



Grundlagen der Elementarteilchenphysik

Nicolas Borghini

Version vom 14. Februar 2021



Nicolas Borghini

Universität Bielefeld, Fakultät für Physik

Homepage: <http://www.physik.uni-bielefeld.de/~borghini/>

Email: borghini at physik.uni-bielefeld.de

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	1
I Teilchenzoo: eine Übersicht	3
I.1 Inventar der Elementarteilchen	3
I.1.1 Leptonen	3
I.1.2 Quarks	3
I.1.3 Austauschteilchen	4
I.1.4 Higgs-Boson	4
I.2 Zusammengesetzte Teilchen	4
I.3 Teilcheneigenschaften	4
I.3.1 Äußere Freiheitsgrade	4
I.3.2 Innere Freiheitsgrade	4
A Relativistische Quantenmechanik	7
II Klein–Gordon-Gleichung	10
II.1 Heuristische Herleitung	10
II.2 Lösung der freien Klein–Gordon-Gleichung	11
II.2.1 Allgemeine Lösung	11
II.2.2 Teilchen-Interpretation der Klein–Gordon-Wellenfunktion	12
II.3 Zweite Quantisierung der freien Klein–Gordon-Gleichung	14
II.3.1 Zweite Quantisierung	14
II.3.2 Physikalische Deutung	15
III Maxwell-Gleichungen	18
III.1 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	18
III.1.1 Definitionen	18
III.1.2 Bewegungsgleichungen	19
III.2 Lösung der freien Maxwell-Gleichungen	20
III.2.1 Allgemeine Lösung der Maxwell-Wellengleichung	20
III.2.2 Zweite Quantisierung der Maxwell-Wellenfunktion	21
IV Dirac-Gleichung	23
IV.1 Heuristische Herleitung	23
IV.2 „Diracologie“	25
IV.2.1 Eigenschaften der Dirac-Matrizen	25
IV.2.2 Chiralitätsoperator	26
IV.2.3 Dirac-adjungierter Spinor	27
IV.3 Lösung der freien Dirac-Gleichung	27
IV.3.1 Wellenlösungen	27
IV.3.2 Zweite Quantisierung der Wellenlösungen	31
IV.3.3 Helizität und Chiralität	33
Anhang zum Kapitel IV	37
IV.A Weyl-Gleichung	37

B	Wechselwirkende Teilchen	.39
V	Relativistische Kinematik	.42
	V.1 Schwerpunktsenergie, Reaktionsschwelle	42
	V.2 Zwei Teilchen im Endzustand	43
	V.3 Drei Teilchen im Endzustand	44
	V.4 Kinematik einfacher Stöße	45
VI	Zerfälle	.46
	VI.1 Definitionen	46
	VI.2 Berechnung der Zerfallsrate	47
	VI.2.1 Streumatrix	47
	VI.2.2 Zeitabhängige Störungstheorie	47
	VI.2.3 Vereinfachtes Modell	49
VII	Streuprozesse	.54
	VII.1 Grundbegriffe	54
	VII.1.1 Erste Definitionen	54
	VII.1.2 Wirkungsquerschnitt. Luminosität	55
	VII.2 Berechnung des Wirkungsquerschnitts	57
	VII.2.1 Fermis Goldene Regel für Streuprozesse	57
	VII.2.2 Lorentz-invariante Form des totalen Wirkungsquerschnitts	59
	VII.2.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt in einem Zwei-nach-zwei-Prozess	60
VIII	Feynman-Regeln	.63
	VIII.1 Feynman-Diagramme und -Regeln	63
	VIII.2 Beispiele	66
C	Wechselwirkungen der Elementarteilchenphysik	.69
IX	Quantenelektrodynamik	.72
	IX.1 Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik	73
	IX.2 Grundlegende Prozesse	74
	IX.2.1 Prozess erster Ordnung	74
	IX.2.2 Elastische Prozesse zweiter Ordnung	75
	IX.2.3 Inelastische Prozesse zweiter Ordnung	77
	IX.2.4 Wichtige Prozesse dritter Ordnung	79
	IX.3 Wirkungsquerschnitt für elastische Elektron–Myon–Streuung	79
	IX.3.1 Unpolarisiertes Amplitudenbetragsquadrat	79
	IX.3.2 Mott- und Rutherford-Formel	81
	IX.3.3 Wirkungsquerschnitt bei großem Energieübertrag	82
X	Starke Wechselwirkung	.85
	X.1 Quarkmodell	85
	X.1.1 Eightfold Way	85
	X.1.2 Hadronenerzeugung in Elektron–Positron-Kollisionen	90
	X.2 Partonmodell	92
	X.2.1 Tiefinelastische Streuung	92
	X.2.2 Partonen	94
	X.3 Quantenchromodynamik	96
	X.3.1 Vertices der QCD	96
	X.3.2 Wichtige Vorhersagen der Quantenchromodynamik	97
	X.3.3 Symmetrien der QED und der QCD	99

XI Schwache Wechselwirkung	105
XI.1 Symmetrieverletzungen 105	
XI.1.1 Verletzung der Erhaltung der Flavour-Quantenzahlen 106	
XI.1.2 Paritätsverletzung 106	
XI.1.3 Verletzung der Ladungskonjugation 108	
XI.1.4 CP-Verletzung 108	
XI.1.5 Zeitumkehrverletzung 108	
XI.2 Phänomenologische Modelle 108	
XI.2.1 Fermi-Modell 108	
XI.2.2 $V - A$ -Modell 110	
XI.2.3 Flavour-Mischung im $V - A$ -Modell 110	
XI.2.4 Neutrale Ströme 113	
XI.3 Vektorbosonen der schwachen Wechselwirkung 114	
XI.3.1 Unitaritätsgrenze 114	
XI.3.2 Schwache Bosonen 115	
XII Elektroschwaches Standardmodell	117
XII.1 Eichtheorien 117	
XII.1.1 Notwendigkeit nach Renormierbarkeit 117	
XII.1.2 Eichinvarianz 119	
XII.2 Lagrange-Dichte des Standardmodells 120	
XII.2.1 Bausteine des Standardmodells 120	
XII.2.2 Lagrange-Dichte des elektroschwachen Sektors 122	
XII.3 Spontane Symmetriebrechung, Higgs-Boson 124	
XII.3.1 Spontane Symmetriebrechung 124	
XII.3.2 Higgs-Boson 125	
XII.4 Vektorbosonen im Standardmodell 127	
XII.5 Fermionen im Standardmodell 129	
XII.5.1 Wechselwirkung der Leptonen mit dem Higgs-Feld 129	
XII.5.2 Quark-Massen 130	
XII.5.3 CKM-Matrix und CP-Verletzung 131	
D Jenseits des Standardmodells	135
XIII Neutrinos	138
XIII.1 Neutrino-Mischung, -Oszillationen und -Massen 138	
XIII.1.1 Neutrino-Mischung 138	
XIII.1.2 Neutrino-Oszillationen 139	
XIII.1.3 Neutrino-Massen 143	
Anhänge	147
A Spezielle Relativitätstheorie	147
A.1 Isometrien des dreidimensionalen euklidischen Raums 147	
A.1.1 Isometrien 148	
A.1.2 Skalare, Vektoren und Tensoren 149	
A.1.3 Irreduzible Darstellungen 151	
A.1.4 Spinoren 155	
A.2 Lorentz-Transformationen 156	
A.2.1 Linienelement 156	
A.2.2 Lorentz-Transformationen 157	
A.2.3 Beispiele 158	

A.3 Lorentz-Tensoren 159

A.3.1 Skalare 159

A.3.2 Kontravariante Vektoren 159

A.3.3 Kovariante Vektoren 160

A.3.4 Tensoren 161

A.3.5 Kontraktion zweier Tensoren 161

A.3.6 Kovariante Formulierung eines physikalischen Gesetzes 162

Literaturverzeichnis 164

Vorbemerkungen

Einheiten

In der Teilchenphysik wird ein System sogenannter *natürlicher Einheiten* verwendet, und zwar ein Einheitensystem, in dem die Vakuumlichtgeschwindigkeit c und das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar = h/2\pi$ den Wert 1 annehmen. Infolgedessen können diese Konstanten dann von den Gleichungen weggelassen werden.

Zur Rechtfertigung dieser Wahl sei daran erinnert, dass sich mechanische Größen wie Länge ($[L]$), Zeit ($[T]$), Masse ($[M]$), Energie ($[E]$), Geschwindigkeit ($[v]$), Kraft ($[F]$), Drehimpuls ($[J]$), usw. als Kombinationen von Potenzen von nur 3 *Basisgrößen* zerlegen lassen. Im MKS-System (Meter, Kilogramm, Sekunde) handelt es sich bei diesen Grundgrößen um die Länge, die Masse und die Zeit, mit zugehörigen metrischen Einheiten. Dann können andere Größen, und somit deren Einheiten, durch diese Basisgrößen ausgedrückt werden:

$$[L], \quad [M], \quad [T], \quad [E] = [ML^2T^{-2}], \quad [v] = [LT^{-1}], \quad [F] = [MLT^{-2}], \quad [J] = [ML^2T^{-1}] \dots$$

Man darf aber andere Basisgrößen wählen, solange die neue Basis alle anderen Größen erzeugen kann. Eine mögliche solche Wahl besteht darin, als Grundgrößen Energie, Geschwindigkeit und Drehimpuls zu nehmen. Dann erhält man⁽¹⁾

$$[L] = [JvE^{-1}], \quad [M] = [Ev^{-2}], \quad [T] = [JE^{-1}], \quad [F] = [E^2J^{-1}v^{-1}] \dots$$

Dabei gibt es eine klare Analogie zur linearen Algebra und zur möglichen Wahl von unterschiedlichen Basen auf einem gegebenen Vektorraum.

Jetzt soll man noch die *Basiseinheiten* für die neuen Grundgrößen wählen. Die Energie wollen wir im Folgenden in MeV messen, wobei 1 eV (Elektronenvolt) der Zunahme der kinetischen Energie eines durch eine Spannung von 1 Volt beschleunigten Elektrons entspricht, $1 \text{ eV} \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Dann wollen wir Geschwindigkeit in Einheiten der Vakuumlichtgeschwindigkeit c messen. Schließlich werden Drehimpulse in Einheiten des Wirkungsquantums \hbar ausgedrückt — entsprechend der gewöhnlichen Redensart „Spin $\frac{1}{2}$ “ für einen Spin, dessen Projektion auf eine Achse $\pm \frac{1}{2}\hbar$ beträgt.

Somit werden jetzt Längen in Einheiten von $\hbar c/\text{MeV}$ gemessen, Massen in Einheiten von MeV/c^2 , Zeiten in Einheiten von \hbar/MeV , Impulse in Einheiten von MeV/c , usw.:

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} \simeq \frac{1}{197,327} \frac{\hbar c}{\text{MeV}}, \quad 10^{-23} \text{ s} \simeq \frac{1}{65,82} \frac{\hbar}{\text{MeV}}, \quad 10^{-30} \text{ kg} \simeq \frac{1}{1,783} \text{ MeV}/c^2 \dots$$

Schließlich kann man $\hbar = c = 1$ annehmen, so dass Längen und Zeiten in MeV^{-1} und Massen in MeV angegeben sind.

Auf der Seite des Elektromagnetismus werden hiernach elektrische Ladungen in Einheiten der Elementarladung $e \simeq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ — entsprechend dem Betrag der Elektronenladung — gemessen. Darüber hinaus wird $\epsilon_0 = 1$ angenommen, woraus $\mu_0 = 1$ dank der Beziehung $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ folgt (Heaviside–Lorentz-Einheitensystem).

⁽¹⁾Vgl. die bekannten Beziehungen: de Broglie-Wellenlänge $\lambda = \hbar/\text{Impuls} = \hbar c/\text{Energie}$, Energie = Masse $\times c^2$, Energie = $\hbar \times$ Frequenz = \hbar/Zeit , Kraft = Gradient der potentiellen Energie = Energie / Länge...

Schließlich werden Temperaturen, falls sie auftreten, ebenfalls in MeV angegeben, entsprechend erstens der Wahl von Energie als Grundgröße — anstatt der Temperatur wie im SI-System —, und zweitens der Messung dieser neuen Basisgröße in Einheiten von der Boltzmann-Konstante k_B :

$$10^{11} \text{ K} = 8,617 \text{ MeV}/k_B.$$

Dann kann man $k_B = 1$ annehmen.

Notationen

Dreidimensionale Vektoren werden mit einem Pfeil geschrieben, wie z.B. \vec{p} oder \vec{x} .

Vierervektoren werden in einer Sans Serif-Schriftart geschrieben, wie z.B. \mathbf{p} (Viererimpuls), \mathbf{A} (Viererpotential), usw.

Die gleiche Schriftart wird auch für Lorentz-Tensoren höherer Stufe verwendet, z.B. für die Feldstärketensoren \mathbf{F} , \mathbf{G} , oder für den metrischen Tensor η . Dagegen werden die Komponenten dieser Vierervektoren und Lorentz-Tensoren in Kursivschrift geschrieben: p^μ , A^μ , $F^{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$, usw.

Quantenmechanische Operatoren werden mit einem Zirkumflex bezeichnet, z.B. \hat{a} , \hat{a}^\dagger

Indizes

Lateinische Indizes i, j, k, l , usw. laufen über die drei möglichen räumlichen Koordinaten, d.h. über 1, 2, 3 oder x, y, z .

Ziemlich inkonsequent wird auf ihre Stelle (tief- oder hochgestellt) nicht aufgepasst, wenn sie sich auf rein dreidimensionale Größen beziehen, d.h. nicht auf die räumlichen Komponenten von Vierervektoren oder allgemeineren Lorentz-Tensoren. Somit gilt $v_i = v^i$ für die i -Komponente der Geschwindigkeit \vec{v} . Dagegen ist im Fall des Raumanteils eines Vierervektors oder eines Lorentz-Tensors die Stelle des Index wichtig.

Griechische Indizes μ, ν, ρ, σ , usw. laufen über die vier Raumzeit-Koordinaten 0, 1, 2, 3. Auf die Stelle dieser Lorentz-Indizes soll aufgepasst werden, wie in Abschn. A.3 weiter betont wird.

Im ganzen Skript wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d.h. auf doppelt auftretende Indizes wird summiert. Somit gelten im Fall dreidimensionaler Indizes

$$a_i b_i = a^i b^i \equiv \sum_{i=1}^3 a_i b_i, \quad \mathcal{M}_{ii} \equiv \sum_{i=1}^3 \mathcal{M}_{ii},$$

entsprechend dem Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bzw. der Spur $\text{Tr } \mathcal{M}$. Im Fall von Lorentz-Indizes sollte der eine kontravariant, der andere kovariant sein [s. Abschn. A.3.5]:

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 a^\mu b_\mu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu, \quad T^\mu{}_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 T^\mu{}_\mu,$$

entsprechend dem Viererprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ bzw. der Spur $\text{Tr } \mathbf{T}$.

KAPITEL I

Teilchenzoo: eine Übersicht

-
- I.1 Inventar der Elementarteilchen 3
 - I.1.1 Leptonen 3
 - I.1.2 Quarks 3
 - I.1.3 Austauschteilchen 4
 - I.1.4 Higgs-Boson 4
 - I.2 Zusammengesetzte Teilchen 4
 - I.3 Teilcheneigenschaften 4
 - I.3.1 Äußere Freiheitsgrade 4
 - I.3.2 Innere Freiheitsgrade 4
-

In diesem (noch zu ergänzenden, insbesondere mit weiteren Beispielen) Kapitel werden zunächst die nach unserem heutigen (Herbst 2019) Wissen bekannten Elementarteilchen sowie deren Wechselwirkungen vorgestellt (Abschn. I.1). Dann werden in Abschn. I.3 die Eigenschaften von (Elementar)Teilchen eingeführt.

Liste der experimentell beobachteten Teilchen in der *Review of Particle Properties* [1], online verfügbar unten <https://pdg.lbl.gov>

I.1 Inventar der Elementarteilchen

I.1.1 Leptonen

I.1.1 a Elektrisch geladene Leptonen

Mit elektrischer Ladung $Q = -1$:

Elektron e^- — stabil, Masse $m_e \simeq 0,511 \text{ MeV}/c^2$

Myon μ^- — instabil, Masse $m_\mu \simeq 106 \text{ MeV}/c^2$

Tauon (oder Tau-Lepton) τ^- — instabil, Masse $m_\tau \simeq 1777 \text{ MeV}/c^2$

Jeweilige Antiteilchen: e^+ (*Positron*), μ^+ (*Antimyon*), τ^+ (*Antitauon*)

kollektive Bezeichnungen: für ein beliebiges geladenes Lepton: ℓ^- , Antilepton: ℓ^+

I.1.1 b Elektrisch neutrale Leptonen: Neutrinos

Elektron-Neutrino ν_e , Myon-Neutrino ν_μ , Tauon-Neutrino ν_τ

Antiteilchen: Elektron-Antineutrino $\bar{\nu}_e$, Myon-Antineutrino $\bar{\nu}_\mu$, Tauon-Antineutrino $\bar{\nu}_\tau$

I.1.2 Quarks

6 *Flavors*: u (Up), d (Down), s (Strange), c (Charm), b (Bottom), t (Top) — in Anordnung nach wachsender Masse.

Jedes Quark (q) eines gegebenen Flavors kann in drei sogenannten *Farben* (oft als rot, blau, grün bezeichnet, obwohl diese Farben nichts mit Licht irgendeiner Wellenlänge zu tun hat) vorkommen.

Antiquarks \bar{u} , \bar{d} , \bar{s} , \bar{c} , \bar{b} , \bar{t} .

