KAPITEL VIII

Magnetostatik

Die Magnetostatik ist die Lehre der magnetischen Felder, die von zeitlich konstanten elektrischen Strömen herrühren. Im entsprechenden stationären Regime vereinfachen sich die Maxwell–Thomson- und die Maxwell–Ampère-Gleichung (VI.1b), (VI.1d) für die magnetische Flussdichte $\vec{B}(\vec{r})$ — die jetzt zeitunabhängig ist — zu

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = 0 \tag{VIII.1a}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\vec{\jmath}_{\rm el.}(\vec{r}). \tag{VIII.1b}$$

Somit entkoppeln die Gleichungen für das Magnetfeld von denen für das elektrische Feld — so dass das letztere hiernach ignoriert wird.

Den bewegten Ladungen, welche die Stromdichte $\vec{\jmath}_{\rm el.}$ bilden, kann auch eine Ladungsdichte $\rho_{\rm el.}$ zugeordnet werden, die ebenfalls zeitlich konstant ist. Über die Maxwell–Gauß-Gleichung (VI.1a) erzeugt diese Ladungsverteilung ein stationäres elektrisches Feld — es sei denn, es existiert eine zweite, statische Ladungsverteilung,[69] deren Effekt jenen von $\rho_{\rm el.}$ kompensiert, so dass das resultierende elektrische Feld Null ist.

In Abschn. VIII.1 werden zunächst einige Folgerungen der zwei Grundgleichungen (VIII.1) der Magnetostatik hergeleitet, und zwar die Existenz eines Vektorpotentials für das Magnetfeld sowie verschiedene Beziehungen zwischen der Ladungsstromdichte $\vec{\jmath}_{\rm el.}$ und entweder dem magnetischen Feld oder dem Vektorpotential. Dann befasst sich Abschn. VIII.2 mit der Multipolentwicklung der Magnetostatik, wobei meistens die Dipol-Näherung betrachtet wird.

Im ganzen Kapitel werden Analogien mit dem Formalismus der Elektrostatik (Kap. VII) stark benutzt, um einige Ergebnisse ohne Herleitung anzugeben.

VIII.1 Grundbegriffe und -ergebnisse der Magnetostatik

Dieser Abschnitt befasst sich mit einigen elementaren Folgerungen der Grundgleichungen (VIII.1) der Magnetostatik. Ähnlich wie das elektrostatische Feld aus einem Skalarpotential abgeleitet wer-

[69]... die ungefähr gleich $-\rho_{\rm el.}$ sein soll!

den kann, lässt sich dem magnetischen Feld ein Vektorpotential zuordnen (§ VIII.1.1). Sowohl das Magnetfeld als auch dieses Vektorpotential genügen jeweiligen Poisson-Gleichungen (§ VIII.1.2), deren Lösungen auf $\mathbb{R}^3$ sich in Analogie mit den Ergebnissen des Abschn. VII.2 schreiben lassen.

Äquivalent zu den „lokalen“ (Differential-)Gleichungen (VIII.1) können „globale“ Formulierungen der Grundgleichungen gefunden werden (§ VIII.1.3). Schließlich werden die Resultate der ersten Paragraphen auf die Berechnung der von verschiedenen einfachen Stromverteilungen herrührenden Magnetfelder angewandt (§ VIII.1.4).

VIII.1.1 Vektorpotential

Aus der Maxwell–Thomson-Gleichung (VIII.1a) folgt die Existenz eines differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ derart, dass die Beziehung

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})} \tag{VIII.2}$$

in jedem Punkt $\vec{r}$ erfüllt wird. Das Feld $\vec{A}(\vec{r})$ heißt *(magnetisches) Vektorpotential*, mit der physikalischen Dimension $[A] = \mathsf{M\,L\,T^{-2}\,I^{-1}}$.[70]

Falls das magnetische Feld $\vec{B}$ auf $\mathbb{R}^3$ definiert ist, wird die Existenz von $\vec{A}(\vec{r})$ unten bewiesen, indem es explizit konstruiert wird [Gl. (VIII.11)].

Bemerkung: Das Produkt aus dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ und einer elektrischen Ladung q hat die physikalische Dimension $\mathsf{M\,L\,T^{-1}}$ eines Impulses.

Eichfreiheit

Das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$, das zu einem gegebenen magnetischen Feld $\vec{B}(\vec{r})$ führt, wird durch Gl. (VIII.2) nicht eindeutig festgestellt. Definiert man nämlich ein Vektorfeld $\vec{A}'$ über

$$\vec{A}'(\vec{r}) \equiv \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}) \tag{VIII.3a}$$

mit einer beliebigen kontinuierlich differenzierbaren skalaren Funktion χ der Position, so ist die Rotation von $\vec{A}'$

$$\vec{B}'(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}), \tag{VIII.3b}$$

d.h. $\vec{A}'$ ist auch ein geeignetes Vektorpotential für das Feld $\vec{B}$. Die Mehrdeutigkeit in der Wahl des Vektorpotentials wird als *Eichfreiheit* bezeichnet, und eine bestimmte Wahl als *Eichung*.

