

## Übung Nr. 5

**Diskussionsthema:** Zweite Quantisierung bei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Was sind die Helizität und die Chiralität eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens?

In diesem Zettel werden natürliche Einheiten verwendet.

### Aufgabe 14. Dirac-Gleichung

Sei  $\psi(x)$  eine Lösung der Dirac-Gleichung  $(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0$ . Zeigen Sie, dass  $\chi(x) \equiv \gamma_5\psi(x)$  dann Lösung der Gleichung  $(i\not{\partial} + m)\chi(x) = 0$  ist. (*Hinweis:* Aufgabe 12. iii)

### Aufgabe 15. Normierung der Dirac-Lösung

Betrachten Sie die Spinoren

$$u(\vec{p}, s) = \mathcal{N}_+(\vec{p})(\not{p} + m) \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\vec{p}, s) = \mathcal{N}_-(\vec{p})(\not{p} - m) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \xi_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Normierungen  $\bar{u}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s') = 2m\delta_{s,s'}$  sowie  $\bar{v}(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s') = -2m\delta_{s,s'}$  durch  $\mathcal{N}_+(\vec{p}) = -\mathcal{N}_-(\vec{p}) = (E_{\vec{p}} + m)^{-1/2}$  erfüllt werden können.

Was folgt dann für  $u(\vec{p}, s)^\dagger u(\vec{p}, s')$  und  $v(\vec{p}, s)^\dagger v(\vec{p}, s')$ ?

### Aufgabe 16. Helizitäts- und Chiralitätsoperatoren

Betrachten wir den Helizitätsoperator  $h(\vec{p}) \equiv \vec{e}_{\vec{p}} \cdot \vec{\Sigma}$  sowie den Chiralitätsoperator  $\gamma_5$ , wobei

$$\vec{e}_{\vec{p}} \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

mit den Pauli-Matrizen  $\sigma^k$ . Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

- i.  $[h(\vec{p})]^2 = \mathbb{1}_4$ .
- ii. Die Eigenwerte von  $h(\vec{p})$  und  $\gamma_5$  sind gleich  $\pm 1$  (*Hinweis:* Aufgabe 12. iii).
- iii. Für  $\mathcal{P}_\pm^{(h)} \equiv \frac{\mathbb{1}_4 \pm h}{2}$  gelten die Beziehungen  $[\mathcal{P}_\pm^{(h)}]^2 = \mathcal{P}_\pm^{(h)}$  und  $\mathcal{P}_+^{(h)}\mathcal{P}_-^{(h)} = \mathcal{P}_-^{(h)}\mathcal{P}_+^{(h)} = 0$ .
- iv. Der Chiralitätseigenwert von  $u_L \equiv \mathcal{P}_L u$ , mit  $\mathcal{P}_L \equiv \frac{\mathbb{1}_4 - \gamma_5}{2}$  und  $u$  einem Dirac-Spinor „positiver Energie“, ist gleich  $-1$

### Aufgabe 17. Kinematik von Zerfällen

**i. Zwei-Teilchen-Zerfall** Ein Teilchen der Masse  $M$  zerfalle in zwei andere Teilchen mit Massen  $m_1, m_2$  und Impulsen  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ . Geben Sie die Impulse der Zerfallsprodukte im Schwerpunktsystem an. Kann ein massives Teilchen ein Photon abstrahlen?

**ii. Drei-Teilchen-Zerfall** Wie sieht es beim Zerfall von einem Teilchen in drei Teilchen aus?