I.1.3 Austauscheteilchen

3 relevante Wechselwirkungen:⁽²⁾ elektromagnetische; starke; schwache

In einer quantisierter Beschreibung, werden durch sog. *Austauschteilchen* (oder auch *Eichbosonen*) vermittelt:

- in der Quantenelektrodynamik (QED): Photon γ
koppelt nur an elektrisch geladenen Teilchen / Antiteilchen
- in der Quantenchromodynamik (QCD): 8 Gluonen g
koppeln nur an farbgeladenen Teilchen / Antiteilchen, d.h. Quarks und Gluonen. Nicht an Leptonen
- in der schwachen Wechselwirkung (manchmal: Quantenflavordynamik, QFD): W^+ , W^- , Z^0
koppeln an allen bekannten Teilchen / Antiteilchen

Das Photon, das Z^0 -Boson und jedes Gluon sind ihre eigenen Antiteilchen. Das W^+ und das W^- sind „ladungskonjugiert“ zu einander

I.1.4 Higgs-Boson

h

I.2 Zusammengesetzte Teilchen

nur durch Gluonen gebundene Zustände aus Quarks und Antiquarks (nicht Top) sind bekannt:

- *Baryonen*: bestehen aus 3 Quarks / 3 Antiquarks (im naiven Quark-Modell)
z.B. Proton (p): uud ; Neutron (n): udd ; Antiproton $\bar{p} = \bar{u}\bar{u}\bar{d}$, usw.
- *Mesonen*: bestehen aus einem Quark und einem Antiquark
z.B. Pionen (geladene: $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^- = d\bar{u}$; neutrales: π^0)
- „Exotica“: Tetraquarks? Pentaquarks? Glueballs?

I.3 Teilcheneigenschaften

I.3.1 Äußere Freiheitsgrade

Masse $m \geq 0$

für instabile Teilchen: mittlere Lebensdauer τ ; Zerfallsrate Γ

Zerfallskanäle mit den partiellen Zerfallsraten Γ_i oder äquivalent den Verzweungsverhältnissen⁽³⁾ Γ_i/Γ

wichtig, denn die erlaubten Kanäle spiegeln die Wechselwirkungen wider.

Antiteilchen haben gleiche Masse und Lebensdauer wie die dazugehörigen Teilchen

⁽²⁾ Gravitation vernachlässigbar zwischen Teilchen

⁽³⁾ Auf Englisch: branching ratio (BR)

I.3.2 Innere Freiheitsgrade

I.3.2a J^{PC}

Spin J : entweder Bosonen mit ganzzahligem $J \in \{0, 1, 2, \dots\}$ oder Fermionen mit halbzahligen Spin $J \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$

Quarks und Leptonen haben Spin $\frac{1}{2}$; Photon, Gluonen, W^\pm und Z^0 haben Spin 1; Higgs-Boson hat Spin 0

Spinaddition-Regel: Baryonen (und Pentaquarks) haben einen halbzahligen Spin (z.B. $\frac{1}{2}$ für p und n), Mesonen (und Tetraquarks und Glueballs) einen ganzzahligen (z.B. $J = 0$ für die Pionen π^+ , π^- , π^0)

Parität $P = 1$ oder -1 (oder kürzer $+$ oder $-$).

entspricht dem Eigenwert unter dem Paritätsoperator \hat{P} (Transformation $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$)

z.B. Quarks haben Parität $+$; Pionen haben Parität $-$; das Photon und die Gluonen haben Parität $-$

Ladungskonjugation $C = \pm 1$

entspricht dem Eigenwert unter dem Ladungskonjugationsoperator \hat{C} (transformiert ein Teilchen in sein Antiteilchen)

z.B. das neutrale Pion π^0 hat $C = +$; das Photon hat $C = -$

P und C sind nur dann definiert, wenn das Teilchen Eigenvektor zum entsprechenden Operator ist, d.h. nicht immer. Insbesondere nicht für Leptonen, während für Quarks nur P definiert ist

zusammenfassende Notation: J^P , J^{PC}

Antiteilchen haben den gleichen Spin und — falls sie definiert sind — die gleichen Parität und Ladungskonjugation wie die dazugehörigen Teilchen

I.3.2b Additive Quantenzahlen

Alle diese Quantenzahlen sind bei Antiteilchen entgegengesetzt zu denen der dazugehörigen Teilchen

Elektrische Ladung

Q

wird in Einheiten von der Elementarladung angegeben

-1 für die geladenen(!) Leptonen; $+\frac{2}{3}$ für die u -, c - und t -Quarks; $-\frac{1}{3}$ für die d -, s - und b -Quarks

Leptonen- und Baryonenzahl

Leptonenzahl \mathcal{L} : $+1$ für die Leptonen (s. § I.1.1), -1 für deren Antiteilchen, 0 sonst

Baryonenzahl \mathcal{B} : $+\frac{1}{3}$ für die Quarks, $-\frac{1}{3}$ für die Antiquarks, 0 für die anderen Elementarteilchen

Additivität: Baryonen — insbesondere Protonen und Neutronen — haben $\mathcal{B} = +1$, Mesonen $\mathcal{B} = 0$

Flavor-Quantenzahlen

- Isospin I_3 (oder I , z.B. in der Review of Particle Physics): $+\frac{1}{2}$ für u -Quarks, $-\frac{1}{2}$ für d -Quarks, 0 sonst.

Additivität: Protonen haben Isospin $+\frac{1}{2}$, Neutronen $-\frac{1}{2}$.

- Strangeness S : -1 für das s -Quark, 0 sonst
- Charm(ness) C : $+1$ für das c -Quark, 0 sonst
- Bottomness / Beauty B : -1 für das b -Quark, 0 sonst
- Topness T : $+1$ für das t -Quark, 0 sonst. Wird nie benutzt

Bemerkung: Dass die Strangeness des s -Quarks und die Beauty des b -Quarks -1 betragen ist rein konventionell — und hängt mit ihrer negativen elektrischen Ladung zusammen.

Teil A

**Relativistische
Quantenmechanik**

Elementarteilchen **blabla...**

eine Einleitung fehlt...: warum brauchen wir relativistische Bewegungsgleichungen?

KAPITEL II

Klein–Gordon-Gleichung

II.1	Heuristische Herleitung	10
II.2	Lösung der freien Klein–Gordon-Gleichung	11
II.2.1	Allgemeine Lösung	11
II.2.2	Teilchen-Interpretation der Klein–Gordon-Wellenfunktion	12
II.3	Zweite Quantisierung der freien Klein–Gordon-Gleichung	14
II.3.1	Zweite Quantisierung	14
II.3.2	Physikalische Deutung	15

Dieses Kapitel und die zwei darauf folgenden befassen sich mit relativistischen Wellengleichungen, und zwar für Teilchen mit dem Spin 0 (hiernach), $\frac{1}{2}$ (Kap. IV) oder 1 (Kap. III). In jedem dieser Fälle lässt sich ein solcher auf Wellenfunktionen basierender Formalismus sinnvoll nur auf *wechselwirkungsfreie* (oder kurz: freie) Teilchen anwenden — in Anwesenheit von Wechselwirkungen können nämlich Teilchen im relativistischen Regime leicht erzeugt werden, oder sie können zerfallen, was mit Wellenfunktionen nicht beschrieben werden kann.

Zunächst wird in Abschn. II.1 die freie Klein–Gordon-Gleichung eingeführt, deren Lösungen dann in Abschn. II.2 diskutiert werden. Die physikalische Deutung einiger dieser Lösungen führt zu Schwierigkeiten, die sich am besten im Rahmen einer quantenfeldtheoretischen Beschreibung vermeiden lassen. Somit werden in Abschn. II.3 einige Elemente der zweiten Quantisierung der Klein–Gordon-Wellenfunktion kurz dargestellt.

II.1 Heuristische Herleitung

Bekannterweise lautet die Schrödinger^(a)-Wellengleichung in Ortsdarstellung für ein nicht-relativistisches freies Teilchen mit der Masse m

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \vec{x}) \quad (\text{II.1})$$

mit dem Laplace^(b)-Operator $\Delta = \vec{\nabla}^2$. Diese Gleichung folgt aus der nicht-relativistischen Energie–Impuls-Beziehung $E = \vec{p}^2/2m$, wenn die Energie E und der Impuls \vec{p} jeweils durch die auf Wellenfunktionen wirkenden Differentialoperatoren $i\hbar\partial/\partial t$ und $-i\hbar\vec{\nabla}$ ersetzt werden. Dazu liefert das Betragsquadrat $|\psi(t, \vec{x})|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass sich das Teilchen zur Zeit t im Punkt t befindet.

Wendet man jetzt — nach Schrödinger, vgl. [2], Gl. (34)–(36) — diese Korrespondenz auf die relativistische Energie–Impuls-Relation $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$ an, so ergibt sich die Wellengleichung

$$\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 c^2 \Delta \right) \phi(t, \vec{x}) = m^2 c^4 \phi(t, \vec{x}). \quad (\text{II.2})$$

Diese Gleichung wird (wechselwirkungsfreie) *Klein^(c)–Gordon^(d)-Gleichung* genannt [3, 4].

^(a)E. SCHRÖDINGER, 1887–1961 ^(b)P.-S. LAPLACE, 1749–1827 ^(c)O. KLEIN, 1894–1977 ^(d)W. GORDON, 1893–1939

In relativistischer Notation gilt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial_0 \partial^0 + \partial_i \partial^i = \partial_\mu \partial^\mu \equiv \square, \quad (\text{II.3})$$

mit dem *d'Alembert*^(e)-Operator \square . Der Letztere ist offenbar relativistisch kovariant, denn es handelt sich um ein Lorentz-Quadrat. Dann lautet die Klein–Gordon-Gleichung (II.2) in relativistisch kovarianter Schreibweise

$$(\hbar^2 \square + m^2 c^2) \phi(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{II.4})$$

Dank der Lorentz-Kovarianz des d'Alembert-Operators ist das Verhalten dieser Gleichung unter einer beliebigen Lorentz-Transformation $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ völlig bestimmt durch das Verhalten der Wellenfunktion $\phi(\mathbf{x})$ unter der Transformation. Falls sich die Letztere gemäß $\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi'(\mathbf{x}') = \phi(\mathbf{x})$ transformiert, stellt die Klein–Gordon-Gleichung auch eine skalare Gleichung dar. In diesem Fall ist $\phi(\mathbf{x})$ ein Lorentz-Skalar, entsprechend einem Teilchen mit Spin 0.

Bemerkungen:

* Die Korrespondenzen $E \rightarrow i\hbar \partial / \partial t$, $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$ lassen sich kurz als

$$p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu \quad (\text{II.5})$$

zusammenfassen. Wird dies in $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$ eingesetzt, so folgt Gl. (II.4) sofort.

* Statt von der Beziehung $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ auszugehen, könnte man die Korrespondenz in die genauere Gleichung $E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ einsetzen, da die Energie eines Teilchens positiv sein soll. Wendet man aber den auf der rechten Seite resultierenden Differentialoperator $\sqrt{m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta}$ auf Wellenfunktionen an, so ergeben sich Ortsableitungen der Letzteren beliebiger Ordnung, entsprechend einer nicht-lokalen Gleichung, was unbefriedigend ist.

* Eine Lösung $\phi(\mathbf{x})$ der Klein–Gordon-Gleichung kann entweder reell- oder komplexwertig sein. Die Möglichkeiten werden im nächsten Abschnitt anhand der allgemeinen Lösung der Gleichung (II.4) weiter diskutiert.

II.2 Lösung der freien Klein–Gordon-Gleichung

In diesem Abschnitt wird zunächst die Form der allgemeine Lösung der freien Klein–Gordon-Gleichung (II.4) hergeleitet (§ II.2.1). Der Versuch, der allgemeinen Form für die Klein–Gordon-Wellenfunktion $\phi(\mathbf{x})$ eine ähnliche physikalische Deutung wie die der Schrödinger-Wellenfunktion zu geben, scheitert aber schnell (§ II.2.2).

II.2.1 Allgemeine Lösung

Da die Klein–Gordon-Gleichung eine lineare partielle Differentialgleichung ist, kann man als Lösungsansatz eine ebene Welle

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathcal{N} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

mit einer Amplitude \mathcal{N} annehmen. Unter Nutzung von $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_\mu x^\mu = k^\mu x_\mu$ ergibt das Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (II.4)

$$(-\hbar^2 k_\mu k^\mu + m^2 c^2) \mathcal{N} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 0.$$

Damit dies in jedem Raumzeitpunkt \mathbf{x} gilt, soll die Dispersionsrelation

$$k^0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 c^2 / \hbar^2}$$

erfüllt werden. Das heißt, für jeden Wert des Wellenvektors \vec{k} kann die Zeitkomponente k^0 zwei verschiedene Werte annehmen.

^(e)J. LE ROND D'ALEMBERT, 1717–1783

Eine allgemeine Lösung der Klein–Gordon-Gleichung ist eine Linearkombination solcher ebenen Wellen mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Um die beiden möglichen Vorzeichen von k^0 einfacher zu berücksichtigen, bezeichnet man

$$\omega_{\vec{k}} \equiv +c\sqrt{\vec{k}^2 + m^2c^2/\hbar^2}. \quad (\text{II.6})$$

Dann lautet die allgemeine Lösung

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \left[\mathcal{N}_+(\vec{k}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \mathcal{N}_-(\vec{k}) e^{i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3},$$

wobei das Integral über alle Werte $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ läuft. Unter Nutzung der offensichtlichen Eigenschaft $\omega_{-\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}$ gibt die Substitution $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ im zweiten Summanden

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \left[\mathcal{N}_+(\vec{k}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \mathcal{N}_-(-\vec{k}) e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}.$$

Führt man nun die Substitutionen $\vec{k} \rightarrow \vec{p}/\hbar$ und $\omega_{\vec{k}} \rightarrow p^0c/\hbar \equiv E_{\vec{p}}/\hbar$ durch — somit sind p^0 und $E_{\vec{p}}$ definitionsgemäß nicht-negativ —, so gilt einerseits

$$\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x} \rightarrow \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar},$$

wobei die eingeführten Größen p^0 und \vec{p} zu einem Vierervektor \mathbf{p} kombiniert wurden. Dank Gl. (II.6) genügt der Letztere der Beziehung $\mathbf{p}^2 = m^2c^2$.

Dazu kann man noch die bisher nicht präzisierten Koeffizienten $\mathcal{N}_+(\vec{k})$, $\mathcal{N}_-(-\vec{k})$ durch neue Koeffizienten $a_{\vec{p}}$, $b_{\vec{p}}$ wie folgt ersetzen⁽⁴⁾

$$\mathcal{N}_+(\vec{k}) \rightarrow \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}\hbar c}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}}, \quad \mathcal{N}_-(-\vec{k}) \rightarrow \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}\hbar c}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} b_{\vec{p}}^*.$$

Die allgemeine Lösung der Klein–Gordon-Gleichung (II.4) wird dann zu

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \left[a_{\vec{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + b_{\vec{p}}^* e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right] \frac{\hbar c d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}}, \quad (\text{II.7})$$

wobei das Integral über alle Werte $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ läuft.

Wenn $a_{\vec{p}}$ und $b_{\vec{p}}$ für jeden Wert von \vec{p} unabhängig voneinander sind, dann ist das Skalarfeld $\phi(\mathbf{x})$ komplexwertig, entsprechend zwei reellen Freiheitsgraden. Ein solches Feld beschreibt z.B. geladene Pionen π^\pm . Dagegen ist $\phi(\mathbf{x})$ reellwertig wenn $a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}}$ für jeden \vec{p} , entsprechend einem einzigen Freiheitsgrad: dies beschreibt z.B. neutrale Pionen π^0 .

II.2.2 Teilchen-Interpretation der Klein–Gordon-Wellenfunktion

Sucht man jetzt nach einer speziellen Lösung, die ein einziges Teilchen mit Masse m und Impuls \vec{q} beschreibt, so trifft man auf eine Schwierigkeit.

In der Tat führen die natürlichen Versuche $a_{\vec{p}} \propto \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$ oder $b_{\vec{p}} \propto \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$ jeweils zu Lösungen $\phi(t, \vec{x}) \propto e^{-iE_{\vec{q}}t/\hbar + i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}$ oder $\phi(t, \vec{x}) \propto e^{iE_{\vec{q}}t/\hbar - i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}$. Die Letztere könnte aber auch ein Teilchen mit negativer Energie $-E_{\vec{q}}$ und Impuls $-\vec{q}$ beschreiben, was physikalisch unannehmbar ist: wenn Teilchen mit negativer Energie existieren, dann kann man immer die Energie des Universums durch die Erzeugung neuer Teilchen reduzieren, und das Universum wird instabil.

⁽⁴⁾Die auf den ersten Blick willkürlich aussehenden Faktoren von \hbar , c oder $E_{\vec{p}}$ werden später in Abschn. II.3 zu einfacheren Gleichungen führen.

Dieses Problem lässt sich anders betrachten. Sei $\phi(x)$ eine Lösung der Klein–Gordon-Gleichung. Definiert man dann einen Viererstrom (genauer, eine Viererstromdichte) durch⁽⁵⁾

$$j_{\text{KG}}^\mu(x) \equiv \frac{i\hbar}{2m} [\phi(x)^* \partial^\mu \phi(x) - \phi(x) \partial^\mu \phi(x)^*] \equiv \begin{pmatrix} c\rho_{\text{KG}}(t, \vec{x}) \\ \vec{j}_{\text{KG}}(t, \vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.8})$$

so findet man

$$\partial_\mu j_{\text{KG}}^\mu(x) = \frac{\partial \rho_{\text{KG}}(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{KG}}(t, \vec{x}) = 0. \quad (\text{II.9})$$

Dies hat die allgemeine Form einer *Kontinuitätsgleichung* — wie z.B. jene der Elektrodynamik. Damit prüft man einfach nach, dass das Integral

$$\int \rho_{\text{KG}}(t, \vec{x}) d^3\vec{x}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

Beweis der Gl. (II.9):

Multipliziert man die Klein–Gordon-Gleichung (II.4) links mit $i\phi(x)^*$ und subtrahiert man davon das Produkt von $i\phi(x)$ mit der komplex konjugierten Gleichung zu Gl. (II.4), so ergibt sich (die x -Abhängigkeit wird der Kürze halber nicht geschrieben)

$$\begin{aligned} 0 &= i\phi^* \left(\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \Delta + m^2 c^2 \right) \phi - i\phi \left(\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \Delta + m^2 c^2 \right) \phi^* \\ &= \frac{\hbar^2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[i \left(\phi^* \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{1}{c} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \hbar^2 \vec{\nabla} \cdot \left[-i(\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*) \right], \end{aligned}$$

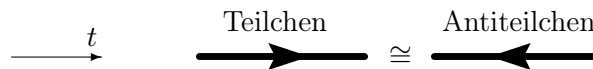
entsprechend bis auf einen Faktor $1/2m\hbar$ der Gleichung (II.9). □

In Anlehnung an den nicht-relativistischen Formalismus möchte man $\rho_{\text{KG}}(t, \vec{x})$ bzw. $\vec{j}_{\text{KG}}(t, \vec{x})$ als eine Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. eine Wahrscheinlichkeitsstromdichte interpretieren.⁽⁶⁾ Im Fall einer ebenen Welle $\phi(x) = \mathcal{N} e^{\mp i p \cdot x / \hbar}$ findet man aber $j_{\text{KG}}^\mu(x) = \pm |\mathcal{N}|^2 p^\mu / m$. Für eine Lösung in $e^{i p \cdot x / \hbar}$, d.h. mit negativer Energie, gilt somit $\rho_{\text{KG}} < 0$, was für eine Wahrscheinlichkeitsdichte nicht gelten darf.