Um das Vektorpotential eindeutig — möglicherweise bis auf einen konstanten additiven Vektor — festzulegen, kann man eine zusätzliche Bedingung über $\vec{A}(\vec{r})$ fordern. Dabei soll diese *Eichbedingung* so gewählt sein, dass einige Gleichungen damit einfacher werden, wie es in § VIII.1.2 c der Fall sein wird.

In der Magnetostatik wird meistens die *Coulomb-Eichung* gewählt, entsprechend der *Coulomb-Eichbedingung*

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0} \tag{VIII.4}$$

über das Vektorpotential.

Sei $\vec{A}_0(\vec{r})$ ein Vektorpotential für die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$. Falls die Divergenz von $\vec{A}_0$ Null ist, dann erfüllt es schon die Coulomb-Eichbedingung. Wenn $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0(\vec{r})$ nicht identisch verschwindet, dann hat die Poisson-Gleichung

$$\triangle\chi(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0(\vec{r})$$

eine nicht-konstante Lösung $\chi(\vec{r})$ auf $\mathbb{R}^3$. Definiert man dann $\vec{A} \equiv \vec{A}_0 + \vec{\nabla}\chi$, so findet man sofort, dass $\vec{A}$ die Bedingung (VIII.4) erfüllt.

[70] Die zugehörige SI-Einheit wird nie benutzt.

VIII.1.2 Poisson-Gleichungen der Magnetostatik

Aus den Grundgleichungen (VIII.1) können Poisson-Gleichungen für die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ oder das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ hergeleitet werden, wobei sich diese Vektorfelder durch die elektrische Stromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r})$ ausdrücken lassen.

VIII.1.2 a Poisson-Gleichung für die magnetische Induktion

Die Rotationsbildung der stationären Maxwell–Ampère-Gleichung (VIII.1b) lautet

$$\vec{\nabla} \times \big[\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})\big] = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{\nabla} \times \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}).$$

Dabei kann auf der linken Seite die Identität

$$\vec{\nabla} \times \big[\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})\big] = \vec{\nabla}\big[\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r})\big] - \triangle \vec{B}(\vec{r})$$

benutzt werden, wobei der erste Term im rechten Glied wegen der Maxwell–Thomson-Gleichung Null ist. Insgesamt ergibt sich somit

$$\boxed{\triangle \vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r})} \tag{VIII.5}$$

d.h. jede Komponente der magnetischen Induktion genügt der Poisson-Gleichung mit der entsprechenden Komponente von $-\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{\jmath}_{\text{el.}}$ als „Quelle“ auf der rechten Seite der Gleichung. Die Lösung dieser Differentialgleichung wurde in schon Abschn. VII.2 studiert. Ist die elektrische Ladungsstromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ bekannt auf $\mathbb{R}^3$ — und wenn deren Rotation schnell genug im Unendlichen nach Null geht, damit das untere Integral definiert ist —, so gilt(71)

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'} \times \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3\vec{r}\,'.} \tag{VIII.6}$$

Dabei bezeichnet $\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}$ den Gradienten bezüglich der Komponenten von $\vec{r}\,'$.

In der Praxis wird das Integral oft auf ein Raumgebiet $\mathcal{V}$ beschränkt, wenn die Randbedingungen am Rand $\partial\mathcal{V}$ von $\mathcal{V}$ nicht weiter präzisiert wurden.

VIII.1.2 b Biot–Savart-Gesetz

Unter Einführung eines kartesischen Koordinatensystems mit Basis $\{\vec{e}_i\}$ lässt sich die i-te Komponente der Beziehung (VIII.6) als

$$B^i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon^{ijk}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \frac{\partial j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{\partial x'^j}\, \mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

umschreiben, mit Summen über die doppelt auftretenden Indizes j und k. Das Integral auf der rechten Seite kann mithilfe einer partiellen Integration transformiert werden. Dabei wird angenommen, dass das Integrationsvolumen $\mathcal{V}$ groß genug ist, damit die Stromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ am Rand $\partial\mathcal{V}$ verschwindet. Dann ist der integrierte Term aus der partiellen Integration Null, und es bleibt

$$B^i(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \epsilon^{ijk} j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,') \frac{\partial}{\partial x'^j} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right) \mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

Das Ersetzen von $-\epsilon^{ijk}$ durch ϵ^{ikj} und die Berechnung der Ableitung liefern

$$B^i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \epsilon^{ikj} j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,') \frac{x^j - x'^j}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, \mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

(71) Der Übergang von der Poisson-Differentialgleichung (VIII.5) zur Lösung (VIII.6) ist ähnlich dem von Gl. (VII.4) zur zugehörigen Lösung (VII.22).

für $i = 1, 2, 3$, das heißt

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.} \tag{VIII.7}$$

Diese Beziehung heißt *Biot*[ah]*–Savart*[ai]*-Gesetz*.

