Übung Nr. 7

Diskussionsthemen:

– Was sind Wirkungsquerschnitt und Luminosität? Welche sind deren Dimensionen und Einheiten?
– Was ist die allgemeine Struktur einer Zerfallsrate? eines Wirkungsquerschnitts?

In diesem Zettel werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 22. Phasenraumintegration des Zweikörperzerfalls

Betrachten Sie den Zerfall $A \to 1 + 2$ im Ruhesystem des Teilchens A. Mit Massen m, m_1, m_2 und Viererimpulsen

$$\mathsf{p} = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_1 = \begin{pmatrix} E_{\vec{p}_1} \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_2 = \begin{pmatrix} E_{\vec{p}_2} \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

beträgt die Zerfallsrate

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \int \left|\mathcal{M}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)\right|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 - \mathsf{p}) \, \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}.$$

i. Zeigen Sie, dass nach der Integration über $\vec{p}_1$ gilt

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \frac{1}{(4\pi)^2} \int \left|\mathcal{M}(-\vec{p}_2, \vec{p}_2)\right|^2 \frac{\delta\big(m - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_2^{\,2}} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^{\,2}}\big)}{\sqrt{m_1^2 + \vec{p}_2^{\,2}}\sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^{\,2}}} \, \mathrm{d}^3\vec{p}_2.$$

ii. Es kann vermutet werden, dass $\left|\mathcal{M}(-\vec{p}_2, \vec{p}_2)\right|^2$ nur von $|\vec{p}_2|$ abhängig ist, d.h. als $\left|\mathcal{M}\right|^2(|\vec{p}_2|)$ geschrieben werden kann. Überführen Sie die Zerfallsrate per Winkelintegration in die Form

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi m} \int_0^\infty \left|\mathcal{M}\right|^2(\varrho) \, \frac{\delta\big(m - \sqrt{m_1^2 + \varrho^2} - \sqrt{m_2^2 + \varrho^2}\big)}{\sqrt{m_1^2 + \varrho^2}\sqrt{m_2^2 + \varrho^2}} \, \varrho^2 \, \mathrm{d}\varrho.$$

iii. Nehmen Sie nun die Variablensubstitution $\varrho \to E \equiv \sqrt{m_1^2 + \varrho^2} + \sqrt{m_2^2 + \varrho^2}$ vor. Überzeugen Sie sich, dass sich die Zerfallsrate schreiben lässt als

$$\Gamma = \frac{\varrho_0}{8\pi m^2} \left|\mathcal{M}\right|^2(\varrho_0) \, \Theta(m - m_1 - m_2),$$

wobei $\varrho_0 \equiv \dfrac{1}{2m}\sqrt{m^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2m^2 m_1^2 - 2m^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2}$.

iv. Was ist die physikalische Bedeutung von ρ_0? (vgl. Aufgabe **17 i.**)

Aufgabe 23. Zerfall $\rho \to \pi^+\pi^-$

Setzen Sie die Werte $m = m_\rho = 770$ MeV, $m_1 = m_2 = m_\pi = 140$ MeV, und $\mathcal{M} = 2$ GeV ins Resultat der Aufgabe **22 iii.** ein.

i. Was erhalten Sie für die Lebensdauer? Vergleichen Sie anschliessend mit der Lebensdauer des physikalischen ρ-Mesons, die Sie z.B. auf `http://pdg.lbl.gov` finden.

ii. Zeichnen Sie die Zerfallsrate als Funktion von m. Was ist die physikalische Interpretation dieser Struktur?

Aufgabe 24. Fixed-target Experimente und Collider-Experimente

Sei der (inelastische) Prozess $p + p \to p + p + p + \bar{p}$.

i. In einem sogenannten „fixed-target“ Experiment ist eines der ursprünglichen Protonen p in Ruhe im Laborsystem: es stellt also ein feststehendes Ziel dar, auf welches das andere Proton geschossen wird. Wieviel Energie muss das letztere haben, damit die oben abgegebene Reaktion kinematisch erlaubt ist?

ii. In einem „Collider“, wie z.B. im Large Hadron Collider (LHC), stoßen die zwei Protonen mit gleicher Geschwindigkeit (im Laborsystem) frontal zusammen. Was ist die Schwellenenergie in diesem Fall?

Aufgabe 25. Mandelstam-Variablen (2)

In Aufgabe **6.** wurden schon die Mandelstam-Variablen s, t, u für einen quasielastischen Streuprozess $a + b \to 1 + 2$ eingeführt, insbesondere (hier ist $c = 1$!)

$$s \equiv (\mathsf{p}_a + \mathsf{p}_b)^2 \quad \text{und} \quad t \equiv (\mathsf{p}_a - \mathsf{p}_1)^2,$$

wobei p_a, $\mathsf{p}_b \ldots$ die Viererimpulse der Teilchen $a, b \ldots$ mit jeweiligen Massen m_a, $m_b \ldots$ bezeichnen.

Wie hängt s mit der Schwerpunktsenergie $E_{\rm cm}$ zusammen? Sei θ der (Streu)Winkel zwischen den Impulsen $\vec{p}_a$ und $\vec{p}_1$ in einem beliebigen Bezugssystem. Zeigen Sie zunächst die Beziehung

$$\cos\theta = \frac{t - m_a^2 - m_1^2 + 2E_aE_1}{2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|}.$$

Sei jetzt angenommen, dass die Streuung elastisch ist, so dass $m_1 = m_a$. Zeigen Sie, dass im Schwerpunktsystem

$$t = -2|\vec{p}_a|^2(1 - \cos\theta) = -4|\vec{p}_a|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

gilt.