

Übung Nr. 4

Diskussionsthema:

- Welche relativistischen Wellengleichungen kennen Sie?
- Zweite Quantisierung bei Spin-1- und Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen.

In diesem Zettel werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 11. Ebene elektromagnetische Welle

Eine linear polarisierte ebene Welle ist definitionsgemäß eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum der Form

$$A^\mu(\mathbf{x}) = \varepsilon^\mu f(n_\nu x^\nu), \quad (1)$$

mit \mathbf{x} -unabhängigen Vierervektoren ε^μ , n^μ und einer skalaren Funktion f . Dieser Ausdruck von $A^\mu(\mathbf{x})$ ist Lorentz-kovariant.

- i. Wie lautet der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}(\mathbf{x})$?
- ii. Überprüfen Sie, dass die Transformation $\varepsilon^\mu \rightarrow \varepsilon^\mu + \lambda n^\mu$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.
- iii. Geben Sie den Ausdruck der Maxwell-Gleichungen im Vakuum an. Zeigen Sie, dass die Lösungen der Form (1) für $n_\mu n^\mu \neq 0$ sogenannte „reine Eichungen“ sind, d.h. sie können durch eine Eichtransformation in $A^\mu(\mathbf{x}) = 0$ wegtransformiert werden.
- iv. Sei nunmehr $n_\mu n^\mu = 0$. Zeigen Sie, dass das Viererpotential (1) der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügt, obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde.
- v. Zeigen Sie, dass $\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu < 0$ für ein Feld gilt, das keine reine Eichung ist. Folglich kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu = -1$ ansetzen.
- vi. Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\varepsilon^0 = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese (nicht relativistisch kovariante) Bedingung? Zeigen Sie, dass n^0 zu 1 normiert werden kann und überprüfen Sie, dass man die bekannte Form von $\phi(t, \vec{x})$ und $\vec{A}(t, \vec{x})$ für eine transversal polarisierte ebene Welle erhält.

Aufgabe 12. Dirac-Matrizen

- i. Zeigen Sie ausgehend von $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, dass die Spur $\text{Tr } \gamma^\mu = 0$ ist.
- ii. Zeigen Sie ausgehend von der Dirac-Darstellung der γ^μ , dass $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ gilt. Was bedeutet das Ergebnis für die Hermitizität der Dirac-Matrizen?
- iii. Definieren wir nun $\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. Geben Sie den Ausdruck von γ_5 in der Standard-Darstellung an. Zeigen Sie die Eigenschaften
 - a) $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$; b) $(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4$; c) $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$; d) $\text{Tr } \gamma_5 = 0$.

Aufgabe 13. Dirac-Gleichung

- i. Zeigen Sie, dass der Dirac-adjungierte Spinor $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ die Gleichung $\bar{\psi}(\mathbf{x})(i\overleftarrow{\gamma}^\mu \partial_\mu + m) = 0$ erfüllt, wobei der Pfeil nach links bedeutet, dass die Ableitungen hier nach links wirken.
- ii. Zeigen Sie, dass $\int \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma^0 \psi(\mathbf{x}) d^3 \vec{x}$ eine Erhaltungsgröße ist.