VIII.1.2 c Poisson-Gleichung für das Vektorpotential

Ersetzt man die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ durch $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$ in der stationären Maxwell–Ampère-Gleichung (VIII.1b), so ergibt sich

$$\vec{\nabla} \times \big[\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})\big] = \mu_0 \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}),$$

d.h. unter Berücksichtigung der Formel für die Rotation einer Rotation

$$\triangle \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\big[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})\big]. \tag{VIII.8}$$

Unter Verwendung der Coulomb-Eichbedingung (VIII.4) vereinfacht sich diese Gleichung erneut zu einer Poisson-Gleichung

$$\boxed{\triangle \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}) \quad \text{in der Coulomb-Eichung.}} \tag{VIII.9}$$

Wie oben kann man die Lösung dieser Gleichung direkt schreiben:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.} \tag{VIII.10}$$

Falls $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ am Rand des Integrationsgebiets $\mathcal{V}$ verschwindet — wenn es keinen Ladungsstrom im Unendlichen gibt, kann man immer $\mathcal{V}$ groß genug wählen, damit es keinen Strom auf $\partial\mathcal{V}$ gibt —, so erfüllt das Vektorpotential (VIII.10) die Coulomb-Eichbedingung (VIII.4).

Beweis: Bezeichnet man mit $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ bzw. $\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}$ den Nabla-Operator bezüglich der Koordinaten des Vektors $\vec{r}$ bzw. $\vec{r}\,'$, so gilt

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\bigg(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\bigg)\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

Im Integranden kann man $\vec{\nabla}_{\vec{r}}(1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}(1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|)$ schreiben. Dann lässt sich das daraus folgende Integral über partielle Integration berechnen, wobei der integrierte Term, proportional zur Ladungsstromdichte ausgewertet am Rand des Integrationsgebiets, Null ist:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\bigg(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\bigg)\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\cdot\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

Aus der stationären Maxwell–Ampère-Gleichung (VIII.1b) folgt sofort $\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\cdot\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,') = 0$, was zu $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = 0$ führt. □

Das Biot–Savart-Gesetz (VIII.7) kann auch aus der Beziehung (VIII.10) wiedergefunden werden. Bildet man deren Rotation, so ergibt sich

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \bigg[\frac{\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\bigg]\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

In einem kartesischen Koordinatensystem lautet die i-te Komponente dieser Gleichung

$$B^i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \epsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \epsilon^{ijk} j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\bigg)\mathrm{d}^3\vec{r}\,'.$$

[ah] J.-B. Biot, 1774–1862 [ai] F. Savart, 1791–1841

Dabei gibt die Ableitung $-(x^j - x'^j)/|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3$. Mit $-\epsilon^{ijk} = \epsilon^{ikj}$ ergibt sich

$$B^i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \epsilon^{ikj} j^k_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\frac{x^j - x'^j}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,',$$

entsprechend genau der i-ten Komponente der Gl. (VIII.7).

Bemerkung: Unter Verwendung der stationären Maxwell–Ampère-Gleichung wird Gl. (VIII.10) zu einem Zusammenhang zwischen dem Vektorpotential (in Coulomb-Eichung) und der magnetischen Induktion:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'. \tag{VIII.11}$$

Dabei handelt es sich um einen Sonderfall der *Helmholtz*[(aj)]*-Zerlegung*, laut welcher jedes Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$ auf $\mathbb{R}^3$, das sich im Unendlichen „gut verhält“ — d.h. derart, dass die Integrale (VIII.12b)–(VIII.12c) existieren[(72)] —, als Summe eines Gradientenfeldes $\vec{V}_\parallel(\vec{r})$ und eines Rotationsfeldes $\vec{V}_\perp(\vec{r})$ geschrieben werden kann:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}_\parallel(\vec{r}) + \vec{V}_\perp(\vec{r}), \quad \text{wobei} \tag{VIII.12a}$$

$$\vec{V}_\parallel(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \Phi(\vec{r}) \equiv \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\cdot\vec{V}(\vec{r}\,')}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \tag{VIII.12b}$$

$$\vec{V}_\perp(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{A}(\vec{r}) \equiv \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\times\vec{V}(\vec{r}\,')}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'. \tag{VIII.12c}$$

Dabei gelten

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_\perp(\vec{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}\times\vec{V}_\parallel(\vec{r}) = \vec{0}, \tag{VIII.12d}$$

d.h.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}_\parallel(\vec{r}) \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{V}_\perp(\vec{r}). \tag{VIII.12e}$$

In der Magnetostatik ist $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$, und $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r})$ bzw. $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})$ wird durch durch Gl. (VIII.1a) bzw. (VIII.1b) gegeben. Für die Elektrostatik soll man $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$ betrachten, während $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r})$ bzw. $\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})$ durch Gl. (VII.1a) bzw. (VII.1b) gegeben sind.

(72) In Lehrbüchern findet man oft die Forderung, dass der Betrag $|\vec{V}(\vec{r})|$ schneller als $1/r$ für $r\to\infty$ abnehmen soll. Mathematisch gilt das Ergebnis auch mit schwächeren Annahmen über $\vec{V}$, vgl. z.B. Ref. [29] für eine Diskussion.

(aj) H. von Helmholtz, 1821–1894