Diese Lösungen mit negativer Energie — die man nicht einfach wegwerfen darf, da $e^{i p \cdot x / \hbar}$ eine ebenso gültige Lösung der Klein–Gordon Gleichung wie $e^{-i p \cdot x / \hbar}$ ist — haben historisch viel Verwirrung verursacht.

Die triviale Gleichung $e^{+i E_{\vec{p}} t / \hbar} = e^{-i E_{\vec{p}}(-t) / \hbar}$ deutet eine mögliche problemlose Deutung der Lösungen mit negativer Energie an, die auf Stückelberg^(f) and Feynman^(g) zurückgeht. Somit wird in dieser *Feynman–Stückelberg-Interpretation* ein Teilchen mit negativer Energie ($e^{+i E_{\vec{p}} t / \hbar}$) als ein Teilchen mit positiver Energie, das rückwärts in der Zeit propagiert, interpretiert. In einem zweiten Schritt wird das Letztere als ein Antiteilchen mit positiver Energie, das sich vorwärts in der Zeit bewegt, angesehen.

Bildlich lässt sich die Äquivalenz zwischen Teilchen, die vorwärts in Zeit propagieren, und deren Antiteilchen, die rückwärts propagieren, so darstellen:



Um die anscheinende Willkür dieser Interpretation etwa zu begründen, wird jetzt die korrekte Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen, basierend auf Quantenfeldern, jetzt eingeführt.

⁽⁵⁾ Der Faktor $\hbar/2m$ wurde eingeführt in Ähnlichkeit mit der Definition der Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\vec{j}_{\text{Schr.}} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)$$

der Schrödinger-Gleichung.

⁽⁶⁾ Eigentlich sollte j_{KG}^μ noch durch $\hbar c$ geteilt werden, um die passende physikalische Dimension für eine solche Interpretation zu erhalten. Die Schrödinger- und die Klein–Gordon-Wellenfunktion haben nämlich nicht die gleiche Dimension, vgl. Bemerkung am Ende des § II.3.2.

^(f) E. STÜCKELBERG, 1905–1984 ^(g) R. P. FEYNMAN, 1918–1988

II.3 Zweite Quantisierung der freien Klein–Gordon-Gleichung

In diesem Abschnitt wird der Übergang von einer Wellenfunktions- zu einer quantenfeldtheoretischen Beschreibung skizziert.

II.3.1 Zweite Quantisierung

Ersetzt man in der Lösung (II.7) der Klein–Gordon-Gleichung die klassischen Zahlen $a_{\vec{p}}, b_{\vec{p}} \in \mathbb{C}$ durch (nicht-hermitesche) Operatoren $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}$ eines noch un spezifizierten Hilbert^(h)-Raums mit den einfachen Vertauschungsrelationen

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (\text{II.10a})$$

sowie

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}] = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}] = [\hat{a}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger] = \dots = 0, \quad (\text{II.10b})$$

für alle $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$, so wird die Wellenfunktion $\phi(\mathbf{x})$ zu einem *Feldoperator*

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \int \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right) \frac{\hbar c \, d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}}. \quad (\text{II.11a})$$

Diese Substitution von kommutierenden Zahlen mit nicht-kommutierenden Operatoren wird gewöhnlich *zweite Quantisierung* genannt.

Die Kommutatoren (II.10) ähneln stark den Vertauschungsrelationen der bei der Quantisierung des harmonischen Oszillators eingeführten Leiteroperatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger . Somit werden jetzt die $\hat{a}_{\vec{p}}$ und $\hat{b}_{\vec{p}}$ bzw. die $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ und $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ als *Vernichtungs-* bzw. *Erzeugungsoperatoren* bezeichnet.

Der zu $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ hermitesch konjugierte Operator lautet

$$\hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger = \int \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + \hat{b}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right) \frac{\hbar c \, d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}}. \quad (\text{II.11b})$$

Definiert man einen zum Feldoperator $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ kanonisch konjugierten Operator durch

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{c} \partial_0 \hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger = \frac{i}{c} \int \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} - \hat{b}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right) \frac{E_{\vec{p}} \, d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}}, \quad (\text{II.12})$$

so führen die verschiedenen Vertauschungsrelationen (II.10) zum Kommutator

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = i\hbar \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{II.13})$$

Hier sollen die Felder zur gleichen Zeit betrachtet werden. Diese Relation ist jetzt ähnlich dem kanonischen Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ der Quantenmechanik.

Beweis der Relation (II.13): Das Einsetzen der Ausdrücke (II.11a) und (II.12), wobei der Letztere als Integral über die Variable \vec{q} geschrieben wird, in den Kommutator gibt

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = i\hbar \int \left([\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] e^{-i(\vec{p}\cdot\mathbf{x} - \vec{q}\cdot\mathbf{y})/\hbar} - [\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{q}}] e^{i(\vec{p}\cdot\mathbf{x} - \vec{q}\cdot\mathbf{y})/\hbar} \right) \frac{d^3\vec{p} \, E_{\vec{q}} \, d^3\vec{q}}{(2\pi\hbar)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}} 2E_{\vec{q}}}},$$

wobei die verschwindenden Kommutatoren $[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}]$ und $[\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger]$ schon weggelassen wurden. Mit Hilfe der Relationen (II.10a) wird die Integration nach \vec{q} trivial

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] &= i\hbar \int \left[\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) e^{-i(\vec{p}\cdot\mathbf{x} - \vec{q}\cdot\mathbf{y})/\hbar} + \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) e^{i(\vec{p}\cdot\mathbf{x} - \vec{q}\cdot\mathbf{y})/\hbar} \right] \frac{d^3\vec{p} \, E_{\vec{q}} \, d^3\vec{q}}{(2\pi\hbar)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}} 2E_{\vec{q}}}}, \\ &= i\hbar \int \left[e^{i[E_{\vec{p}}(y^0 - x^0) - \vec{p}\cdot(\vec{y} - \vec{x})]/\hbar} + e^{i[E_{\vec{p}}(x^0 - y^0) - \vec{p}\cdot(\vec{x} - \vec{y})]/\hbar} \right] \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned}$$

Mit $x^0 = y^0 = ct$ ergibt sich das gesuchte Ergebnis. □

^(h)D. HILBERT, 1862–1943

Bemerkung: Die komplizierten Faktoren von \hbar , c und $E_{\vec{p}}$, die in der Substitution vor Gl. (II.7) eingeführt wurden und sich im Ausdruck des Feldoperators (II.11a) wieder finden, wurden eigentlich so gewählt, dass die Vertauschungsrelation (II.13) eine einfache Form annimmt.

II.3.2 Physikalische Deutung

Um die physikalische Deutung der oben eingeführten Operatoren $\hat{a}_{\vec{p}}$, $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, $\hat{b}_{\vec{p}}$ und $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ besser zu erkennen, werden jetzt zwei „übliche“ quantenmechanische Operatoren durch diese Leiteroperatoren ausgedrückt.

II.3.2a Hamilton-Operator des freien Klein–Gordon-Feldes

Man kann zeigen, dass der Hamilton⁽ⁱ⁾-Operator für das Skalarfeld, dessen Dynamik durch die freie Klein–Gordon-Gleichung (II.4) beschrieben wird, durch

$$\hat{H} = \int \left[\hat{\pi}(\mathbf{x})^\dagger \hat{\pi}(\mathbf{x}) + \vec{\nabla} \hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger \cdot \vec{\nabla} \hat{\phi}(\mathbf{x}) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger \hat{\phi}(\mathbf{x}) \right] d^3 \vec{x} \quad (\text{II.14})$$

gegeben ist.

Skizzenhaft ist die Klein–Gordon-Gleichung (II.4) die Bewegungsgleichung, die sich aus der Lagrange^(j)-Dichte

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{KG}}[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \partial^\mu \hat{\phi}(\mathbf{x})] = \partial_\mu \hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger \partial^\mu \hat{\phi}(\mathbf{x}) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger \hat{\phi}(\mathbf{x})$$

unter Nutzung der Euler^(k)-Lagrange-Gleichung, entsprechend der Extremierung der Wirkung, herleiten lässt. Führt man eine Legendre^(l)-Transformation dieser Dichte bezüglich $\partial_0 \hat{\phi}(\mathbf{x})$ durch, so erhält man die Hamilton-Dichte, die den Integranden in Gl. (II.14) darstellt.

Setzt man den Ausdruck (II.11a) des Klein–Gordon-Feldes in diesen Hamilton-Operator ein, so findet man

$$\hat{H} = \int \left[\frac{1}{2} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) + \frac{1}{2} (\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger) \right] E_{\vec{p}} d^3 \vec{p} = \int \left[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \delta^{(3)}(\vec{0}) \right] E_{\vec{p}} d^3 \vec{p}, \quad (\text{II.15})$$

wobei die zweite Gleichung aus den Vertauschungsrelationen (II.10a) folgt. Bei den hermiteschen Operatoren $\hat{N}_{\vec{p}}^{(a)} \equiv \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ und $\hat{N}_{\vec{p}}^{(b)} \equiv \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}}$ im rechten Glied erkennt man in Ähnlichkeit mit dem nicht-relativistischen quantenmechanischen harmonischen Oszillator die *Besetzungszahloperatoren* für jeden Typ von Teilchen (a und b) mit einem gegebenen Impuls. Dazu stellt der Term $\delta^{(3)}(\vec{0})$ die unphysikalische Vakuumenergie dar, die schon bei der Quantisierung des einfachen harmonischen Oszillator auftritt. Wichtig ist, dass beide Teilchenarten *positiv* zur Gesamtenergie beitragen, auch wenn in der Wellenfunktion-Beschreibung die Wellen des Typs b eine „negative Energie“ hatten.

Die Herleitung des Ausdrucks (II.15) ist ähnlich den Beweisen des Kommutators (II.13) oben oder der Beziehung (II.17) unten und wird der Leserin überlassen.

Bemerkung: Der Ausdruck (II.14) des Hamilton-Operators liefert die hier adoptierte Dimension des Klein–Gordon-Feldes, und zwar $[\hat{\phi}] = [\text{M}^{1/2} \text{L}^{1/2} \text{T}^{-1}]$. In einem System natürlicher Einheiten hat $\hat{\phi}$ die Dimension einer Energie. Dazu geben die Kommutatoren (II.10a) die Dimension der Leiteroperatoren, $[\hat{a}] = [\hat{b}] = [(\text{MLT}^{-1})^{-3/2}]$.

II.3.2b Teilchenzahloperator

Um zwischen den beiden Teilchenarten unterscheiden zu können, kann man den Operator

$$\hat{N} \equiv \frac{i}{\hbar c} \int \left[\hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger \partial_0 \hat{\phi}(\mathbf{x}) - \hat{\phi}(\mathbf{x}) \partial_0 \hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger \right] d^3 \vec{x} \quad (\text{II.16})$$

⁽ⁱ⁾W. R. HAMILTON, 1805–1865 ^(j)J.-L. LAGRANGE, 1736–1813 ^(k)L. EULER, 1707–1783 ^(l)A.-M. LEGENDRE, 1752–1833

betrachten. Der Vergleich dieser Definition mit der Zeitkomponente des Viererstroms (II.8) weist auf die Erhaltung der entsprechenden physikalischen Größe — und zwar, des Erwartungswerts des Operators — hin.

Mit den Ausdrücken von $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ und $\hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger$ in Abhängigkeit der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und unter Verwendung der Vertauschungsrelationen der Letzteren ergibt sich

$$\hat{N} = \int \left[\frac{1}{2} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) - \frac{1}{2} (\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger) \right] d^3\vec{p} = \int \left[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \right] d^3\vec{p}. \quad (\text{II.17})$$

Beweis: Die Gleichungen (II.11) und (II.12), mit $\hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger$ und $\partial_0 \hat{\phi}(\mathbf{x})^\dagger$ bzw. $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ und $\partial_0 \hat{\phi}(\mathbf{x})$ geschrieben als Integral über \vec{p} bzw. \vec{q} , führen zu

$$\hat{N} = \int \left[(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + \hat{b}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}) (\hat{a}_{\vec{q}} e^{-i\vec{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} - \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger e^{i\vec{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}) \left(\frac{E_{\vec{q}}}{E_{\vec{p}}} \right)^{1/2} + (\hat{a}_{\vec{q}} e^{-i\vec{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger e^{i\vec{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}) (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} - \hat{b}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}) \left(\frac{E_{\vec{p}}}{E_{\vec{q}}} \right)^{1/2} \right] \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{2(2\pi\hbar)^3} d^3\vec{x}.$$

Multipliziert man die Produkte aus, so ergeben sich Terme der Art $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\mathbf{x}/\hbar}$ mit entweder $\pm i(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \mathbf{x}/\hbar$ oder $\pm i(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \mathbf{x}/\hbar$ im Exponenten. Durch die Integration über \vec{x} werden diese Exponentialfunktionen durch entsprechende Terme $(2\pi\hbar)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$ oder $(2\pi\hbar)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q})$ ersetzt. Integriert man als nächstes über \vec{q} , so werden die zwei Faktoren $\sqrt{E_{\vec{q}}/E_{\vec{p}}}$ und $\sqrt{E_{\vec{p}}/E_{\vec{q}}}$ gleich 1. Dann tauchen alle Produkte von \hat{a} und \hat{b} bzw. von ihren adjungierten Operatoren als Kommutatoren auf, die dank Gl. (II.10b) verschwinden. Die restlichen Terme entsprechen gerade dem zweiten Glied in Gl. (II.17).

Auf Gl. (II.17) erkennt man wieder die Besetzungszahloperatoren für jede Teilchenart, doch jetzt tragen sie mit entgegengesetzten Vorzeichen zu \hat{N} bei. Dies lässt sich einfach interpretieren, indem man sich vorstellt, dass die zugehörige Erhaltungsgröße irgendeiner erhaltenen „Ladung“ entspricht, wobei die Teilchen des Typs a eine positive Ladung und die Teilchen des Typs b eine negative, entgegengesetzte Ladung tragen.

Beide Teilchenarten besitzen also die gleiche Masse m — sie genügen derselben Klein–Gordon-Gleichung —, doch ihre Ladungen sind entgegengesetzt: bei dem Typ b handelt es sich definitionsgemäß um die *Antiteilchen* zum Typ a .

Als Beispiel kann man sich vorstellen, dass die durch $\hat{a}_{\vec{p}}$ und $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ beschriebenen Teilchen positiv geladene Pionen π^+ sind. Diese haben Spin 0 — so dass ihre Dynamik durch die Klein–Gordon-Gleichung beschrieben wird —, haben eine positive elektrische Ladung $Q = +1$ und einen positiven Isospin $I_3 = +1$.⁽⁷⁾ Das dazugehörige Antiteilchen, das durch die Operatoren $\hat{b}_{\vec{p}}$ und $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ beschrieben wird, ist das negativ geladene Pion π^- , mit derselben Masse $m_\pi \simeq 139,6 \text{ MeV}/c^2$, demselben Spin 0 und den entgegengesetzten Ladungen $Q = -1$ und $I_3 = -1$.

II.3.2c Interpretation der Leiteroperatoren

Somit lässt die Feynman–Stückelberg-Interpretation der Quanten des Typs b als Antiteilchen mit positiver Energie einfach als natürliche Folgerung des Formalismus wiederentdecken.

Die Wirkungen der unterschiedlichen Leiteroperatoren lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- $\hat{a}_{\vec{p}}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls \vec{p} , das also im Anfangszustand eines Zerfalls- oder Streuprozesses vorhanden sein muss. Somit steht dieser Vernichter für ein *einlaufendes Teilchen*.
- $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls \vec{p} , das sich also im Endzustand eines Zerfalls oder Stoßes befinden wird: dieser Erzeugungsoperator repräsentiert ein *auslaufendes Teilchen*.
- $\hat{b}_{\vec{p}}$ vernichtet ein *einlaufendes Antiteilchen* mit Impuls \vec{p} .
- $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ erzeugt ein *auslaufendes Antiteilchen* mit Impuls \vec{p} .

⁽⁷⁾Im Quark-Modell gilt $\pi^+ = u\bar{d}$, wobei das u -Quark und das \bar{d} -Antiquark beide den Isospin $+\frac{1}{2}$ haben.

Wenn der Feldoperator $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ hermitesch ist, so dass die entsprechende Wellenfunktion $\phi(\mathbf{x}) = \langle \hat{\phi}(\mathbf{x}) \rangle$ reelle Werte annimmt, dann gilt $\hat{a}_{\vec{p}} = \hat{b}_{\vec{p}}$ für jeden \vec{p} : das Teilchen ist sein eigenes Antiteilchen — als Beispiel sei das neutrale Pion π^0 genannt. Dieser Fall wird länger in Abschn. III.2 diskutiert.

