

VII.3.3 Wechselwirkung zwischen zwei Ladungsverteilungen

Die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Punktladungen ist durch die bekannte Coulomb-Kraft (VII.14a) gegeben: sie ist proportional zum Produkt der Ladungen und lässt sich aus der Potentialenergie (VII.14b) ableiten. In diesem Paragraphen wird die Wechselwirkung zwischen zwei beliebigen statischen Ladungsverteilungen $\rho_{\text{el.},a}$, $\rho_{\text{el.},b}$ untersucht, insbesondere für den Fall, wenn diese weit von einander sind — d.h. falls deren Abstand viel größer als ihre typische Größe ist.

VII.3.3 a Wechselwirkungsenergie zweier Ladungsverteilungen

Sei Φ_a bzw. Φ_b das von der Verteilung $\rho_{\text{el.},a}$ bzw. $\rho_{\text{el.},b}$ gemäß der Poisson-Gleichung (VII.4) herrührende elektrische Skalarpotential. Laut dem schon in § VII.1.3 b benutzten Superpositionsprinzip erzeugt die Ladungsverteilung $\rho_{\text{el.},a} + \rho_{\text{el.},b}$ das Potential $\Phi_a + \Phi_b$. Unter Verwendung der Gl. (VII.16) lautet dann die gesamte Potentialenergie des Systems aus den zwei Verteilungen

$$V = \frac{1}{2} \int [\rho_{\text{el.},a}(\vec{r}) + \rho_{\text{el.},b}(\vec{r})] [\Phi_a(\vec{r}) + \Phi_b(\vec{r})] d^3\vec{r}. \quad (\text{VII.29})$$

Nach trivialem Ausmultiplizieren des Integranden wird diese Energie zu

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int \rho_{\text{el.},a}(\vec{r}) \Phi_a(\vec{r}) d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int \rho_{\text{el.},b}(\vec{r}) \Phi_b(\vec{r}) d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int [\rho_{\text{el.},a}(\vec{r}) \Phi_b(\vec{r}) + \rho_{\text{el.},b}(\vec{r}) \Phi_a(\vec{r})] d^3\vec{r} \\ &\equiv V_a + V_b + V_W \end{aligned} \quad (\text{VII.30})$$

Die zwei ersten Terme V_a , V_b sind der Art (VII.16) mit im Integranden dem Produkt aus einer Ladungsdichte und dem dadurch verursachten Skalarpotential. Diese Terme stehen für die jeweiligen „Selbstenergien“ der Verteilungen $\rho_{\text{el.},a}$ und $\rho_{\text{el.},b}$, und entsprechen ihren potentiellen Energien in Abwesenheit der anderen Verteilung.

Dagegen koppelt der dritte Term V_W jede Ladungsdichte mit dem Potential, das die andere Verteilung erzeugt. Dieser Beitrag stellt die *Wechselwirkungsenergie* der Ladungsverteilungen dar. Er lässt sich mithilfe eines Tricks umschreiben.

Aus der Kettenregel folgen nämlich (die Variablen werden nicht geschrieben) die Identitäten

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi_a \vec{\nabla} \Phi_b) = \vec{\nabla} \Phi_a \cdot \vec{\nabla} \Phi_b + \Phi_a \Delta \Phi_b \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot (\Phi_b \vec{\nabla} \Phi_a) = \vec{\nabla} \Phi_b \cdot \vec{\nabla} \Phi_a + \Phi_b \Delta \Phi_a.$$

Dabei sind die Skalarprodukte auf der rechten Seite beider Gleichungen gleich. Daraus ergibt sich

$$\Phi_a \Delta \Phi_b = \Phi_b \Delta \Phi_a + \vec{\nabla} \cdot [(\Phi_a \vec{\nabla} \Phi_b) - (\Phi_b \vec{\nabla} \Phi_a)].$$

