtet.

Unabhängig von der Position des Linienelements $d\vec{\ell}'$ entlang \mathcal{C} bleibt dessen Abstand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ zum Punkt P konstant, sei d , während der Abstandsvektor $\vec{r} - \vec{r}'$ und $d\vec{\ell}'$ immer orthogonal zu einander sind. Somit ist der Betrag des Integranden von Gl. (VIII.21) konstant gleich $\mu_0 I d\ell' / 4\pi d^2$.

Gleichfalls ist der Winkel zwischen dem von dem durch $d\vec{\ell}'$ fließenden Strom herrührenden Magnetfeld $d\vec{B}$ und der Kreisachse auch unabhängig von der Position von $d\vec{\ell}'$ entlang \mathcal{C} , und zwar gleich $\pi/2 - \alpha$, wobei α in Abb. VIII.4 definiert ist. Daraus folgert man für den Betrag von \vec{B}

$$|\vec{B}(z)| = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0 I d\ell'}{4\pi d^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi d^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \oint_{\mathcal{C}} d\ell' = \frac{\mu_0 I}{4\pi d^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) 2\pi R.$$

Dabei gilt $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha = R/d$, mit $d = \sqrt{R^2 + z^2}$. Insgesamt kommt

$$|\vec{B}(z)| = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{VIII.22})$$

und \vec{B} ist gerichtet nach rechts in Abb. VIII.4.

Alternativ kann man ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Nullpunkt im Zentrum der Kreisschleife einführen (vgl. Abb. VIII.4) und damit arbeiten.⁽⁷⁴⁾ Parametrisiert man die Posi-

⁽⁷⁴⁾ Auf erster Sicht können kartesische Koordinaten für ein Problem mit Zylindersymmetrie zwar überraschend wirken. Zur Berechnung des Kreuzprodukts im Integranden des Biot-Savart-Gesetzes sind sie aber die einfachsten.

tion eines Punkts von \mathcal{C} mit einem Winkel φ , so gelten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \\ -R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Dazu kann man bemerken, dass das Linienelement $d\vec{\ell}'$ tangential zum Kreis genau die infinitesimale Variation von \vec{r}' darstellt; daher ist

$$d\vec{\ell}' = \frac{d\vec{r}'}{d\varphi} d\varphi \quad \text{mit} \quad \frac{d\vec{r}'}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und das Kurvenintegral entlang \mathcal{C} wird zu einem Integral über $\varphi \in [0, 2\pi]$. Daraus folgt

$$d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} zR \cos \varphi \\ zR \sin \varphi \\ R^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \end{pmatrix} d\varphi.$$

Das Einsetzen in die Biot–Savart-Formel (VIII.21) unter Berücksichtigung von $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$ ergibt schließlich

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} zR \cos \varphi \\ zR \sin \varphi \\ R^2 \end{pmatrix} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im Einklang mit dem schon oben gefundenen Ergebnis (VIII.22).

VIII.1.4c Magnetisches Feld einer Zylinderspule

... **Aufgabe 78!**

VIII.1.5 Kraft zwischen zwei Stromkreisen

In Abwesenheit eines elektrischen Feldes lautet die Lorentz-Kraftdichte auf eine Ladungsstromdichte \vec{j}_{el} in einem magnetischen Feld

$$\vec{f}_{\text{L}}(\vec{r}) = \vec{j}_{\text{el}}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}). \quad (\text{VIII.23})$$

Ausgehend aus dieser Formel kann man die Kraft $\vec{F}_{a \rightarrow b}$ bestimmen, die ein erster Stromkreis a mit Stromdichte $\vec{j}_{\text{el},a}$ auf einem zweiten Stromkreis b mit Stromdichte $\vec{j}_{\text{el},b}$ ausübt.

Sei \mathcal{V}_a bzw. \mathcal{V}_b ein Gebiet, das den Stromkreis a bzw. b beinhaltet, wobei $\vec{j}_{\text{el},i}$ in jedem Punkt des Rands von \mathcal{V}_i verschwindet. Die Stromdichte $\vec{j}_{\text{el},a}$ erzeugt eine magnetische Induktion \vec{B}_a im Raum, insbesondere in jedem Punkt $\vec{r}_b \in \mathcal{V}_b$. Dadurch erfährt der ganze Stromkreis b eine resultierende Kraft

$$\vec{F}_{a \rightarrow b} = \int_{\mathcal{V}_b} \vec{j}_{\text{el},b}(\vec{r}_b) \times \vec{B}_a(\vec{r}_b) d^3\vec{r}_b.$$