Bemerkung: Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, $\hat{a}_{\vec{p}}$, $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ und $\hat{b}_{\vec{p}}$ — und somit der Feldoperator $\hat{\phi}(\mathbf{x})$, dessen hermitesch Konjugierter und deren Ableitungen — sind Operatoren auf einem (bosonischen) *Fock*^(m)-Raum, der den geeigneten Hilbert-Raum für Viel-Teilchen-Systeme darstellt. Ein besonderer Zustand dieses Raums ist der *Vakuumzustand* $|0\rangle$, der so definiert ist, dass $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = \hat{b}_{\vec{p}}|0\rangle = |\emptyset\rangle$ für jeden \vec{p} gilt, wobei $|\emptyset\rangle$ den Null-Vektor des Hilbert-Raums bezeichnet.⁽⁸⁾

Literatur zum Kapitel II

- Landau & Lifschitz, *Band IV: Quantenelektrodynamik* [5], Kap. II § 10–12.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [6], Kap. 3.2.
- Schwabl, *Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)* [7], Kap. 5.1–5.2.

⁽⁸⁾Üblicherweise wird eher einfach $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = \hat{b}_{\vec{p}}|0\rangle = 0$ geschrieben.

^(m)V. A. FOCK, 1898–1974

KAPITEL III

Maxwell-Gleichungen

III.1 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	18
III.1.1 Definitionen	18
III.1.2 Bewegungsgleichungen	19
III.2 Lösung der freien Maxwell-Gleichungen	20
III.2.1 Allgemeine Lösung der Maxwell-Wellengleichung	20
III.2.2 Zweite Quantisierung der Maxwell-Wellenfunktion	21

Dieses Kapitel geht auf die relativistische Wellengleichung für ein wechselwirkungsfreies masseloses Teilchen mit Spin 1 ein. Dabei handelt es sich tatsächlich um die Maxwell-Gleichungen des freien elektromagnetischen Feldes, die in einem ersten Schritt in kovarianter Schreibweise geschrieben werden (Abschn. III.1). Dann werden die Lösungen zu diesen Gleichungen in Abschn. III.2 diskutiert, wobei die wichtige Rolle der Eichinvarianz offenbar wird.

III.1 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Die (klassische) Elektrodynamik ist definitionsgemäß relativistisch kovariant — letztendlich wurden die Lorentz-Transformationen ja so eingeführt, dass sie die Maxwell-Gleichungen invariant lassen. In diesem Abschnitt wird dies explizit gezeigt, und zwar durch die Einführung des elektromagnetischen Viererpotentials und des daraus abgeleiteten Feldstärketensors (§ III.1.1), mit deren Hilfe die Maxwell-Gleichungen dann ausgedrückt werden (§ III.1.2).

III.1.1 Definitionen

Das Skalarpotential $\Phi(t, \vec{x})$ und das Vektorpotential $\vec{A}(t, \vec{x})$ der Elektrodynamik bilden zusammen einen Vierervektor, das *Viererpotential* $A(x)$, mit den kontravarianten Komponenten

$$A^\mu(x) = \begin{pmatrix} \Phi(x)/c \\ \vec{A}(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.1})$$

Ausgehend vom Viererpotential definiert man einen zweimal kontravarianten Lorentz-Tensor $F^{\mu\nu}(x)$, den elektromagnetischen *Feldstärketensor*, als

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x). \quad (\text{III.2})$$

Unter Nutzung der Beziehungen

$$\vec{\mathcal{E}}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(t, \vec{x}) - \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t}, \quad (\text{III.3a})$$

$$\vec{\mathcal{B}}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{x}) \quad (\text{III.3b})$$

prüft man nach, dass die Komponenten des Feldstärketensors einfach mit den Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$ verknüpft sind:

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i = \frac{\mathcal{E}^i}{c},$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\epsilon_{ijk} \mathcal{B}^k.$$

Diese Relationen lassen sich mithilfe der Matrixform des Feldstärketensors zusammenfassen

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathcal{E}_x}{c} & -\frac{\mathcal{E}_y}{c} & -\frac{\mathcal{E}_z}{c} \\ \frac{\mathcal{E}_x}{c} & 0 & -\mathcal{B}_z & \mathcal{B}_y \\ \frac{\mathcal{E}_y}{c} & \mathcal{B}_z & 0 & -\mathcal{B}_x \\ \frac{\mathcal{E}_z}{c} & -\mathcal{B}_y & \mathcal{B}_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.4})$$

wobei die x -Abhängigkeit der Felder der Kürze halber nicht geschrieben wurde.

III.1.2 Bewegungsgleichungen

Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum — d.h. in Abwesenheit äußerer Quellen — können mithilfe des elektromagnetischen Feldstärketensors als⁽⁹⁾

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0 \quad \forall \nu \quad (\text{III.5a})$$

und

$$\partial^\mu F^{\nu\rho}(x) + \partial^\nu F^{\rho\mu}(x) + \partial^\rho F^{\mu\nu}(x) = 0 \quad \forall \mu, \nu, \rho. \quad (\text{III.5b})$$

ausgedrückt werden. Die Letztere — entsprechend der Maxwell–Thomson⁽ⁿ⁾-Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$ und der Maxwell–Faraday^(o)-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} + \partial \vec{\mathcal{B}} / \partial t = \vec{0}$ — enthält keine Dynamik und folgt sofort aus der Antisymmetrie des Feldstärketensors (III.2).

Dagegen bestimmt Gl. (III.5a) die Dynamik der elektrischen und magnetischen Felder — die $\nu = 0$ -Komponente entspricht der Maxwell–Gauß^(p)-Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$, während die räumlichen Komponenten die Maxwell–Ampère^(q)-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}} + c^{-2} \partial \vec{\mathcal{E}} / \partial t = \vec{0}$ darstellen. Benutzt man die Definition (III.2) des Feldstärketensors, so ergibt sich

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu(x) = \square A^\nu(x) - \partial^\nu [\partial_\mu A^\mu(x)].$$

Bekannterweise sind die Potentiale Φ und \vec{A} , und somit A , nicht eindeutig definiert, sondern können gemäß sogenannter *Eichtransformationen*

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) \quad (\text{III.6})$$

mit $\chi(x)$ einer skalaren Funktion transformiert werden, ohne die physikalischen Felder $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{B}}$ bzw. den elektromagnetischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ zu ändern. Diese Eichfreiheit kann benutzt werden, um Gleichungen zu vereinfachen.

Zum Beispiel kann man erfordern, dass das Viererpotential der *Lorenz^(r)-Eichung*-Bedingung

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad (\text{III.7})$$

genügt. Unter dieser Forderung lauten die freien Maxwell-Gleichungen (III.5a) einfach

$$\square A^\nu(x) = 0. \quad (\text{III.8})$$

⁽⁹⁾In Anwesenheit einer äußeren Ladungsdichte $\rho(t, \vec{x})$ bzw. einer Ladungsstromdichte $\vec{j}(t, \vec{x})$ bilden die beiden eine *elektrische Viererstromdichte* mit kontravarianten Komponenten $j^\mu = (\rho c, \vec{j})^T$ und die Maxwell-Gleichungen (III.5a) lauten dann $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$.

⁽ⁿ⁾W. THOMSON, Lord KELVIN, 1824–1907

^(o)M. FARADAY, 1791–1867

^(p)C. F. GAUSS, 1777–1855

^(q)A.-M. AMPÈRE, 1775–1836 ^(r)L. LORENZ, 1829–1891

Somit sind die Maxwell-Gleichungen ziemlich ähnlich der Klein-Gordon-Gleichung (II.4), für den Fall masseloser Teilchen. Da $A^\mu(\mathbf{x})$ sich wie ein (kontravarianter) Vierervektor transformiert, handelt es sich um Teilchen mit dem Spin 1.

Bemerkungen:

* Für massive Teilchen mit dem Spin 1, beschrieben durch ein Vektorfeld $V^\mu(\mathbf{x})$, heißt die relativistische Wellengleichung

$$(\hbar^2 \square + m^2 c^2) V^\mu(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{III.9})$$

Proca^(s)-Gleichung, wobei m die Teilchenmasse bezeichnet. Wegen des Massenterms besitzt aber das Vektorfeld $V^\mu(\mathbf{x})$ keine Eichfreiheit mehr.

* Die Lorenz-Eichung-Bedingung (III.7) bestimmt noch nicht das Viererpotential eindeutig. Es gibt noch eine Eichfreiheit um einen Vierergradienten $\partial^\mu \chi(\mathbf{x})$, wobei $\chi(\mathbf{x})$ eine Lösung von $\square \chi(\mathbf{x}) = 0$ ist. In Abwesenheit äußerer Quellen kann diese Freiheit benutzt werden, um die temporale *Weyl*^(t)-Eichung-Bedingung

$$A^0(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{III.10})$$

zu erfordern. Dann wird die Lorenz-Eichung äquivalent zur *Coulomb*^(u)-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) = 0. \quad (\text{III.11})$$

III.2 Lösung der freien Maxwell-Gleichungen

In diesem Abschnitt werden die Lösungen der Maxwell-Gleichungen im freien Raum (III.8) unter Berücksichtigung der (Eichung-)Bedingungen (III.10) und (III.11) untersucht. Dabei sollen die Lösungen reellwertig sein, damit die physikalischen elektrischen und magnetischen Felder ebenfalls reelle Werte annehmen.

III.2.1 Allgemeine Lösung der Maxwell-Wellengleichung

Anknüpfend an die Ergebnisse des Abschn. II.2 über die Lösungen der freien Klein-Gordon-Gleichung kann man die allgemeine Lösung der Gl. (III.8) schreiben als eine Überlagerung ebener Wellen mit unterschiedlichen Wellenvektoren [vgl. Gl. (II.7)]

$$A^\mu(\mathbf{x}) = \int \sum_{\lambda} \varepsilon_{(\lambda)}^\mu(\vec{p}) \left[a_{\vec{p}}^{(\lambda)} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + a_{\vec{p}}^{(\lambda)*} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right] \frac{\hbar c \, d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}}, \quad (\text{III.12})$$

mit dem (reellen) *Polarisationsvektor* $\varepsilon_{(\lambda)}^\mu(\vec{p})$ für jeden *Polarisationszustand* λ . Dabei ist die zeitliche Komponente des Viererimpulses \mathbf{p} durch

$$p^0 \equiv \frac{E_{\vec{p}}}{c} \equiv |\vec{p}| \quad (\text{III.13})$$

gegeben, entsprechend dem Grenzwert $m = 0$ in der Dispersionsrelation für die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung.

Die Bedingung $A^0(\mathbf{x}) = 0$ gibt sofort $\varepsilon_{(\lambda)}^0(\vec{p})$ für jeden Impuls \vec{p} und Polarisationszustand λ . Dann führt die Coulomb-Eichung-Bedingung $\partial_j A^j(\mathbf{x}) = 0$ dank $\partial_j e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} = -ip_j e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}/\hbar$ zu

$$p_j \varepsilon_{(\lambda)}^j(\vec{p}) = 0,$$

d.h. der dreidimensionale Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}_{(\lambda)}(\vec{p})$ ist senkrecht zur Propagationsrichtung der Welle: die freie Welle wird als *transversal polarisiert* bezeichnet.

^(s)A. PROCA, 1897–1955 ^(t)H. WEYL, 1885–1955 ^(u)C.-A. DE COULOMB, 1736–1806

Für jeden Impuls \vec{p} gibt es zwei linear unabhängige Lösungen von $\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0$. Ist \vec{p} z.B. in z -Richtung gerichtet, so findet man die möglichen unabhängigen Polarisationsvektoren

$$\vec{\varepsilon}_{(1)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_{(2)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Natürlich sind andere Wahlen der Basisvektoren möglich. Wichtig ist, das es für jeden Impuls \vec{p} nur zwei unabhängige Freiheitsgrade gibt, entsprechend den zwei möglichen Polarisationsrichtungen.

Naiv könnte man vier Freiheitsgrade erwarten, entsprechend der Zahl der Komponenten eines Vierervektors. Da Gl. (III.12) es erlaubt, die Normierung des Polarisationsvektors frei zu wählen — in den Beispielen oben wurde $\varepsilon_{(\lambda)}^\mu(\vec{p})$ auf -1 normiert —, bleiben nur drei Freiheitsgrade. Dies wäre ja zufriedenstellend, denn ein Teilchen mit Spin 1 besitzt normalerweise drei Freiheitsgrade: für $j = 1$ sind $m_j = -1, 0$ und $+1$ möglich. Für masselose Teilchen mit Spin 1 existiert aber die Eichfreiheit, so dass einer dieser Freiheitsgrade tatsächlich keine Dynamik enthält, und nur zwei dynamische Spinzustände bleiben.

Ist das Teilchen mit Spin 1 massiv, und somit beschrieben durch die Proca-Gleichung (III.9), so gibt es keine Eichfreiheit mehr, und es bleiben drei Spinzustände.

In einem echten Teilchenstoß-Experiment ist die Polarisation bzw. der Spin der einlaufenden und auslaufenden Teilchen nicht immer gemessen. Somit wird es sich lohnen, über Polarisationen summieren zu können, d.h. den Tensor

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_{(\lambda)}^\mu(\vec{p}) \varepsilon_{(\lambda)}^\nu(\vec{p})$$

zu berechnen. Diese Summe wird als *Vollständigkeitsrelation* bezeichnet. In Coulomb-Eichung gilt

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_{(\lambda)}^i(\vec{p}) \varepsilon_{(\lambda)}^j(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^2} \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3, \quad (\text{III.14})$$

während jede Komponente des Tensors mit entweder $\mu = 0$ oder $\nu = 0$ verschwindet.

III.2.2 Zweite Quantisierung der Maxwell-Wellenfunktion

Führt man jetzt die zweite Quantisierung der allgemeinen Lösung (III.12) durch, indem die komplexen Amplituden $a_{\vec{p}}^{(\lambda)}$ durch Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)}$ mit den Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\vec{q}}^{(\lambda')} \right] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\vec{q}}^{(\lambda')\dagger} \right] = \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)\dagger}, \hat{a}_{\vec{q}}^{(\lambda')} \right] = 0 \quad (\text{III.15})$$

ersetzt werden, so erhält man den Feldoperator

$$\hat{A}^\mu(\mathbf{x}) = \int \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_{(\lambda)}^\mu(\vec{p}) \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + \hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)\dagger} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right] \frac{\hbar c \, d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}}. \quad (\text{III.16})$$

Verglichen mit dem Feldoperator (II.11a) gibt es hier keinen Operator des \hat{b} -Typs, entsprechend der Hermitizität von $\hat{A}^\mu(\mathbf{x})$ bzw. der Reellwertigkeit dessen Vakuumserwartungswerts $A^\mu(\mathbf{x})$. Es gibt also kein unabhängiges Antiteilchen zu dem durch $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)}$ beschriebenen Teilchen — z.B., wenn $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)\dagger}$ ein Quantum des elektromagnetischen Feldes, ein *Photon*, mit der Polarisation λ erzeugt, bedeutet dies, dass es kein Antiphoton gibt: das Photon ist sein eigenes Antiteilchen.

Die Operatoren $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)\dagger}$ lassen sich wie in Abschn. II.3 interpretieren:

- $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls \vec{p} und Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}_{(\lambda)}(\vec{p})$, das also im Anfangszustand eines Stoßprozesses vorhanden sein muss. Somit repräsentiert dieser Vernichtungsoperator ein *einlaufendes Teilchen*.

- $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)\dagger}$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls \vec{p} und Polarisation λ , das sich also im Endzustand einer Streuung befinden wird: dieser Erzeuger repräsentiert ein *auslaufendes Teilchen*.

Bemerkung: Der erste Kommutator (III.15) liefert die Dimension der Leiteroperatoren $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)}$, $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)\dagger}$, und somit die Dimension des Vektorfelds $\hat{A}^\mu(\mathbf{x})$, Gl. (III.16). Wie im Fall des Klein-Gordon-Feldes gilt $[\hat{A}^\mu] = [M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}]$: dies entspricht nicht der üblichen Dimension des elektromagnetischen Potentials, lässt sich aber einfacher auf andere Vektorfelder verallgemeinern.

Literatur zum Kapitel III

- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 7.4.
- Landau & Lifschitz, *Band IV: Quantenelektrodynamik* [5], Kap. I § 2–4.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [6], Kap. 7.1.

KAPITEL IV

Dirac-Gleichung

-
- IV.1 Heuristische Herleitung 23
 - IV.2 „Diracologie“ 25
 - IV.2.1 Eigenschaften der Dirac-Matrizen 25
 - IV.2.2 Chiralitätsoperator 26
 - IV.2.3 Dirac-adjungierter Spinor 27
 - IV.3 Lösung der freien Dirac-Gleichung 27
 - IV.3.1 Wellenlösungen 27
 - IV.3.2 Zweite Quantisierung der Wellenlösungen 31
 - IV.3.3 Helizität und Chiralität 33
-

Historisch wurde die Existenz der Lösungen der Klein–Gordon-Gleichung mit negativer Energie als einen Beweis der Irrelevanz der Gleichung für Physik angesehen, bevor die Stückelberg–Feynman-Interpretation und die zweite Quantisierung eingeführt wurden. Da diese damals unerwünschten Lösungen daraus folgen, dass die Klein–Gordon-Gleichung (II.4) zweiter Ordnung in der Zeit t ist, wurde nach einer alternativen relativistischen Wellengleichung erster Ordnung in t gesucht. Eine solche Gleichung wurde durch P. A. M. Dirac^(v) gefunden [9] und wird in Abschn. IV.1 für den Fall eines freien Teilchen hergeleitet. Diese Gleichung nutzt Matrizen, deren Eigenschaften in Abschn. IV.2 dargestellt sind. Schließlich befasst sich Abschn. IV.3 mit den Lösungen der Gleichung sowie mit deren physikalischen Deutung.