Integriert man diese Gleichung über ein Volumen, so lässt sich das Integral des letzten Terms dank dem Gaußschen Integralsatz in ein Oberflächenintegral transformieren, und zwar

$$\oint_{\partial V} [(\Phi_a \vec{\nabla} \Phi_b) - (\Phi_b \vec{\nabla} \Phi_a)] \cdot d^2\vec{S}.$$

Sei \mathcal{V} eine um den Nullpunkt zentrierte Kugel mit Radius L , welche die zwei Ladungsverteilungen einschließt. Ist die Kugelfläche $\partial\mathcal{V}$ weit entfernt von den Verteilungen, d.h. für L groß genug, so lässt sich das Potential Φ_i mit $i = a$ oder b in einem Punkt von $\partial\mathcal{V}$ durch die Multipolentwicklung (VII.27a) annähern. Insbesondere nimmt Φ_i in einem solchen Punkt wie $1/L$ ab, möglicherweise noch schneller falls $Q_i = 0$. Dementsprechend ist $|\vec{\nabla}\Phi_i|$ proportional zu $1/L^2$ oder kleiner, und $|\Phi_j\vec{\nabla}\Phi_i|$ proportional zu $1/L^3$. Da sich das Flächenelement $d^2\mathcal{S}$ als $L^2 d^2\Omega$ mit dem Raumwinkelement $d^2\Omega$ schreiben lässt, findet man, dass das obige Oberflächenintegral proportional zu $1/L^3 \cdot L^2 = 1/L$ ist: es verschwindet im Grenzwert $L \rightarrow \infty$, d.h. wenn $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$.⁽⁶⁷⁾ Somit gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi_a(\vec{r}) \Delta \Phi_b(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_b(\vec{r}) \Delta \Phi_a(\vec{r}) d^3\vec{r}.$$

Multipliziert mit $-\epsilon_0$ und unter Verwendung von $-\epsilon_0 \Delta \Phi_i(\vec{r}) = \rho_{\text{el.},i}(\vec{r})$ wird dies zu

$$\int \Phi_a(\vec{r}) \rho_{\text{el.},b}(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int \Phi_b(\vec{r}) \rho_{\text{el.},a}(\vec{r}) d^3\vec{r},$$

so dass die in Gl. (VII.30) definierte Wechselwirkungsenergie als

$$V_W = \int \rho_{\text{el.},a}(\vec{r}) \Phi_b(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int \rho_{\text{el.},b}(\vec{r}) \Phi_a(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (\text{VII.31})$$

geschrieben werden kann.

VII.3.3b Wechselwirkungsenergie zweier entfernter Ladungsverteilungen

Sei jetzt angenommen, dass die zwei Ladungsverteilungen $\rho_{\text{el.},a}$, $\rho_{\text{el.},b}$ weit entfernt von einander sind, wobei die Verteilung $\rho_{\text{el.},a}$ in einer Umgebung des Koordinatennullpunkts lokalisiert ist.



Abbildung VII.9

Die Taylor-Entwicklung des von der Verteilung $\rho_{\text{el.},b}$ herrührenden Skalarpotentials $\Phi_b(\vec{r})$ bis zur zweiten Ordnung um den Wert $\vec{r} = \vec{0}$ lautet

$$\Phi_b(\vec{r}) = \Phi_b(\vec{0}) + \sum_{i=1}^3 x^i \frac{\partial \Phi_b(\vec{0})}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x^i x^j \frac{\partial^2 \Phi_b(\vec{0})}{\partial x^i \partial x^j} + \dots$$

