# Übung Nr. 6

**Diskussionsthema:** Was ist die Streumatrix? Wie erhält man Fermis Goldene Regel für Zerfälle?

## Aufgabe 18. Weyl-Gleichung

Eine alternative Wahl für die Dirac-Matrizen ist die sog. *chirale* oder *Weyl-Darstellung*

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

in der der Chiralitätsoperator $\gamma_5$ diagonal wird.

**i.** Prüfen Sie nach, dass die Matrizen (1) die Beziehung $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\,\mathbb{1}_4$ für alle $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ erfüllen. Berechnen Sie die Matrixform des „Dirac-Operators" $\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\mathbb{1}_4$ (drücken Sie das Ergebnis mithilfe der Notation $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \equiv \sum_k \sigma_k \partial_k$ aus).

**ii.** Berechnen Sie den Chiralitätsoperator $\gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ in der chiralen Darstellung, sowie die Projektoren $\mathcal{P}_\mathrm{L} \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 - \gamma_5)$ und $\mathcal{P}_\mathrm{R} \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \gamma_5)$. Wenden Sie diese Projektoren auf einen Dirac-Spinor $\psi$ an und folgern Sie daraus, dass sich der Letztere „natürlich" als

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_\mathrm{L} \\ \chi_\mathrm{R} \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit zweikomponentigen Spaltenvektoren $\chi_\mathrm{L}, \chi_\mathrm{R}$ schreiben lässt.[1]

**iii.** Benutzen Sie den in Frage **i.** berechneten Dirac-Operator und die Notation (2), um die freie Dirac-Gleichung $(\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$ als System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen für $\chi_\mathrm{L}$, $\chi_\mathrm{R}$ umzuschreiben. Wie vereinfacht sich das System, wenn das durch $\psi$ beschriebene Teilchen masselos ist?
Die resultierenden Gleichungen werden *Weyl-Gleichungen* genannt — und die zweikomponentigen $\chi_\mathrm{L}$, $\chi_\mathrm{R}$ *Weyl-Spinoren*.

## Aufgabe 19. Zerfallsrate und mittlere Lebensdauer

Die Zerfallsrate bestimmt die Zeitentwicklung der Teilchenzahl durch $N(t) = N(0)\,\mathrm{e}^{-\Gamma t}$. Zeigen Sie, dass die mittlere Lebensdauer $\tau$ eines Teilchens gleich $\Gamma^{-1}$ ist.

## Aufgabe 20. Wechselwirkungsbild

In der Vorlesung wurde der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_\mathrm{I}(t, t_0)$ durch

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \hat{U}_\mathrm{I}(t, t_0)}{\partial t} = g\hat{V}_\mathrm{I}(t)\hat{U}_\mathrm{I}(t, t_0) \tag{3}$$

mit der Anfangsbedingung $\hat{U}_\mathrm{I}(t_0, t_0) = \hat{\mathbb{1}}$ definiert.

**i.** Zeigen Sie, dass $\hat{U}_\mathrm{I}(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}} - \dfrac{\mathrm{i}\,g}{\hbar}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \hat{V}_\mathrm{I}(t')\hat{U}_\mathrm{I}(t', t_0)\,\mathrm{d}t'$ ist.

**ii.** Schreiben Sie die iterative Lösung dieser Gleichung zur Ordnung $g^2$ auf.

**iii.** Können Sie aus der sich ergebenden Struktur auf die exakte Lösung schließen?
*Hinweis*: Exponentialfunktion...

[1] Sehr oft wird stattdessen

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\mathrm{L} \\ \psi_\mathrm{R} \end{pmatrix}$$

geschrieben, was eigentlich ein Missbrauch der Notation ist, denn die normalen links- und rechtshändigen Spinoren $\psi_{\mathrm{L/R}} \equiv \mathcal{P}_{\mathrm{L,R}}\psi$ sind vierkomponentige Dirac-Spinoren.

**Aufgabe 21.** Phasenraumintegrationsmaß

In dieser Aufgabe werden natürliche Einheiten verwendet.

Überzeugen Sie sich davon, dass das Maß für die Phasenraumintegration sich in der Lorentz-invarianten Form

$$\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}} = \int 2\pi\delta(\mathsf{p}^2 - m^2)\,\Theta(p^0)\,\frac{\mathrm{d}^4\mathsf{p}}{(2\pi)^4} \tag{4}$$

mit der Heaviside-Funktion $\Theta$ schreiben lässt, wobei $\mathsf{p} = (p^0, \vec{p})$ und $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.