IV.1 Heuristische Herleitung

Die ursprüngliche Idee von Dirac bestand darin, die linke Seite der quadratischen relativistischen Energie–Impuls-Beziehung $\mathbf{p}^2 - m^2 c^2 = 0$ als Produkt von zwei linearen Beiträgen zu faktorisieren

$$p_\mu p^\mu - m^2 c^2 \equiv (\gamma^\nu p_\nu + mc)(\beta^\lambda p_\lambda - mc)$$

wobei $\beta^\lambda, \gamma^\nu$ acht zu bestimmenden Koeffizienten sind. Dann gewährleistet das Verschwinden eines der Multiplikatoren des rechten Glieds, dass die Beziehung erfüllt wird. Berechnet man das Produkt auf der rechten Seite, so ergibt sich durch Gleichsetzung der quadratischen und linearen Terme in \mathbf{p} jeweils

$$\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \beta^\lambda \gamma^\nu p_\lambda p_\nu \quad \text{und} \quad mc(\beta^\lambda - \gamma^\lambda) p_\lambda = 0.$$

Die zweite Gleichung liefert $\beta^\lambda = \gamma^\lambda$ für $\lambda = 0, \dots, 3$. Ersetzt man dann β^λ in der ersten Gleichung, so lautet die Letztere (hier wird die Einsteinsche Summenkonvention ausnahmsweise nicht verwendet!)

$$\sum_{\mu=0}^3 (\gamma^\mu)^2 (p_\mu)^2 + \sum_{\substack{\mu, \nu=0 \\ \mu \neq \nu}}^3 (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu = \sum_{\mu=0}^3 \eta^{\mu\mu} (p_\mu)^2.$$

^(v)P. A. M. DIRAC, 1902–1984

Der Vergleich der Koeffizienten der Bilinearformen in p_0, p_1, p_2, p_3 auf den beiden Seiten dieser Gleichung führt zu

$$(\gamma^0)^2 = +1, \quad (\gamma^1)^2 = -1, \quad (\gamma^2)^2 = -1, \quad (\gamma^3)^2 = -1, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0 \text{ für } \mu \neq \nu. \quad (\text{IV.1})$$

Mit Zahlen können diese Beziehungen aber nicht erfüllt werden — die Wahlen $\gamma^0 = \pm 1, \gamma^k = \pm i$ genügen ja den vier ersten Relationen, nicht aber der letzten.

Um mögliche Lösungen des Systems (IV.1) zu finden, soll man somit nicht nach Zahlen, sondern nach $N \times N$ -Matrizen suchen. Mittels des Antikommutators zweier Matrizen $\{A, B\} \equiv AB + BA$ lassen sich die Beziehungen als

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_N \quad \text{für } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{IV.2})$$

umschreiben, wobei $\mathbb{1}_N$ die $N \times N$ -Identitätsmatrix und $\eta^{\mu\nu}$ die Komponenten des inversen metrischen Tensors sind.

Bemerkung: Physiker bezeichnen oft die Beziehungen (IV.2) als *Clifford*^(w)-*Algebra*.

Die Matrizen kleinster Dimension, die den Beziehungen (IV.2) genügen, sind 4×4 -Matrizen.

Der Fall $N = 1$ entspricht Zahlen und wurde schon diskutiert.

Für $N = 2$ existieren ja drei linear unabhängige 2×2 -Matrizen, die Pauli-Matrizen σ_k , die tatsächlich miteinander antikommutieren: $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}$. Die einzigen noch bleibenden linear unabhängigen Matrizen sind proportional zur Identität $\mathbb{1}_2$, die aber nicht mit den Pauli-Matrizen antikommutiert: $\{\mathbb{1}_2, \sigma_k\} = 2\sigma_k$, so dass Beziehung (IV.2) nicht erfüllt werden kann.

Für $N = 3$ führt die Gleichung $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$ für $\mu \neq \nu$ zu $(\det \gamma^\mu)(\det \gamma^\nu) = -(\det \gamma^\mu)(\det \gamma^\nu)$. Somit sollte eine der Determinanten gleich 0 sein, was vermieden sein muss, damit das Produkt einer γ^μ -Matrix mit einem nicht-verschwindenden D -komponentigen Vektor nicht Null ist.

Eine mögliche Wahl, genannt *Standard-* oder *Dirac-Darstellung*, besteht aus den Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.3})$$

mit den üblichen Pauli-Matrizen σ_k für $k = 1, 2, 3$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.4})$$

Die Matrizen γ^μ werden als *Dirac-Gamma-Matrizen* oder kurz *Dirac-Matrizen* bezeichnet.

Zusammen bilden die vier Dirac-Matrizen γ^μ eine Größe, die sich unter der Lorentz-Gruppe wie ein kontravarianter Vektor — dessen Komponenten 4×4 -Matrizen sind — transformieren. Dementsprechend stellen die Beziehungen (IV.2) die Komponenten einer Gleichung zwischen zwei Lorentz-Tensoren zweiter Stufe dar, wobei jede Komponente schon eine 4×4 -Matrix ist.

Sei a_μ ein aus vier Zahlen bestehender kovarianter Vektor. Dann bezeichnet das „Skalarprodukt“ $a_\mu \gamma^\mu$ eine Lorentz-invariante 4×4 -Matrix. Diese lässt sich auch kompakt in der durch Feynman eingeführten *Slash-Notation* als

$$\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu \quad (\text{IV.5})$$

schreiben.

Die relativistische Energie–Impuls-Beziehung $p_\mu p^\mu - m^2 c^2 = 0$ für ein Teilchen der Masse m kann jetzt erfüllt werden, indem wir das Teilchen durch eine Größe $\psi(x)$ beschreiben, auf das die Wirkung der Matrix $\gamma^\mu p_\mu - mc\mathbb{1}_4$ Null gibt: $(\gamma^\mu p_\mu - mc\mathbb{1}_4)\psi(x) = 0$, wobei wir im Folgenden die

^(w)W. K. CLIFFORD, 1845–1879

4-dimensionale Identitätsmatrix $\mathbb{1}_4$ weglassen können. Unter Verwendung der Korrespondenz (II.5) zur Ortsdarstellung ergibt sich dann die freie *Dirac-Gleichung* (in Ortsdarstellung)

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{IV.6a})$$

Unter Verwendung der Slash-Notation lautet dies auch

$$(i\hbar\cancel{\partial} - mc)\psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{IV.6b})$$

Da die Dirac-Matrizen der Dimension 4 sind, ist $\psi(\mathbf{x})$ ein vierkomponentiger Spaltenvektor, der auch *Dirac-Spinor* oder *4-Spinor* genannt wird. Unter Lorentz-Transformationen transformiert sich der Letztere aber nicht wie ein Vierervektor — seine Komponenten sollten deshalb nicht mit einem Lorentz-Index $\mu = 0, 1, 2, 3$ bezeichnet werden.

Die Anwesenheit der Pauli-Matrizen in den Dirac-Matrizen (IV.3) deutet darauf hin, dass die Dirac-Spinoren Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ beschreiben. Solche Teilchen besitzen aber nur zwei Freiheitsgrade, während ein Dirac-Spinor vier Freiheitsgrade hat. Tatsächlich werden wir im Folgenden sehen, dass ein Dirac-Spinor ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen und sein Antiteilchen auf einmal beschreiben.

Bemerkungen:

- * Mittels des metrischen Tensors definiert man auch Matrizen γ_μ .
- * Andere Darstellungen der Dirac-Matrizen sind auch möglich, und lassen sich durch Basistransformationen im vierdimensionalen Vektorraum, auf welchen die γ^μ -Matrizen wirken, erhalten. Zum Beispiel ist es manchmal bequemer, mit der folgenden sog. *chiralen Darstellung* zu arbeiten

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.7})$$

IV.2 „Diracologie“

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften der Gamma-Matrizen dargestellt, sowie einige Definitionen eingeführt.

IV.2.1 Eigenschaften der Dirac-Matrizen

Hiernach werden einige Eigenschaften der Dirac-Matrizen gelistet, die sich in einer gegebenen Darstellung einfach nachprüfen lassen.

IV.2.1 a Spuren von Dirac-Matrizen und deren Produkte

Die Dirac-Matrizen sind spurlos

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0 \quad \text{für } \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{IV.8})$$

Die Grundrelation (IV.2) gibt $(\gamma^\mu)^2 = \eta^{\mu\mu}\mathbb{1}_4$ für jeden möglichen μ . Sei jetzt $\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ und $\mu \neq \nu$. Dann führt $\gamma^\nu = \gamma^\nu(\gamma^\mu)^2/\eta^{\mu\mu}$ zu

$$\text{Tr } \gamma^\nu = \frac{1}{\eta^{\mu\mu}} \text{Tr } [\gamma^\nu(\gamma^\mu)^2] = -\frac{1}{\eta^{\mu\mu}} \text{Tr } [\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu] = -\frac{1}{\eta^{\mu\mu}} \text{Tr } [(\gamma^\mu)^2\gamma^\nu] = -\text{Tr } \gamma^\nu,$$

wobei die zweite Gleichung aus der Antikommutationsrelation (IV.2) folgt, und die dritte aus der Zyklizität der Spur. \square

Die Spur des Produkts zweier Dirac-Matrizen folgt sofort aus dem Antikommutator (IV.2)

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu} \quad \text{für } \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (\text{IV.9})$$

Das Produkt von drei Dirac-Matrizen, oder allgemeiner von einer ungeraden Zahl von Dirac-Matrizen ist spurlos

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = 0 \quad \text{für } \mu, \nu, \rho \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (\text{IV.10})$$

Der Beweis nutzt die unter eingeführte γ_5 -Matrix und deren Eigenschaften $(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4$ und $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ für jeden μ . Dann wird wie im Beweis der Eigenschaft (IV.8) $(\gamma_5)^2$ in die Spur eingeführt: eine der γ_5 wird mit den anderen Matrizen des Produkts dreimal (oder mehr, im Fall des Produkts von 5 oder mehr Matrizen) antikommutiert, und die Zyklichkeit der Spur gibt letztendlich $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = -\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho)$. \square

IV.2.1 b Verhalten unter hermitescher Konjugation

Auf Gl. (IV.3) sieht man sofort, dass γ^0 in der Standard-Darstellung reell symmetrisch und somit hermitesch ist, $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$. Dagegen sind γ^1 und γ^3 in dieser Darstellung reell antisymmetrisch und deshalb antihermitesch, $(\gamma^1)^\dagger = -\gamma^1$ und $(\gamma^3)^\dagger = -\gamma^3$. Schließlich ist die Dirac-Darstellung von γ^2 komplex symmetrisch, also ebenfalls antihermitesch, $(\gamma^2)^\dagger = -\gamma^2$.

Dank der allgemein geltenden Relation (IV.2) können diese Eigenschaften der Gamma-Matrizen in der Dirac-Darstellung als

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad \text{für } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{IV.11})$$

zusammengefasst werden.

Die Beziehungen (IV.11) lassen sich auch in der chiralen Darstellung (IV.7) der Dirac-Matrizen einfach prüfen.

Diese Relationen (IV.11) folgen allgemeiner aus der nötigen Hermitizität des auf Dirac-Spinoren wirkenden Hamilton-Operators $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} c + \beta m c^2 \mathbb{1}_4$, wobei $\alpha^k = (\gamma^0)^{-1} \gamma^k = \gamma^0 \gamma^k$ für $k = 1, 2, 3$ und $\beta = (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$.

Aus Gl. (IV.11) folgt die Unitarität der Dirac-Matrizen

$$(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^\mu = \mathbb{1}_4 \quad \text{für } \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{IV.12})$$

IV.2.2 Chiralitätsoperator

Mit den Dirac-Matrizen definiert man den (auf Dirac-Spinoren wirkenden) *Chiralitätsoperator*

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (\text{IV.13})$$

In der Dirac-Darstellung findet man sofort

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.14})$$

während in der chiralen Darstellung γ_5 diagonal ist:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.15})$$

Aus der Definition (IV.13) und der Relation (IV.2) folgen sofort die Eigenschaften

$$(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4, \quad (\text{IV.16a})$$

so dass die einzigen möglichen Eigenwerte von γ_5 nur $+1$ und -1 sein können, und

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad \text{für } \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{IV.16b})$$

Dazu ist γ_5 spurlos

$$\text{Tr } \gamma_5 = 0. \quad (\text{IV.16c})$$

Mithilfe von $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}_4$, der Vertauschungsrelation $\{\gamma^0, \gamma_5\} = 0$ und der Zyklichkeit der Spur erhält man $\text{Tr } \gamma_5 = \text{Tr} [(\gamma^0)^2 \gamma_5] = -\text{Tr} [\gamma^0 \gamma_5 \gamma^0] = -\text{Tr} [\gamma^5 (\gamma^0)^2] = -\text{Tr } \gamma_5$. \square

Schließlich führt Gl. (IV.11) zur Hermitizität von γ_5

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5. \quad (\text{IV.16d})$$

Bemerkung: Eine nützliche alternative Formel für γ_5 ist

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma, \quad (\text{IV.17})$$

mit dem Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ [Gl. (A.45)] mit der Konvention $\epsilon_{0123} = -1$. Dieser Ausdruck zeigt, dass sich γ_5 unter Lorentz-Transformationen wie ein Pseudoskalar transformiert, da $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ein Pseudotensor ist.

IV.2.3 Dirac-adjungierter Spinor

Sei ψ ein Dirac-Spinor, mit

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Der dazu hermitesch-konjugierte Spinor ψ^\dagger wird definiert als

$$\psi^\dagger = (a^* \ b^* \ c^* \ d^*).$$

Nützlicher als ψ^\dagger ist aber der *Dirac-adjungierte Spinor* $\bar{\psi}$, definiert als

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \quad (\text{IV.18})$$

Man kann zeigen, dass $\bar{\psi}$ sich unter Lorentz-Transformationen einfacher als ψ^\dagger transformiert.

Mithilfe der Beziehung (IV.11) findet man, dass wenn $\psi(x)$ der Dirac-Gleichung (IV.6a) erfüllt, dann genügt $\bar{\psi}(x)$ der Gleichung

$$\bar{\psi}(x) (i\hbar \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu + mc) = 0, \quad (\text{IV.19})$$

wobei der Pfeil nach links bedeutet, dass die Ableitungen hier nach links wirken.

IV.3 Lösung der freien Dirac-Gleichung

Dieser Abschnitt geht auf die Lösungen der Gleichung (IV.6) und einige deren Eigenschaften ein, beginnend mit ebenen Wellen (§ IV.3.1). Dann wird die zweite Quantisierung dieser Lösungen in § IV.3.2 kurz dargestellt. Schließlich befasst sich § IV.3.3 mit zwei Größen, die eine Lösung charakterisieren.

IV.3.1 Wellenlösungen

Da die Dirac-Gleichung eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist, sucht man nach Lösungen in Form von ebenen Wellen.

Sei also

$$\psi(x) = u(\vec{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}, \quad (\text{IV.20})$$

wobei der Dirac-Spinor $u(\vec{p})$ ortsunabhängig ist. Dieser spielt die gleiche Rolle, wie der Polarisationsvektor bei den Lösungen der Maxwell-Gleichungen [vgl. Abschn. III.2].

Setzt man diesen Ansatz in die Dirac-Gleichung (IV.6a) ein, so kommt dank der Beziehung $i\hbar \partial_\mu e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} = p_\mu e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$ die Gleichung

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u(\vec{p}) = (\not{p} - mc)u(\vec{p}) = 0. \quad (\text{IV.21a})$$

Diese Gleichung bedeutet, dass $u(\vec{p})$ Eigenvektor der Matrix \not{p} mit dem Eigenwert mc ist. In der Standard-Darstellung (IV.3) der Dirac-Matrizen lautet dies

$$\begin{pmatrix} (p^0 - mc)\mathbb{1}_2 & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & (-p^0 - mc)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A(\vec{p}) \\ u_B(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.21b})$$

mit einspaltigen zweikomponentigen Vektoren $u_A(\vec{p})$ und $u_B(\vec{p})$, während $\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \equiv p^j \sigma_j$ mit den Pauli-Matrizen σ_j . Diese Matrixgleichung gibt sofort

$$\begin{pmatrix} (p^0 - mc)u_A(\vec{p}) - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_B(\vec{p}) \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_A(\vec{p}) - (p^0 + mc)u_B(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$u_A(\vec{p}) = \frac{1}{p^0 - mc} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_B(\vec{p}), \quad u_B(\vec{p}) = \frac{1}{p^0 + mc} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_A(\vec{p}).$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so ergibt sich

$$u_A(\vec{p}) = \frac{1}{(p^0)^2 - m^2 c^2} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 u_A(\vec{p}) = \frac{1}{(p^0)^2 - m^2 c^2} p^i \sigma_i p^j \sigma_j u_A(\vec{p}).$$

Unter Verwendung der Beziehung $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1}_2 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$ findet man $p^i \sigma_i p^j \sigma_j = \vec{p}^2 \mathbb{1}_2$, so dass die letztere Gleichung auch als

$$u_A(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{(p^0)^2 - m^2 c^2} u_A(\vec{p})$$

geschrieben werden kann. Daraus folgt, dass die Komponenten des Vierervektors \mathbf{p} im Lösungsansatz (IV.20) die Relation $\vec{p}^2 = (p^0)^2 - m^2 c^2$ erfüllen sollen, d.h.

$$p^0 c = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = \pm E_{\vec{p}}. \quad (\text{IV.22})$$

Somit hat die Dirac-Gleichung (IV.6a), ähnlich wie die Klein-Gordon-Gleichung (II.4), zwei Arten von Lösungen, und zwar mit „positiver Energie“ ($p^0 > 0$) sowie mit „negativer Energie“ ($p^0 < 0$). Beide Wellenarten sind durch Viererimpulse \mathbf{p} charakterisiert, die der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $(p^0)^2 = \vec{p}^2 + m^2 c^2$ genügen.

Bemerkungen:

* Alternativ kann man ausgehend von der Matrixgleichung (IV.21) sagen, dass diese nur dann nicht-triviale Lösungen hat, wenn die Determinante der Matrix $\not{p} - mc \mathbb{1}_4$ verschwindet, was sofort zur Bedingung (IV.22) führt.

* Natürlich ist es ziemlich bedeutsam, dass die Lösungen mit negativer Energie wieder vorkommen, obwohl eines der Ziele Diracs bei der Suche nach einer relativistischen Wellengleichung von erster Ordnung in der Zeit war, solche Lösungen zu vermeiden.