Im linearen Term sind die Ableitungen von Φ_b genau die Komponenten dessen Gradienten; dann erkennt man das Skalarprodukt aus dem letzteren mit dem Vektor \vec{r} . Dazu kann der quadratische Term erweitert werden, um $x^i x^j$ als die Summe eines spurlosen und eines diagonalen Beitrags zu schreiben:

$$\Phi_b(\vec{r}) = \Phi_b(\vec{0}) + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \Phi_b(\vec{0}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(x^i x^j - \frac{\vec{r}^2}{3} \delta^{ij} \right) \frac{\partial^2 \Phi_b(\vec{0})}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\vec{r}^2}{6} \sum_{i,j=1}^3 \delta^{ij} \frac{\partial^2 \Phi_b(\vec{0})}{\partial x^i \partial x^j} + \dots$$

Im letzten Term ist die Summe genau gleich dem Laplace-Operator $\Delta \Phi_b(\vec{0})$: unter Verwendung der Poisson-Gleichung ist dieser Beitrag proportional zur Ladungsdichte $\rho_{\text{el.},b}(\vec{0})$, die per Annahme Null

⁽⁶⁷⁾Die hier verwendete Argumentation ist genau die gleiche wie für den Beweis von Gl. (VII.17a) in § VII.1.4 c.

ist — die Verteilung $\rho_{\text{el.},b}$ ist anderswo lokalisiert. Ersetzt man dazu $\vec{\nabla}\Phi_b$ durch $-\vec{E}_b$, und drückt man dementsprechend die zweiten Ableitungen von Φ_b durch erste Ableitungen von \vec{E}_b aus, so ergibt sich

$$\Phi_b(\vec{r}) = \Phi_b(\vec{0}) - \vec{r} \cdot \vec{E}_b(\vec{0}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(x^i x^j - \frac{\vec{r}^2}{3} \delta^{ij} \right) \frac{\partial E_b^i(\vec{0})}{\partial x^j} + \dots$$

Dieser Ausdruck des Skalarpotentials kann dann in die Wechselwirkungsenergie (VII.31) — in der Form mit dem Integranden $\rho_{\text{el.},a}(\vec{r})\Phi_b(\vec{r})$ — eingesetzt werden. Dabei sind $\Phi_b(\vec{0})$, $\vec{E}_b(\vec{0})$ und $\partial E_b^i(\vec{0})/\partial x^j$ und unabhängig von der Integrationsvariablen \vec{r} , und können deshalb aus den jeweiligen Integralen herausgezogen werden. Unter Verwendung der kartesischen elektrischen Multipolmomente (VII.27b)–(VII.27d) der Verteilung a ergibt sich dann

$$V_W = Q_a \Phi_b(\vec{0}) - \vec{P}_a \cdot \vec{E}_b(\vec{0}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_a^{ij} \frac{\partial E_b^i(\vec{0})}{\partial x^j} + \dots \quad (\text{VII.32})$$

Bemerkungen:

* Wegen der Symmetrie der Wechselwirkungsenergie (VII.31) gegenüber dem Austausch der beiden Ladungsverteilungen kann V_W auch ausgedrückt werden durch die elektrischen Multipolmomente der Verteilung $\rho_{\text{el.},b}$ und das von $\rho_{\text{el.},a}$ erzeugte Skalarpotential $\Phi_a(\vec{r}_0)$ und dessen Ableitungen ($\vec{E}_a(\vec{r}_0)$, $\partial E_a^i(\vec{r}_0)/\partial x^j$, ...) in einem Punkt \vec{r}_0 des durch die Verteilung $\rho_{\text{el.},b}$ besetzten Raumbereichs:

$$V_W = Q_b \Phi_a(\vec{r}_0) - \vec{P}_b \cdot \vec{E}_a(\vec{r}_0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_b^{ij} \frac{\partial E_a^i(\vec{r}_0)}{\partial x^j} + \dots \quad (\text{VII.33})$$

Dabei sollen die Multipolmomente relativ zum Punkt \vec{r}_0 berechnet werden, d.h. mit $\vec{r}' - \vec{r}_0$ bzw. $x'^i - x_0^i$ statt \vec{r}' bzw. x'^i in den Vorfaktoren von $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}')$ in Gl. (VII.27c)–(VII.27d).

