

Übung Nr. 5

Diskussionsthema: Zweite Quantisierung bei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Was sind die Helizität und die Chiralität eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens?

In diesem Zettel werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 14. Dirac-Gleichung

Sei $\psi(x)$ eine Lösung der Dirac-Gleichung $(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0$. Zeigen Sie, dass $\chi(x) \equiv \gamma_5\psi(x)$ dann Lösung der Gleichung $(i\not{\partial} + m)\chi(x) = 0$ ist. (*Hinweis:* Aufgabe 12. iii)

Aufgabe 15. Normierung der Dirac-Lösung

Betrachten Sie die Spinoren

$$u(\vec{p}, s) = \mathcal{N}_+(\vec{p})(\not{p} + m) \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\vec{p}, s) = \mathcal{N}_-(\vec{p})(\not{p} - m) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \xi_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Normierungen $\bar{u}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s') = 2m\delta_{s,s'}$ sowie $\bar{v}(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s') = -2m\delta_{s,s'}$ durch $\mathcal{N}_+(\vec{p}) = -\mathcal{N}_-(\vec{p}) = (E_{\vec{p}} + m)^{-1/2}$ erfüllt werden können.

Was folgt dann für $u(\vec{p}, s)^\dagger u(\vec{p}, s')$ und $v(\vec{p}, s)^\dagger v(\vec{p}, s')$?

Aufgabe 16. Helizitäts- und Chiralitätsoperatoren

Betrachten wir den Helizitätsoperator $h(\vec{p}) \equiv \vec{e}_{\vec{p}} \cdot \vec{\Sigma}$ sowie den Chiralitätsoperator γ_5 , wobei

$$\vec{e}_{\vec{p}} \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

mit den Pauli-Matrizen σ^k . Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

- i. $[h(\vec{p})]^2 = \mathbb{1}_4$.
- ii. Die Eigenwerte von $h(\vec{p})$ und γ_5 sind gleich ± 1 (*Hinweis:* Aufgabe 12. iii).
- iii. Für $\mathcal{P}_\pm^{(h)} \equiv \frac{\mathbb{1}_4 \pm h}{2}$ gelten die Beziehungen $[\mathcal{P}_\pm^{(h)}]^2 = \mathcal{P}_\pm^{(h)}$ und $\mathcal{P}_+^{(h)}\mathcal{P}_-^{(h)} = \mathcal{P}_-^{(h)}\mathcal{P}_+^{(h)} = 0$.
- iv. Der Chiralitätseigenwert von $u_L \equiv \mathcal{P}_L u$, mit $\mathcal{P}_L \equiv \frac{\mathbb{1}_4 - \gamma_5}{2}$ und u einem Dirac-Spinor „positiver Energie“, ist gleich -1 .

Aufgabe 17. Kinematik von Zerfällen

i. Zwei-Teilchen-Zerfall Ein Teilchen der Masse M zerfalle in zwei andere Teilchen mit Massen m_1, m_2 und Impulsen \vec{p}_1, \vec{p}_2 . Geben Sie die Impulse der Zerfallsprodukte im Schwerpunktsystem an. Kann ein massives Teilchen ein Photon abstrahlen?

ii. Drei-Teilchen-Zerfall Wie sieht es beim Zerfall von einem Teilchen in drei Teilchen aus?