IV.3.1 a Lösungen positiver oder negativer Energie

Multipliziert man die Gl. (IV.21a) links mit γ^0 , so ergibt sich unter Berücksichtigung der Relationen (IV.2) $(p^0 - p^k \gamma^0 \gamma^k - mc \gamma^0) u(\vec{p}) = 0$, d.h.

$$(mc \gamma^0 - p^k \gamma^0 \gamma^k) u(\vec{p}) = p^0 u(\vec{p}).$$

Diese Gleichung stellt für jeden \vec{p} eine Eigenwert-Gleichung für die Matrix $mc \gamma^0 - p^k \gamma^0 \gamma^k$ dar. Nach Gl. (IV.22) sind die möglichen Eigenwerte entweder $p^0 = +E_{\vec{p}}/c$ oder $p^0 = -E_{\vec{p}}/c$. Da die Matrix $mc \gamma^0 - p^k \gamma^0 \gamma^k$ spurlos ist, soll jeder Eigenwert zweimal vorkommen.

Zunächst werden die Lösungen mit „positiver Energie“ $p^0 > 0$ betrachtet und als $u(\vec{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar}$ geschrieben, wobei $u(\vec{p})$ eine Lösung von Gl. (IV.21a) ist. Dank der Beziehung

$$(\not{p} - mc \mathbb{1}_4)(\not{p} + mc \mathbb{1}_4) = (\mathbf{p}^2 - m^2 c^2) \mathbb{1}_4$$

kann man für den Dirac-Spinor $u(\vec{p})$ die Form

$$u(\vec{p}) = \mathcal{N}_+(\vec{p})(\not{p} + mc) u_0$$

annehmen, wobei $\mathcal{N}_+(\vec{p}) \in \mathbb{R}$ eine (\vec{p} -abhängige, vgl. § IV.3.1 c) Normierungskonstante und u_0 ein \vec{p} -unabhängiger Dirac-Spinor sind.

Die zwei unabhängigen „Spinzustände“, entsprechend der oben diskutierten zweifachen Entartung des Eigenwerts $p^0 = +E_{\vec{p}}/c$, werden als

$$u_0 = \begin{pmatrix} \xi_{\pm} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gewählt, wobei die zweikomponentigen Spaltenvektoren ξ_{\pm} durch

$$\xi_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

definiert sind. Unter Nutzung der Bezeichnung $\sigma \equiv \pm$ lautet die Lösung mit Impuls \vec{p} und „positiver Energie“ $p^0 > 0$

$$u(\vec{p}, \sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{p}) (\not{p} + mc) \begin{pmatrix} \xi_{\sigma} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.24})$$

In der Standard-Darstellung der Dirac-Matrizen lautet diese Lösung

$$u(\vec{p}, \sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{p}) \begin{pmatrix} (E_{\vec{p}}/c + mc) \xi_{\sigma} \\ (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi_{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.25})$$

Sei $v(\vec{p}) e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$ eine Lösung „negativer Energie“, wobei jetzt $p^0 = +E_{\vec{p}}/c$ (dank einer Umbenennung $p^{\mu} \rightarrow -p^{\mu}$ im Exponenten, vgl. § II.2.1). Man prüft schnell nach, dass $v(\vec{p})$ der Gleichung

$$(\gamma^{\mu} p_{\mu} + mc) v(\vec{p}) = (\not{p} + mc) v(\vec{p}) = 0 \quad (\text{IV.26})$$

genügen soll. Als Lösungsansatz kann man die Form

$$v(\vec{p}) = \mathcal{N}_-(\vec{p}) (\not{p} - mc) v_0$$

mit einer Normierungskonstanten $\mathcal{N}_-(\vec{p})$ und einem Dirac-Spinor v_0 annehmen. Für den Letzteren sind zwei mögliche unabhängige Wahlen

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{\mp} \end{pmatrix},$$

wobei ξ_+ und ξ_- durch Gl. (IV.23) gegeben sind. Somit gilt schließlich für die Lösungen mit Impuls \vec{p} und „negativer Energie“

$$v(\vec{p}, \sigma) = \mathcal{N}_-(\vec{p}) (\not{p} - mc) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-\sigma} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.27})$$

In der Standard-Darstellung der Dirac-Matrizen lautet dies

$$v(\vec{p}, \sigma) = -\mathcal{N}_-(\vec{p}) \begin{pmatrix} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi_{-\sigma} \\ (E_{\vec{p}}/c + mc) \xi_{-\sigma} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.28})$$

Bemerkung: Die konventionelle Wahl des zweikomponentigen Basisvektors $\xi_{-\sigma}$ als Baustein in der Konstruktion des Dirac-Spinors $v(\vec{p}, \sigma)$ wird in § IV.3.3 a motiviert.

IV.3.1 b Lösungen mit $\vec{p} = \vec{0}$

Für die Lösungen mit $\vec{p} = \vec{0}$ geben Gl. (IV.24) und (IV.27) unter Verwendung von $\not{p} = \gamma^0 p_0$ und $p_0 = p^0 = mc$ jeweils

$$u(\vec{0}, \sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{0}) \begin{pmatrix} (p^0 + mc) \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & (-p^0 + mc) \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\sigma} \\ 0 \end{pmatrix} = 2mc \mathcal{N}_+(\vec{0}) \begin{pmatrix} \xi_{\sigma} \\ 0 \end{pmatrix},$$

und

$$v(\vec{0}, \sigma) = \mathcal{N}_-(\vec{0}) \begin{pmatrix} (p^0 - mc)\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & (-p^0 - mc)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-\sigma} \end{pmatrix} = -2mc\mathcal{N}_-(\vec{0}) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-\sigma} \end{pmatrix}.$$

Diese Ergebnisse erklären im Nachhinein die Stelle von $\xi_{\pm\sigma}$ in den Dirac-Spinoren $u(\vec{p}, \sigma)$ (oben) und $v(\vec{p}, \sigma)$ (unten).

IV.3.1 c Normierung der Lösungen

Bisher wurden die Normierungskonstanten $\mathcal{N}_+(\vec{p})$ und $\mathcal{N}_-(\vec{p})$ in den Lösungen (IV.24), (IV.27) nicht spezifiziert. Eine im Folgenden nützliche Wahl für diese Konstanten ist

$$\mathcal{N}_+(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}/c + mc}}, \quad \mathcal{N}_-(\vec{p}) = \frac{-1}{\sqrt{E_{\vec{p}}/c + mc}}. \quad (\text{IV.29})$$

Dies führt zu den Lorentz-invarianten Normierungen

$$\bar{u}(\vec{p}, \sigma)u(\vec{p}, \sigma') = 2mc \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (\text{IV.30a})$$

$$\bar{v}(\vec{p}, \sigma)v(\vec{p}, \sigma') = -2mc \delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{IV.30b})$$

und

$$\bar{u}(\vec{p}, \sigma)v(\vec{p}, \sigma') = \bar{v}(\vec{p}, \sigma)u(\vec{p}, \sigma') = 0, \quad (\text{IV.30c})$$

wobei \bar{u} , \bar{v} die Dirac-adjungierten Spinoren sind. Betrachtet man statt der Letzteren die hermiteschkonjugierten Spinoren, so lauten die Normierungen

$$u(\vec{p}, \sigma)^\dagger u(\vec{p}, \sigma') = v(\vec{p}, \sigma)^\dagger v(\vec{p}, \sigma') = \frac{2E_{\vec{p}}}{c} \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (\text{IV.30d})$$

Beweis der Beziehungen (IV.30):

Die Relation (IV.11) gibt

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}, \sigma) &= \mathcal{N}_+(\vec{p})^* (\xi_\sigma^T \ 0) [(\gamma^\mu)^\dagger p_\mu + mc\mathbb{1}_4] \gamma^0 = \mathcal{N}_+(\vec{p})^* (\xi_\sigma^T \ 0) \gamma^0 (\gamma^\mu p_\mu + mc\mathbb{1}_4) \\ &= \mathcal{N}_+(\vec{p})^* (\xi_\sigma^T \ 0) (\not{p} + mc\mathbb{1}_4), \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

während in der analogen Berechnung mit $\bar{v}(\vec{p}, \sigma)$ ein Minus-Vorzeichen in der letzten Gleichung kommt. Somit gilt in der Standard-Darstellung der Dirac-Matrizen

$$\bar{u}(\vec{p}, \sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{p})^* \left((E_{\vec{p}}/c + mc) \xi_\sigma^T \quad -(\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi_\sigma^T \right), \quad (\text{IV.32a})$$

$$\bar{v}(\vec{p}, \sigma) = -\mathcal{N}_-(\vec{p})^* \left(-(\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi_{-\sigma}^T \quad (E_{\vec{p}}/c + mc) \xi_{-\sigma}^T \right), \quad (\text{IV.32b})$$

wie sich auch direkt aus Gl. (IV.25) und (IV.28) herleiten lässt. Man findet dann z.B.

$$\bar{u}(\vec{p}, \sigma)u(\vec{p}, \sigma') = |\mathcal{N}_+(\vec{p})|^2 \left[\left(\frac{E_{\vec{p}}}{c} + mc \right)^2 - \vec{p}^2 \right] \xi_\sigma^T \xi_{\sigma'} = 2mc |\mathcal{N}_+(\vec{p})|^2 \left(\frac{E_{\vec{p}}}{c} + mc \right) \delta_{\sigma\sigma'},$$

wobei die zweite Gleichung aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung folgt. Der Ausdruck (IV.29) der Normierungskonstanten $\mathcal{N}_+(\vec{p})$ ergibt das gesuchte Ergebnis. \square

IV.3.1 d Vollständigkeitsrelation

Für die Beschreibung von Teilchenstoß-Experimenten, in denen der Spin der beteiligten Teilchen nicht gemessen wird — entsprechend der Mehrheit der Experimente —, ist es nützlich, die Summe über Spinzustände⁽¹⁰⁾ $\sigma = \pm$ zu kennen. Es gelten die *Vollständigkeitsrelationen*

$$\sum_{\sigma=\pm} u(\vec{p}, \sigma)\bar{u}(\vec{p}, \sigma) = \not{p} + mc\mathbb{1}_4 \quad (\text{IV.33a})$$

und

$$\sum_{\sigma=\pm} v(\vec{p}, \sigma)\bar{v}(\vec{p}, \sigma) = \not{p} - mc\mathbb{1}_4. \quad (\text{IV.33b})$$

⁽¹⁰⁾Diese Bezeichnung wird im § IV.3.3 a unten gerechtfertigt.

Diese Beziehungen lassen sich einfach nachprüfen. Beispielsweise lautet einer der Beiträge zur 4×4 -Matrix auf der linken Seite der Gl. (IV.33a) unter Nutzung der Gl. (IV.24) und (IV.31)

$$u(\vec{p}, \sigma) \bar{u}(\vec{p}, \sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{p})^2 (\not{\vec{p}} + mc \mathbf{1}_4) \begin{pmatrix} \xi_\sigma \\ 0 \end{pmatrix} (\xi_\sigma^T \ 0) (\not{\vec{p}} + mc \mathbf{1}_4).$$

Dabei ist $\begin{pmatrix} \xi_\sigma \\ 0 \end{pmatrix} (\xi_\sigma^T \ 0)$ gleich einer diagonalen 4×4 -Matrix, und zwar

$$\begin{pmatrix} \xi_\sigma \\ 0 \end{pmatrix} (\xi_\sigma^T \ 0) = \begin{cases} \text{diag}(1, 0, 0, 0) & \text{für } \sigma = + \\ \text{diag}(0, 1, 0, 0) & \text{für } \sigma = -, \end{cases}$$

so dass $\sum_{\sigma=\pm} \begin{pmatrix} \xi_\sigma \\ 0 \end{pmatrix} (\xi_\sigma^T \ 0) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ergibt sich in der Standard-Darstellung

$$\sum_{\sigma=\pm} u(\vec{p}, \sigma) \bar{u}(\vec{p}, \sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{p})^2 \begin{pmatrix} (p^0 + mc) \mathbf{1}_2 & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & (-p^0 + mc) \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p^0 + mc) \mathbf{1}_2 & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & (-p^0 + mc) \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}.$$

Dies gibt gerade das Resultat (IV.33a). \square

IV.3.2 Zweite Quantisierung der Wellenlösungen

Wie bei den Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung erfolgt die korrekte Deutung der Lösungen der Dirac-Gleichung über die zweite Quantisierung, die jetzt kurz skizziert wird.

IV.3.2 a Dirac-Feldoperator

Zunächst wird die allgemeine Lösung der Gleichung geschrieben als Linearkombination aller möglichen ebenen Wellen der Type $u(\vec{p}, \sigma) e^{-i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$ und $v(\vec{p}, \sigma) e^{+i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$ mit jeweiligen komplexwertigen Amplituden:

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \sum_{\sigma=\pm} \left[c_{\vec{p},\sigma} u(\vec{p}, \sigma) e^{-i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + d_{\vec{p},\sigma}^* v(\vec{p}, \sigma) e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right] \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}/c}}.$$

In einem zweiten Schritt werden diese komplexen Zahlen $c_{\vec{p},\sigma}$, $d_{\vec{p},\sigma}^*$ durch Operatoren $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$, $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}^\dagger$ mit geeigneten Vertauschungsrelationen ersetzt. Man zeigt, da diese Relationen auf *Antikommutatoren* $\{\cdot, \cdot, \cdot\}$ beruhen sollen:

$$\{\hat{c}_{\vec{p},\sigma}, \hat{c}_{\vec{q},\sigma'}^\dagger\} = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \{\hat{d}_{\vec{p},\sigma}, \hat{d}_{\vec{q},\sigma'}^\dagger\} = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (\text{IV.34a})$$

während alle anderen Antikommutatoren verschwinden: für alle Impulse \vec{p} , \vec{q} und $\sigma, \sigma' \in \{+, -\}$ gelten

$$\{\hat{c}_{\vec{p},\sigma}, \hat{c}_{\vec{q},\sigma'}\} = \{\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^\dagger, \hat{c}_{\vec{q},\sigma'}^\dagger\} = \{\hat{d}_{\vec{p},\sigma}, \hat{d}_{\vec{q},\sigma'}\} = \{\hat{d}_{\vec{p},\sigma}^\dagger, \hat{d}_{\vec{q},\sigma'}^\dagger\} = 0 \quad (\text{IV.34b})$$

und ebenfalls für Antikommutatoren mit einem $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$ oder $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^\dagger$ und einem $\hat{d}_{\vec{q},\sigma'}$ oder $\hat{d}_{\vec{q},\sigma'}^\dagger$.

Die Wahl zwischen Kommutatoren — für Teilchen mit ganzzahligem Spin — und Antikommutatoren — für Teilchen mit halbzahligem Spin — ist natürlich nicht beliebig, sondern folgt aus zwei Forderungen. Erstens soll die Energie positiv sein, so dass den Moden mit „negativer Energie“ Erzeugungsoperatoren assoziiert werden sollen. Dazu soll die Theorie lokal sein, d.h. Operatoren bezüglich Raumzeit-Punkte \mathbf{x} , \mathbf{x}' , die durch ein raumartiges Intervall $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 < 0$ getrennt sind, sollen miteinander (anti)kommutieren.

Somit lautet der Dirac-Feldoperator

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \int \sum_{\sigma=\pm} \left[\hat{c}_{\vec{p},\sigma} u(\vec{p}, \sigma) e^{-i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + \hat{d}_{\vec{p},\sigma}^\dagger v(\vec{p}, \sigma) e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right] \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}/c}} \quad (\text{IV.35a})$$

und dessen Dirac-adjungiertes Feld

$$\hat{\bar{\psi}}(\mathbf{x}) = \int \sum_{\sigma=\pm} \left[\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^\dagger \bar{u}(\vec{p}, \sigma) e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + \hat{d}_{\vec{p},\sigma} \bar{v}(\vec{p}, \sigma) e^{-i\vec{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right] \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}/c}}. \quad (\text{IV.35b})$$

Dabei gilt $E_{\vec{p}} = p^0 c = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$.

Bemerkungen:

* Für jeden Operator \hat{O} gilt offensichtlich $\hat{O}^2 = \frac{1}{2}\{\hat{O}, \hat{O}\}$. Dementsprechend bedeuten die Vertauschungsrelationen (IV.34b) mit $\vec{p} = \vec{q}$ und $\sigma = \sigma'$, dass jeder Operator $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$, $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ und ihre hermitesch Konjugierten die Eigenschaft $(\hat{c}_{\vec{p},\sigma})^2 = (\hat{d}_{\vec{p},\sigma})^2 = \dots = 0$, wobei 0 hier den „Null-Operator“ bezeichnet.

* Die Dimension des Dirac-Feldes lässt sich aus Gl. (IV.30a), (IV.34a) und (IV.35a) erkennen, und zwar $[\hat{\psi}] = [\mathbf{L}^{-3/2}]$, wie bei einer Schrödinger-Wellenfunktion. In einem System natürlicher Einheiten hat $\hat{\psi}$ die Dimension von $\mathbf{E}^{3/2}$.

IV.3.2b Hamilton- und Teilchenzahloperator des Dirac-Feldes

Ähnlich wie beim Klein–Gordon-Feld in § II.3.2 kann man zwei physikalische Operatoren benutzen, um die Deutung der Leiteroperatoren $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$, $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ zu erkennen.

Beispielsweise lautet der mit der Dirac-Gleichung assoziierte Hamilton-Operator ⁽¹¹⁾

$$\hat{H} = \int \sum_{\sigma=\pm} \left(\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{p},\sigma} - \hat{d}_{\vec{p},\sigma} \hat{d}_{\vec{p},\sigma}^\dagger \right) E_{\vec{p}} d^3\vec{p} = \int \sum_{\sigma=\pm} \left[\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{p},\sigma} + \hat{d}_{\vec{p},\sigma}^\dagger \hat{d}_{\vec{p},\sigma} - \delta^{(3)}(\vec{0}) \right] E_{\vec{p}} d^3\vec{p}. \quad (\text{IV.36})$$

Interpretiert man $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$, $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ als Vernichtungsoperatoren, und $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^\dagger$, $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}^\dagger$ als Erzeugungsoperatoren, so sind $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{p},\sigma}$ und $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}^\dagger \hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ Besetzungszahloperatoren: jede Teilchenart trägt positiv zur Gesamtenergie bei. Interessanterweise kommt der Beitrag des Vakuums hier mit einem Minus-Vorzeichen, im Vergleich zum Plus-Vorzeichen in Gl. (II.15).

