Übung Nr. 3

Diskussionsthemen:
– Was ist die (freie) Klein–Gordon-Gleichung? Wie sieht deren allgemeine Lösung aus?
– Was nennt man zweite Quantisierung? Welchen Vertauschungsrelationen genügen die verschiedenen Operatoren?

In diesem Zettel (außer in Aufgabe **7.i.**) werden natürliche Einheiten verwendet.

Aufgabe 7. Masse und Dispersionsrelation

i. Ein masseloses Teilchen bewegt sich mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c, unabhängig von dessen Impulsbetrag p. Berechnen Sie (*Hinweis*: Taylor-Entwicklung) die Geschwindigkeit eines ultrarelativistischen Teilchens mit nicht-verschwindender Masse $m \ll p$. Drucken Sie das Ergebnis durch die Wellenlänge λ des Teilchens und die Compton-Wellenlänge $\lambda_{\mathrm{C}} \equiv h/mc$ aus.

ii. Messungen der Ausbreitung von Radiowellen oberhalb des Ozeans haben gezeigt, dass sich deren Geschwindigkeit um weniger als $0,1\%$ ändert, wenn die Wellenlänge zwischen 300 und 450 m variiert. Folgern Sie daraus eine obere Schranke für die Masse des Photons. Drucken Sie Ihr Resultat in eV aus.

Aufgabe 8. Klein–Gordon-Gleichung

Sei $\phi(\mathsf{x})$ eine Lösung der Klein–Gordon-Gleichung.

Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int \mathrm{i}\left[\phi(\mathsf{x})^*\partial_0\phi(\mathsf{x}) - \phi(\mathsf{x})\partial_0\phi(\mathsf{x})^*\right]\mathrm{d}^3\vec{x}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 9. Vertauschungsrelation der Klein–Gordon-Felder

Sei $\hat{\phi}(\mathsf{x})$ der Klein–Gordon-Feldoperator und $\hat{\pi}(\mathsf{x}) \equiv \partial_0\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger$ das dazu kanonisch konjugierte Feld. Verifizieren Sie die Vertauschungsrelation $\left[\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}(t,\vec{y})\right] = \mathrm{i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$.

Aufgabe 10. Hamilton-Operator des Klein–Gordon-Feldes

Der Hamilton-Operator eines freien komplexen Klein–Gordon-Feldes lautet

$$\hat{H} = \int \left[\partial_0\hat{\phi}(\mathsf{x})\partial_0\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger + \vec{\nabla}\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger\cdot\vec{\nabla}\hat{\phi}(\mathsf{x}) + m^2\hat{\phi}(\mathsf{x})^\dagger\hat{\phi}(\mathsf{x})\right]\mathrm{d}^3\vec{x}.$$

Zeigen Sie mithilfe der Entwicklung der Felder in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, dass sich $\hat{H}$ umschreiben lässt als

$$\hat{H} = \int \left[\frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\right) + \frac{1}{2}\left(\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\right)\right]E_{\vec{p}}\,\mathrm{d}^3\vec{p} = \int\left[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \delta^{(3)}(\vec{0})\right]E_{\vec{p}}\,\mathrm{d}^3\vec{p}.$$