Dabei kann $\vec{B}_a(\vec{r}_b)$ durch das Biot–Savart-Gesetz (VIII.7) ausgedrückt werden:

$$\vec{F}_{a \rightarrow b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_b} \vec{j}_{\text{el},b}(\vec{r}_b) \times \left[\int_{\mathcal{V}_a} \frac{\vec{j}_{\text{el},a}(\vec{r}_a) \times (\vec{r}_b - \vec{r}_a)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|^3} d^3\vec{r}_a \right] d^3\vec{r}_b.$$

Diese Formel lässt sich mit Hilfe der Identität

$$\frac{\vec{r}_b - \vec{r}_a}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|^3} = -\vec{\nabla}_b \left(\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \right)$$

umschreiben:

$$\vec{F}_{a \rightarrow b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_a} \int_{\mathcal{V}_b} \vec{j}_{\text{el},b}(\vec{r}_b) \times \left[\vec{\nabla}_b \left(\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \right) \times \vec{j}_{\text{el},a}(\vec{r}_a) \right] d^3\vec{r}_b d^3\vec{r}_a.$$

Unter Verwendung des doppelten Kreuzprodukts $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ kommt

$$\begin{aligned} \vec{F}_{a \rightarrow b} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_a} \int_{\mathcal{V}_b} [\vec{j}_{\text{el.},a}(\vec{r}_a) \cdot \vec{j}_{\text{el.},b}(\vec{r}_b)] \vec{\nabla}_b \left(\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \right) d^3\vec{r}_b d^3\vec{r}_a \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_a} \int_{\mathcal{V}_b} \left[\vec{j}_{\text{el.},b}(\vec{r}_b) \cdot \vec{\nabla}_b \left(\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \right) \right] \vec{j}_{\text{el.},a}(\vec{r}_a) d^3\vec{r}_b d^3\vec{r}_a. \end{aligned} \quad (\text{VIII.24})$$

Wie wir jetzt beweisen werden, ist der Term in der zweiten Zeile Null, denn das darin enthaltene Integral über \vec{r}_b verschwindet. In der Tat gilt unter Einführung der Koordinaten $\{x_b^k\}$ von \vec{r}_b

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_b} \vec{j}_{\text{el.},b}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_b} \left(\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \right) d^3\vec{r}_b &= \int_{\mathcal{V}_b} \sum_{k=1}^3 j_{\text{el.},b}^k(\vec{r}_b) \frac{\partial}{\partial x_b^k} \left(\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \right) d^3\vec{r}_b \\ &= \int_{\mathcal{V}_b} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_b^k} \left[\frac{j_{\text{el.},b}^k(\vec{r}_b)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \right] d^3\vec{r}_b - \int_{\mathcal{V}_b} \frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial j_{\text{el.},b}^k(\vec{r}_b)}{\partial x_b^k} d^3\vec{r}_b. \end{aligned}$$

Dabei erkennt man die Divergenz zweier Vektorfelder:

$$\int_{\mathcal{V}_b} \vec{j}_{\text{el.},b}(\vec{r}_b) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_b} \left(\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \right) d^3\vec{r}_b = \int_{\mathcal{V}_b} \vec{\nabla}_b \cdot \left[\frac{\vec{j}_{\text{el.},b}(\vec{r}_b)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \right] d^3\vec{r}_b - \int_{\mathcal{V}_b} \frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \vec{\nabla}_b \cdot \vec{j}_{\text{el.},b}(\vec{r}_b) d^3\vec{r}_b.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite verschwindet wegen der Quellfreiheit (VIII.13) der Ladungsstromdichte $\vec{j}_{\text{el.},b}$. Wiederum lässt sich das erste Integral mit dem Satz von Gauß transformieren: daraus kommt das Flächenintegral von $\vec{j}_{\text{el.},b}(\vec{r}_b)/|\vec{r}_b - \vec{r}_a|$ über den Rand $\partial\mathcal{V}_b$, wo $\vec{j}_{\text{el.},b}$ Null ist, so dass auch dieser Beitrag verschwindet.

Insgesamt bleibt somit die Kraft

$$\vec{F}_{a \rightarrow b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_a} \int_{\mathcal{V}_b} [\vec{j}_{\text{el.},a}(\vec{r}_a) \cdot \vec{j}_{\text{el.},b}(\vec{r}_b)] \vec{\nabla}_b \left(\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \right) d^3\vec{r}_b d^3\vec{r}_a. \quad (\text{VIII.25})$$

Da der Gradient von $1/|\vec{r}_b - \vec{r}_a|$ bezüglich \vec{r}_a das Negative des Gradienten bezüglich \vec{r}_b ist, kommt ein globales Minus-Zeichen im Austausch der Rollen von a und b , und zwar $\vec{F}_{b \rightarrow a} = -\vec{F}_{a \rightarrow b}$. Dies ist genau das dritte newtonsche Gesetz (I.19).