Bemerkungen:

* Die einzigen Eigenwerte der Besetzungszahloperatoren $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{p},\sigma}$ und $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}^\dagger \hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ sind entweder 0 — entsprechend der Abwesenheit von Teilchen mit Impuls \vec{p} und Spinzustand σ — oder 1. Im Gegensatz zu den Teilchenzahloperatoren für Spin-0- oder Spin-1-Teilchen sind höhere Besetzungszahlen in einer Mode hier nicht möglich, entsprechend dem *Pauli-Prinzip*.

Beweis: Sei \hat{c} ein Operator mit den Vertauschungsrelationen $\{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} = \hat{1}$ und $\{\hat{c}, \hat{c}\} = \{\hat{c}^\dagger, \hat{c}^\dagger\} = 0$. Der hermitesche Operator $\hat{n} \equiv \hat{c}^\dagger \hat{c}$ kann nur die zwei Eigenwerte 0 und 1 haben.

Für jeden beliebigen Vektor $|\Psi\rangle$ (außer des Null-Vektors) ist $\hat{c}|\Psi\rangle$ Eigenvektor von \hat{n} mit dem Eigenwert 0: aus $\{\hat{c}, \hat{c}\} = 0$ folgt nämlich $\hat{c}^2 = 0$, was zu $\hat{n}\hat{c}|\Psi\rangle = \hat{c}^\dagger \hat{c}^2|\Psi\rangle = 0$ führt.

Sei $n \neq 0$ ein Eigenwert von \hat{n} und $|n\rangle$ ein zugehöriger Eigenvektor: $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$. Die Anwendung der Gleichung $\hat{n} = \{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} - \hat{c}\hat{c}^\dagger = \hat{1} - \hat{c}\hat{c}^\dagger$ auf $|n\rangle$ gibt $n|n\rangle = |n\rangle - \hat{c}\hat{c}^\dagger|n\rangle$. Dank $n \neq 0$ gilt $|n\rangle = n^{-1}\hat{n}|n\rangle$, und somit $\hat{c}\hat{c}^\dagger|n\rangle = n^{-1}\hat{c}\hat{c}^\dagger\hat{c}^\dagger|n\rangle = 0$, wobei die zweite Gleichung aus $(\hat{c}^\dagger)^2 = 0$ folgt. Somit bleibt $n|n\rangle = |n\rangle$, d.h. $n = 1$. \square

Allgemeiner lassen sich Teilchen mit ganzzahligem Spin durch kommutierende Operatoren beschreiben, was zu einer Bose^(x)–Einstein-Statistik führt: sie sind also *Bosonen*. Dagegen sollen Teilchen mit halbzahligem Spin durch antikommutierende Operatoren beschrieben werden, und genügen deshalb der Fermi^(y)–Dirac-Statistik: solche Teilchen sind *Fermionen*.

* In sogenannten supersymmetrischen Theorien entspricht jedem bosonischen Freiheitsgrad ein fermionischer Freiheitsgrad. Dank den entgegengesetzten Vorzeichen der bosonischen und fermionischen Beiträge zur Vakuumsenergie verschwindet dann die Letztere.

⁽¹¹⁾Durch die Feldoperatoren ausgedrückt lautet der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = c \int \hat{\psi}(t, \vec{x}) (-i\hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + mc) \hat{\psi}(t, \vec{x}) d^3\vec{x} = c \int \hat{\psi}(t, \vec{x})^\dagger (-i\hbar \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + mc \gamma^0) \hat{\psi}(t, \vec{x}) d^3\vec{x}.$$

^(x)S. BOSE, 1894–1974 ^(y)E. FERMI, 1901–1954

Multipliziert man die Dirac-Gleichung (IV.6a) von links mit $\bar{\psi}(\mathbf{x})$, und die Dirac-adjungierte Gleichung (IV.19) von rechts mit $\psi(\mathbf{x})$, und addiert man beide Gleichungen, so findet man

$$i\partial_\mu [\bar{\psi}(\mathbf{x})\gamma^\mu\psi(\mathbf{x})] = 0.$$

Dies stellt einer Kontinuitätsgleichung für die Viererstromdichte

$$j_{\text{Dirac}}^\mu(\mathbf{x}) \equiv \frac{i\hbar}{2m}\bar{\psi}(\mathbf{x})\gamma^\mu\psi(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.37})$$

dar, woraus folgt, dass

$$\frac{i\hbar}{2m}\int \bar{\psi}(t, \vec{x})\gamma^0\psi(t, \vec{x}) d^3\vec{x}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Nach zweiter Quantisierung der Wellenlösung und unter Nutzung der Gl. (IV.35) findet man

$$\hat{N} = \frac{i\hbar}{2m}\int \hat{\bar{\psi}}(t, \vec{x})\gamma^0\hat{\psi}(t, \vec{x}) d^3\vec{x} = \int \sum_{\sigma=\pm} [\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^\dagger\hat{c}_{\vec{p},\sigma} - \hat{d}_{\vec{p},\sigma}^\dagger\hat{d}_{\vec{p},\sigma}] d^3\vec{p}, \quad (\text{IV.38})$$

d.h. die beiden Teilchenarten tragen mit entgegengesetzten Vorzeichen zur Erhaltungsgröße bei: die mit \hat{d} , \hat{d}^\dagger -Operatoren beschriebenen Quanten sind die Antiteilchen zu denen, die durch \hat{c} , \hat{c}^\dagger beschrieben sind. \hat{N} ist wieder ein Operator, dessen Erwartungswert die Netto-Teilchenzahl ist.

Bemerkung: Im Gegensatz zur 0-Komponente der Klein-Gordon-Viererstromdichte (II.8) ist $j_{\text{Dirac}}^0(\mathbf{x})$ immer eine positiv definite reelle Zahl. Somit kann $\rho_{\text{Dirac}}^0(\mathbf{x}) \equiv j_{\text{Dirac}}^0(\mathbf{x})/c$ als eine Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, ähnlich der mit einer Schrödinger-Wellenfunktion assoziierten Wahrscheinlichkeitsdichte.

Zusammenfassend wirken die verschiedenen Leiteroperatoren wie folgt:

- $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls \vec{p} und Spinzustand σ , das also im Anfangszustand eines Zerfalls- oder Stoßprozesses vorhanden sein muss. Somit steht dieser Vernichter für ein *einlaufendes Teilchen*.
- $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^\dagger$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls \vec{p} und Spinzustand σ , das sich also im Endzustand eines Prozesses befinden wird: dieser Erzeugungsoperator repräsentiert ein *auslaufendes Teilchen*.
- $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ vernichtet ein (in einem Streuprozess) *einlaufendes Antiteilchen* mit Impuls \vec{p} und Spinzustand σ .
- $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}^\dagger$ erzeugt ein (in einem Streuprozess) *auslaufendes Antiteilchen* mit Impuls \vec{p} und Spinzustand σ .

Um die Bezeichnung „Spinzustand“ für den Freiheitsgrad σ besser zu motivieren, sollen nun zwei weitere Operatoren eingeführt und diskutiert werden.

IV.3.3 Helizität und Chiralität

In diesem Abschnitt werden zwei auf Dirac-Spinoren wirkenden Operatoren diskutiert, und zwar die Helizitäts- und Chiralitätsoperatoren. Um diese Operatoren von denen des § (IV.3.2) — die auf die Zustände eines fermionischen Fock-Raums wirken — zu unterscheiden, werden sie ohne Zirkumflex geschrieben, also als einfache 4×4 -Matrizen.

IV.3.3 a Helizität

Man kann zeigen, dass der Spin einer Lösung der freien Dirac-Gleichung keine Erhaltungsgröße ist, entsprechend der Tatsache, dass der auf Dirac-Spinoren wirkende Spinoperator \vec{S} nicht mit dem Hamilton-Operator kommutiert.⁽¹²⁾ Dagegen ist die Komponente des Spins entlang der Bewegungsrichtung, d.h. die Richtung des Impulses \vec{p} , erhalten.

⁽¹²⁾Dieser Spinoperator ist gleich \hbar mal dem Generator der Drehungen auf dem durch die Dirac-Spinoren gespannten Vektorraum, vgl. § A.1.3.

Sei $\vec{e}_{\vec{p}} \equiv \vec{p}/|\vec{p}|$ der Einheitsvektor in Bewegungsrichtung eines Dirac-Spinors. Im Folgenden wird der *Helizitätsoperator* definiert als

$$h(\vec{p}) \equiv \vec{e}_{\vec{p}} \cdot \vec{\Sigma} \quad \text{mit} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.39})$$

mit den Pauli-Matrizen σ^k . $\vec{\Sigma}$ ist tatsächlich einfach verknüpft mit dem Spinoperator auf Dirac-Spinoren, $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$. Somit ist die Komponente des Spinoperators entlang der Bewegungsrichtung $S_{\vec{p}} = \frac{\hbar}{2}h(\vec{p})$.

Dank der Beziehung $(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2 \mathbf{1}_2$ findet man sofort, dass $[h(\vec{p})]^2 = \mathbf{1}_4$ gilt. Infolgedessen sind die möglichen Eigenwerte von $h(\vec{p})$ gleich ± 1 . Ist ein Dirac-Spinor ψ Eigenvektor von $h(\vec{p})$, so wird der entsprechende Eigenwert *Helizität* des Spinors genannt: ein Spinor mit Helizität $+1$ bzw. -1 hat also eine Spinkomponente $\frac{\hbar}{2}$ (kurz: \uparrow) bzw. $-\frac{\hbar}{2}$ (kurz: \downarrow) entlang seines Impulses. Kürzer spricht man noch von Spinoren mit positiver oder negativer Helizität.

Bemerkung: Manchmal (z.B. in Landau & Lifschitz [5] oder Nachtmann [6]) wird die Helizität als Eigenwert des Spinoperators in Bewegungsrichtung definiert, entsprechend dem Erwartungswert des oben eingeführten Operators $S_{\vec{p}}$. Die möglichen Helizitäten sind dann $\pm \frac{\hbar}{2}$ statt ± 1 . Jedenfalls bleibt das Vorzeichen der Helizität eines gegebenen Spinors ungeändert.

Seien nun die zwei Operatoren

$$\mathcal{P}_{\pm}^{(h)} \equiv \frac{\mathbf{1}_4 \pm h(\vec{p})}{2}. \quad (\text{IV.40})$$

Es gelten die Beziehungen

$$\bullet [\mathcal{P}_{\pm}^{(h)}]^2 = \mathcal{P}_{\pm}^{(h)}; \quad (\text{IV.41a})$$

$$\bullet \mathcal{P}_{+}^{(h)} \mathcal{P}_{-}^{(h)} = \mathcal{P}_{-}^{(h)} \mathcal{P}_{+}^{(h)} = 0; \quad (\text{IV.41b})$$

$$\bullet \mathcal{P}_{+}^{(h)} + \mathcal{P}_{-}^{(h)} = \mathbf{1}_4. \quad (\text{IV.41c})$$

Die Erstere bedeutet, dass $\mathcal{P}_{+}^{(h)}$ und $\mathcal{P}_{-}^{(h)}$ Projektoren sind. Dann lässt sich gemäß Gl. (IV.41c) jeder Dirac-Spinor als Summe von einem Spinor des Bildes von $\mathcal{P}_{+}^{(h)}$ und einem Spinor des Bildes von $\mathcal{P}_{-}^{(h)}$ schreiben:

$$\psi = \mathcal{P}_{+}^{(h)} \psi + \mathcal{P}_{-}^{(h)} \psi \equiv \psi_{+}^{(h)} + \psi_{-}^{(h)}.$$

Dank Gl. (IV.41b) ist diese Zerlegung eindeutig.

Beispiel: Sei z.B. angenommen, dass \vec{p} entlang der z -Achse ausgerichtet ist: $p^1 = p^2 = 0$, $p^3 = |\vec{p}|$. Dann gilt $h(\vec{p}) = \vec{e}_3 \cdot \vec{\Sigma} = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$. Für einen Dirac-Spinor mit „positiver Energie“ führt Gl. (IV.25) unter Berücksichtigung der Normierungskonstanten (IV.29) zu

$$u(\vec{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}}/c + mc} \xi_{\sigma} \\ \frac{\sigma |\vec{p}|}{\sqrt{E_{\vec{p}}/c + mc}} \xi_{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Damit findet man $h(\vec{p})u(\vec{p}, \sigma) = \sigma u(\vec{p}, \sigma)$: das Vorzeichen der Helizität ist gerade durch σ gegeben, das also direkt mit dem Spin (entlang der Bewegungsrichtung) verknüpft ist. Ähnlicherweise zeigt man für einen Spinor „negativer Energie“, dass $h(\vec{p})v(\vec{p}, \sigma) = -\sigma v(\vec{p}, \sigma)$ ist.

Bemerkung: Betrachtet man jetzt die vier unabhängigen Dirac-Spinoren [Gl. (IV.24) und (IV.27)]

$$\mathcal{N}_{+}(\vec{p})(\not{p} + mc) \begin{pmatrix} \xi_{+} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_{+}(\vec{p})(\not{p} + mc) \begin{pmatrix} \xi_{-} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_{-}(\vec{p})(\not{p} - mc) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_{-}(\vec{p})(\not{p} - mc) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{+} \end{pmatrix},$$

so stellen sie ein Teilchen mit Spin (entlang des Impulses) \uparrow , ein Teilchen mit Spin \downarrow , ein Antiteilchen mit Spin \downarrow , und schließlich ein Antiteilchen mit Spin \uparrow dar. Historisch wurde ein Antiteilchen mit

Spin \downarrow (bzw. \uparrow) als ein fehlendes Teilchen — ein „Loch“ — mit Spin \uparrow (bzw. \downarrow) interpretiert, was die gewählte Ordnung der Zustände erklärt.

IV.3.3b Chiralität

Im § IV.2.2 wurde der Chiralitätsoperator γ_5 definiert und einige dessen Eigenschaften dargestellt, insbesondere dass dessen Eigenwerte die Werte $+1$ oder -1 annehmen kann. Diese stellen die *Chiralität* der zugehörigen Eigenvektoren dar.

Definiert man jetzt zwei Operatoren

$$\mathcal{P}_L \equiv \frac{\mathbb{1}_4 - \gamma_5}{2} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_R \equiv \frac{\mathbb{1}_4 + \gamma_5}{2}, \quad (\text{IV.42})$$

so genügen sie den Beziehungen

$$\bullet \quad [\mathcal{P}_L]^2 = \mathcal{P}_L, \quad [\mathcal{P}_R]^2 = \mathcal{P}_R; \quad (\text{IV.43a})$$

$$\bullet \quad \mathcal{P}_L \mathcal{P}_R = \mathcal{P}_R \mathcal{P}_L = 0; \quad (\text{IV.43b})$$

$$\bullet \quad \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_R = \mathbb{1}_4. \quad (\text{IV.43c})$$

D.h., \mathcal{P}_L und \mathcal{P}_R sind Projektoren, und jeder Dirac-Spinor lässt sich eindeutig als Summe eines „linkshändigen“ und eines „rechtshändigen“ Spinors schreiben. Konventionell gilt für Dirac-Spinoren mit positiver Energie, entsprechend Teilchen,

$$u_L(\vec{p}, \sigma) \equiv \mathcal{P}_L u(\vec{p}, \sigma), \quad u_R(\vec{p}, \sigma) \equiv \mathcal{P}_R u(\vec{p}, \sigma), \quad (\text{IV.44})$$

was ziemlich natürlich aussieht: linkshändige Teilchen haben die Chiralität -1 und rechtshändige Teilchen die Chiralität $+1$. Für Dirac-Spinoren mit negativer Energie, entsprechend Antiteilchen, definiert man dagegen

$$v_L(\vec{p}, \sigma) \equiv \mathcal{P}_R v(\vec{p}, \sigma), \quad v_R(\vec{p}, \sigma) \equiv \mathcal{P}_L v(\vec{p}, \sigma). \quad (\text{IV.45})$$

Das heißt, linkshändige Antiteilchen haben die Chiralität $+1$ und rechtshändige Antiteilchen die Chiralität -1 .⁽¹³⁾

Dank der Hermizität von γ_5 , Gl. (IV.16d), sind \mathcal{P}_L und \mathcal{P}_R hermitesch. Somit gilt für die Dirac-adjungierten Spinoren unter Verwendung der Relation (IV.16b)

$$\bar{u}_L(\vec{p}, \sigma) = u_L(\vec{p}, \sigma)^\dagger \gamma^0 = u(\vec{p}, \sigma)^\dagger \mathcal{P}_L \gamma^0 = u(\vec{p}, \sigma)^\dagger \gamma^0 \mathcal{P}_R = \bar{u}(\vec{p}, \sigma) \mathcal{P}_R, \quad (\text{IV.46})$$

und ähnlich

$$\bar{v}_R(\vec{p}, \sigma) = \bar{v}(\vec{p}, \sigma) \mathcal{P}_R. \quad (\text{IV.47})$$

Kollektiv werden $u_{L/R}$, $v_{L/R}$ und die Dirac-adjungierten $\bar{u}_{L/R}$, $\bar{v}_{L/R}$ *chirale Spinoren* genannt.

Bemerkungen:

* Der Chiralitätsoperator γ_5 kommutiert im Allgemeinen nicht mit dem Hamilton-Operator eines freien Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens, so dass die Chiralität keine Erhaltungsgröße in der Bewegung des Teilchens ist.

* Im Gegensatz wird die Chiralität wichtig in der Beschreibung der schwachen Wechselwirkung sein, weil die Letztere nur auf linkshändige Teilchen bzw. rechtshändige Antiteilchen wirken, d.h. auf Spinoren, die mit \mathcal{P}_L projiziert werden.