* Die sukzessiven Terme in der Formel (VII.32) werden im Prinzip — d.h. wenn das zugehörige Multipolmoment nicht Null ist — immer kleiner mit wachsender Ordnung der darin auftretenden Ableitung von Φ .

Somit ist der führende Beitrag jener der Gesamtladung, der genau gleich der Potentialenergie einer Punktladung Q_a in einem äußeren (d.h. durch andere Ladungen erzeugten) Skalarpotential Φ_b ist.

* Wenn die Verteilung a sich drehen kann, dann wird sie es so machen, dass die Wechselwirkungsenergie minimiert wird, entsprechend einem stabilen Gleichgewicht. Falls $\vec{P}_a \neq \vec{0}$ ist, wird man deshalb zu einer Situation tendieren, in der \vec{P}_a parallel zum elektrischen Feld $\vec{E}_b(\vec{0})$ ist.

VII.3.3c Dipol-Dipol-Wechselwirkung

Sei jetzt angenommen, dass beide Verteilungen „reine Dipole“ sind, d.h. nur deren elektrische Dipolmomente sind nicht Null, während alle anderen Momente, einschließlich der Gesamtladung, verschwinden. Der elektrische Dipol a befindet sich im Nullpunkt, der Dipol b in einem Punkt \vec{r} .

Unter einem „reinen Dipol“ versteht man eigentlich ein punktförmiges Objekt, versehen mit einem elektrischen Dipolmoment, jedoch ohne Gesamtladung oder höhere Multipolmomente. Wegen der verschwindenden Ausdehnung gilt das Skalarpotential (VII.34a) überall im Raum (bis auf $\vec{r} = \vec{0}$, wo der Dipol sitzt), anstatt nur in großem Abstand vom Dipol, wie es beim einfachen „physikalischen“ Dipol des § VII.3.2 b der Fall ist.

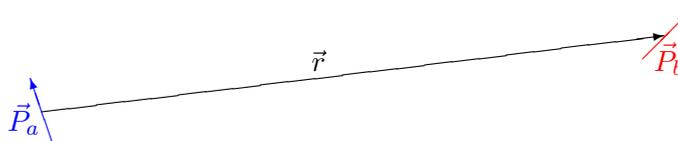


Abbildung VII.10 – Wechselwirkung zweier Dipole.

Dann ist das durch den Dipol a erzeugte Skalarpotential $\Phi_a(\vec{r})$ laut Gl. (VII.27a) durch

$$\Phi_a(\vec{r}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}_a}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{mit } r \equiv |\vec{r}| \neq 0 \quad (\text{VII.34a})$$

gegeben. Dieser Ausdruck führt nach Ableitung zum *elektrischen Dipolfeld*

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi_a(\vec{r}) = -\frac{\vec{P}_a}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{P}_a)\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

d.h.

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{P}_a)\vec{r} - r^2\vec{P}_a}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \quad (\text{VII.34b})$$

Das Einsetzen dieses Feldes in die Wechselwirkungsenergie (VII.33), in der nur der Dipolterm betrachtet wird, ergibt

$$V_W = \frac{\vec{P}_a \cdot \vec{P}_b - 3(\vec{e}_r \cdot \vec{P}_a)(\vec{e}_r \cdot \vec{P}_b)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{VII.35})$$

wobei $\vec{e}_r \equiv \vec{r}/|\vec{r}|$ den Einheitsvektor in Richtung \vec{r} bezeichnet. Dies stellt die Potentialenergie der Dipol-Dipol-Wechselwirkung dar.

Bemerkung: Das elektrische Skalarpotential (VII.34a) bzw. Dipolfeld (VII.34b) nimmt mit dem Abstand r zur Quelle wie $1/r^2$ bzw. $1/r^3$ ab, d.h. schneller als das durch eine Punktladung erzeugte Potential bzw. Feld ($1/r$ bzw. $1/r^2$, § VII.1.3 a).