IV.3.3c Helizität und Chiralität masseloser Teilchen

Für masselose Teilchen sind die Helizität und die Chiralität einfach miteinander verbunden. Betrachtet man z.B. wie oben ein Teilchen mit Impuls entlang der z -Achse, dann lautet der entsprechende Spinor

$$u(\vec{p}, \sigma) = \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \xi_\sigma \\ \sigma \xi_\sigma \end{pmatrix},$$

⁽¹³⁾Die vielleicht nervige Konvention geht wieder auf die Interpretation von Antiteilchen als Löcher — fehlende Teilchen — zurück.

wobei $E_{\vec{p}} = |\vec{p}|c$ benutzt wurde. Dann gilt unter Verwendung der Standard-Darstellung (IV.14) des Chiralitätsoperators

$$\gamma_5 u(\vec{p}, \sigma) = \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\sigma \\ \sigma \xi_\sigma \end{pmatrix} = \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \sigma \xi_\sigma \\ \xi_\sigma \end{pmatrix} = \sigma u(\vec{p}, \sigma).$$

Somit ist der Chiralitätseigenwert gleich dem Helizitätseigenwert: ein linkshändiges masseloses Teilchen hat die Helizität -1 .

Literatur zum Kapitel IV

- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 7.1–7.3 & 9.7.1.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [6], Kap. 4.1–4.2 & 4.4.
- Schwabl, *Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)* [7], Kap. 5.3, 6 & 11.5–11.6.

Anhang zum Kapitel IV

IV.A Weyl-Gleichung

In Abschn. IV.3 wurden die Lösungen der Dirac-Gleichung (IV.6) in der Standard-Darstellung der Dirac-Matrizen untersucht. Wie schon erwähnt können auch alternative Darstellungen dieser Matrizen gefunden werden, wie die *chirale Darstellung* — oder auch *Weyl^(z)-Darstellung*

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \quad (\text{IV.48})$$

wobei die σ_k die Pauli-Matrizen sind. In diesem Anhang wird gezeigt, dass die Nutzung der chiralen Darstellung zur Beschreibung von masselosen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen besonders geeignet ist, weil sich die Dirac-Gleichung zu einem System zweier entkoppelten Differentialgleichungen vereinfacht.

In der chiralen Darstellung ist der Chiralitätsoperator $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ diagonal:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.49})$$

so dass die in § IV.3.3 b eingeführten Projektoren \mathcal{P}_L , \mathcal{P}_R , auch diagonale Formen annehmen:

$$\mathcal{P}_L \equiv \frac{\mathbb{1}_4 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_R \equiv \frac{\mathbb{1}_4 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}.$$

Demzufolge projiziert \mathcal{P}_L bzw. \mathcal{P}_R die zwei unteren bzw. oberen Komponenten eines Dirac-Spinors aus und lässt die zwei oberen bzw. unteren unverändert. Unter Nutzung von zweikomponentigen Spaltenvektoren χ_L, χ_R kann man somit einen beliebigen Dirac-Spinor in der chiralen Darstellung als

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} \quad (\text{IV.50})$$

umschreiben.

Ausgehend von Gl. (IV.48) nimmt der auf Dirac-Spinoren wirkende Operator $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\mathbb{1}_4$ in chiraler Darstellung die Matrixform

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} -mc\mathbb{1}_2 & i\hbar(\mathbb{1}_2\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \\ i\hbar(\mathbb{1}_2\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) & -mc\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.51})$$

an. Unter Anwendung dieses Dirac-Operators auf ein in der Form (IV.50) geschriebenes Dirac-Spinorfeld $\psi(t, \vec{x})$ lässt sich die freie Dirac-Gleichung (IV.6) als das System gekoppelter Gleichungen

$$\begin{cases} i\hbar\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right)\chi_R(t, \vec{x}) - mc\chi_L(t, \vec{x}) = 0 \\ i\hbar\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right)\chi_L(t, \vec{x}) - mc\chi_R(t, \vec{x}) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.52})$$

umschreiben. Falls das durch $\psi(t, \vec{x})$ beschriebene Teilchen masselos ist, $m = 0$, werden diese Gleichungen zu zwei entkoppelten Differentialgleichungen — den *Weyl-Gleichungen* — für die zweikom-

^(z)H. WEYL, 1885–1955

ponentigen Felder $\chi_L(t, \vec{x})$, $\chi_R(t, \vec{x})$:

$$i\hbar\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right)\chi_L(t, \vec{x}) = 0 \quad , \quad i\hbar\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right)\chi_R(t, \vec{x}) = 0. \quad (\text{IV.53})$$

Somit sind die links- und rechtshändigen Anteile eines wechselwirkungsfreien masselosen Teilchens unabhängig voneinander.

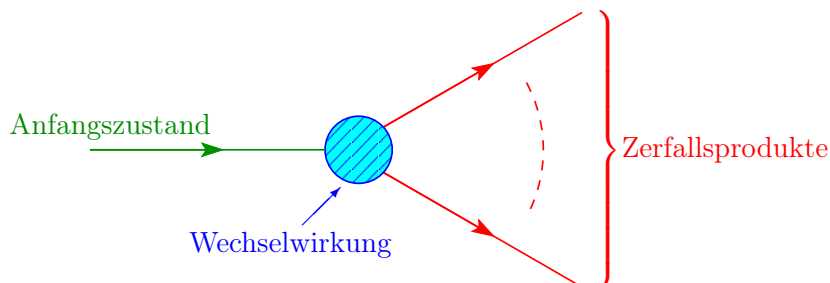
Bemerkung: Die zweikomponentigen χ_L , χ_R werden *Weyl-Spinoren* genannt.

Teil B

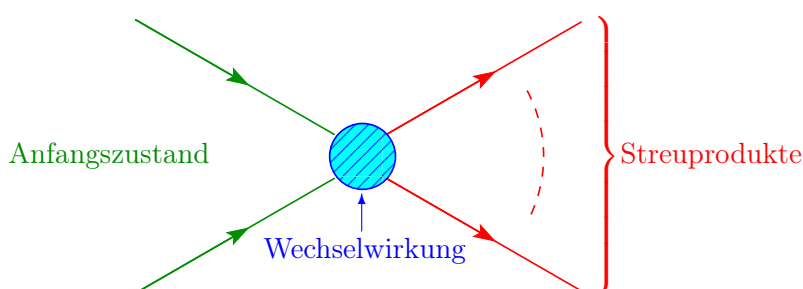
Wechselwirkende Teilchen

Im Teil A wurden die Gleichungen zur Beschreibung der Bewegung wechselwirkungsfreier relativistischer Teilchen mit Impuls \vec{p} und gegebenenfalls Helizität σ bzw. Polarisation λ dargestellt. Wenn Wechselwirkungen vorhanden sind, können Teilchen an zwei grundlegenden Arten von Prozessen teilnehmen, und zwar an Zerfällen und Streuungen:

– Zerfall:



– Streuung:



In beiden Fällen stellt sich die Frage, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, pro Zeiteinheit vom Anfangszustand in einen gegebenen Endzustand zu übergehen. Dieser Teil befasst sich mit dem geeigneten Formalismus um diese Frage zu beantworten — unabhängig von den eigentlichen Wechselwirkungen — erstens für Zerfälle (Kapitel VI), dann für Streuungen (Kapitel VII).

Insbesondere werden hiernach Ähnlichkeiten zwischen den Ausdrücken der Größen, die für jeden Prozess die Übergangswahrscheinlichkeiten pro Zeiteinheit charakterisieren, gefunden. Tatsächlich weisen diese Größen — Zerfallsrate bzw. Wirkungsquerschnitt — die gleiche mathematische Struktur auf, in der Form von Integralen des Betragsquadrats einer (Wahrscheinlichkeits)Amplitude über den verfügbaren Phasenraum für alle Endzustandsteilchen. Dabei wird die Amplitude letztendlich bestimmt von den für den Prozess relevanten Wechselwirkungen. Diese werden nur im nächsten Teil detailliert behandelt werden, doch die durch Feynman eingeführten Regeln, basierend auf Diagramme, zur Berechnung einer Amplitude werden schon in Kap. VIII dargestellt.

KAPITEL V

Relativistische Kinematik

V.1 Schwerpunktsenergie, Reaktionsschwelle 42

V.2 Zwei Teilchen im Endzustand 43

V.3 Drei Teilchen im Endzustand 44

V.4 Kinematik einfacher Stöße 45

In der (Elementar)Teilchenphysik lassen sich die meisten Prozesse in zwei Kategorien einordnen: zum einen in Zerfälle eines instabilen Teilchens der Masse m in zwei oder mehr leichtere Teilchen, und zum anderen in Stöße zweier Teilchen mit jeweiligen Viererimpulsen \mathbf{p}_a und \mathbf{p}_b , mit zwei oder mehr Teilchen im Endzustand. Unabhängig von den für diese Prozesse verantwortlichen Wechselwirkungen liefert die Erhaltung des gesamten Viererimpulses — entsprechend den nicht-relativistischen Erhaltungssätzen der Energie und des Impulses — vier Gleichungen, die die Viererimpulse der emittierten Teilchen einschränken.

In diesem Kapitel wird kurz auf diese rein kinematischen Einschränkungen eingegangen, für kinematisch erlaubte (Abschn. V.1) Prozesse mit zwei (Abschn. V.2) oder drei (Abschn. V.3) Teilchen im Endzustand. Schließlich werden in Abschn. V.4 einige Definitionen und ein paar oft auftretende kinematische Variablen eingeführt.

Hiernach werden nur sogenannte „on-Shell-Teilchen“ betrachtet, d.h. Teilchen, die den klassischen Bewegungsgleichungen genügen, und insbesondere der Beziehung⁽¹⁴⁾ $E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m^2 c^4$ mit der Teilchenmasse m .

V.1 Schwerpunktsenergie, Reaktionsschwelle

Eine wichtige Größe zur Charakterisierung eines Prozesses ist die *Schwerpunktsenergie* oder *verfügbare Energie im Schwerpunktsystem* E_{cm} .⁽¹⁵⁾ Dabei ist das Letztere so definiert als das inertielle Bezugssystem, wo der dreidimensionale Gesamtimpuls einer Menge von Teilchen — entsprechend hier dem bzw. den Teilchen vor (oder, dank dem Impulssatz, nach) der Reaktion — verschwindet. In einem Zerfall ist E_{cm} gerade gleich der Massenenergie mc^2 des zerfallenden Teilchens.

Im Fall des Stoßes zweier Teilchen lässt sich E_{cm} durch die Viererimpulse \mathbf{p}_a und \mathbf{p}_b einfach ausdrücken. Im Schwerpunktsystem gilt tatsächlich definitionsgemäß $\vec{p}_{a,\text{cm}} + \vec{p}_{b,\text{cm}} = \vec{0}$, woraus

$$\frac{E_{\text{cm}}^2}{c^2} = (p_{a,\text{cm}}^0 + p_{b,\text{cm}}^0)^2 = (p_{a,\text{cm}}^0 + p_{b,\text{cm}}^0)^2 - (\vec{p}_{a,\text{cm}} + \vec{p}_{b,\text{cm}})^2 = (\mathbf{p}_{a,\text{cm}} + \mathbf{p}_{b,\text{cm}})^2$$

folgt. Da das Lorentz-Quadrat eines Vierervektors ein Lorentz-Skalar ist, bleibt der Term ganz rechts gleich $(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2$ in jedem Inertialsystem. Somit gilt

$$E_{\text{cm}}^2 = (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2 c^2, \tag{V.1}$$

unabhängig vom Bezugssystem, in welchem \mathbf{p}_a und \mathbf{p}_b gemessen werden.⁽¹⁶⁾

⁽¹⁴⁾Im vierdimensionalen Raum aller möglichen Werte der Energie und der Impulskomponenten stellt diese Beziehung die Gleichung eines Hyperboloids dar, der sogenannten *Massenschale* (mass-shell).

⁽¹⁵⁾Hier steht die Abkürzung cm für *center-of-mass* — oder, sogar besser: *center-of-momentum (frame)*.

⁽¹⁶⁾Natürliche müssen beide Viererimpulse im gleichen Bezugssystem gemessen werden!

Ein Prozess ist nur dann kinematisch erlaubt, wenn die verfügbare Energie im Schwerpunktsystem größer als die Summe der Massenenergien der Endzustandsteilchen ist. Für Zerfälle bedeutet diese Bedingung $m > \sum_j m_j$, wobei die m_j die Massen der „Tochtereilchen“ sind. Im Fall eines Stoßes soll $(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2 > (\sum_j m_j)^2 c^2$ gelten.

Die letztere Ungleichung kann auch anders gedeutet werden. Damit der Endzustand eines Zwei-Teilchen-Stoßes aus gegebenen Teilchen mit Massen m_j besteht, muss die Schwerpunktsenergie der Kollision einen Wert überschreiten, die *Reaktionsschwelle* $(\sum_j m_j)^2 c^4$.

Bemerkung: Auch wenn ein gegebener Prozess kinematisch erlaubt ist, ist es noch möglich, dass er aus anderen Gründen nicht stattfinden kann — insbesondere wenn der Prozess weiteren Erhaltungssätzen nicht genügt, z.B. der Erhaltung des Drehimpulses oder der elektrischen Ladung.

V.2 Zwei Teilchen im Endzustand

Besteht der Endzustand eines Prozesses aus nur zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2 , so lässt sich dieser mit sechs Parametern beschreiben, entsprechend den Komponenten der Impulse der Teilchen — die Energien der Teilchen sind dann durch die on-shell-Bedingungen $E_j^2 = |\vec{p}_j|^2 c^2 + m_j^2 c^4$ bestimmt. Sei jetzt angenommen, dass der gesamte Viererimpuls \mathbf{p} des Anfangszustands bekannt ist. Da die Erhaltung des Viererimpulses vier (unabhängige) Bedingungen darstellt, bleiben tatsächlich nur zwei Freiheitsgrade für den Endzustand, entsprechend z.B. den zwei Winkeln, die die Richtung eines der emittierten Teilchen charakterisieren. Dies wird hiernach am Beispiel des Endzustands eines Zwei-Teilchen-Zerfalls illustriert.⁽¹⁷⁾

In diesem und im nächsten Abschnitt wird der Zerfall eines unpolarisierten Teilchens betrachtet, so dass der Zerfall isotrop ist. Im Ruhesystem des „Mutterteilchens“, entsprechend dem Schwerpunktsystem der Zerfallsprodukte, werden die Letzteren in entgegengesetzte Richtungen emittiert. Es seien

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} E_1/c \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} E_2/c \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

die Viererimpulse der Mutter- und Tochtereilchen im Schwerpunktsystem. Die Erhaltung des gesamten Viererimpulses

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

im Zerfall führt sofort zu $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)^2 = (\mathbf{p}_2)^2 = m_2^2 c^2$. Berechnet man das Lorentz-Quadrat auf der linken Seite unter Berücksichtigung der Gleichungen $\mathbf{p}^2 = m^2 c^2$, $(\mathbf{p}_1)^2 = m_1^2 c^2$ und $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_1 = mE_1$ — wobei die Letztere nur im Schwerpunktsystem gilt —, so ergibt sich

$$m^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2mE_1 = m_2^2 c^2,$$

d.h.

$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} c^2.$$

In ähnlicher Weise erhält man $E_2 = (m^2 + m_2^2 - m_1^2) c^2 / 2m$. Die Energien E_1 und E_2 im Schwerpunktsystem sind somit unabhängig von den Richtungen der emittierten Teilchen. Diese Eigenschaft gilt in einem anderen Bezugssystem nicht mehr!

Aus dem Ausdruck der Energie und der on-shell-Bedingung folgt für den Betrag des Impulses jedes Tochtereilchens

$$|\vec{p}_j|^2 = \frac{E_j^2}{c^2} - m_j^2 c^2 = \frac{m^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2m^2 m_1^2 - 2m^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2}{4m^2} c^2.$$

⁽¹⁷⁾Handelt es sich bei dem Prozess um einen Streuprozess, so soll m in allen Gleichungen dieses und des nächsten Abschnitts durch E_{cm}/c^2 ersetzt werden.

Bemerkung: Der Zähler dieses Ausdrucks lässt sich als $[m^2 - (m_1 + m_2)^2][m^2 - (m_1 - m_2)^2]$ umschreiben. Dies ist immer positiv für m größer als $m_1 + m_2$, kann aber wenn $m < m_1 + m_2$ negativ werden, was für ein Betragsquadrat problematisch ist! Hier erkennt man die in Abschn. V.1 diskutierte Bedingung über die Massen der beteiligten Teilchen.

V.3 Drei Teilchen im Endzustand

In einem Prozess mit drei Teilchen im Endzustand existieren auch kinematisch bedingte Einschränkungen, die hier am Beispiel des Zerfalls eines Teilchens der Masse m in drei Teilchen mit Massen m_1 , m_2 und m_3 illustriert werden. Seien \mathbf{p} , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 und \mathbf{p}_3 die jeweiligen Viererimpulse der Teilchen.

Die Erhaltung des gesamten Viererimpuls $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$ liefert vier Bedingungen für die 9 Komponenten der Impulse der Zerfallsprodukte, so dass es 5 Freiheitsgrade übrig bleiben. Drei davon entsprechen Winkeln — zwei für die Ebene, in der \vec{p}_1 und \vec{p}_2 liegen, und einem für die Richtung von \vec{p}_1 in dieser Ebene —, wovon die Energien der emittierten Teilchen im Schwerpunktsystem aus Symmetrie-Gründen nicht abhängen können. Diese Energien hängen nur von den zwei restlichen Freiheitsgraden ab. Für die Letzteren werden üblicherweise zwei der Lorentz-invarianten *Dalitz*^(aa)-Variablen m_{ij}^2 angenommen, wobei

$$\begin{aligned} m_{12}^2 c^2 &\equiv (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_3)^2, \\ m_{13}^2 c^2 &\equiv (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3)^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2)^2, \\ m_{23}^2 c^2 &\equiv (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)^2, \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

z.B. m_{12}^2 und m_{13}^2 . Die Menge der kinematisch erlaubten Werte dieser Variablen ist ein konvexes Gebiet in der (m_{12}^2, m_{13}^2) -Ebene, dessen Grenzen von m , m_1 , m_2 und m_3 abhängen.

Aus der Gleichung $m_{12}^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_3)^2/c^2 = m^2 + m_3^2 - 2mE_3/c^2$ im Schwerpunktsystem und der Bedingung $E_3/c^2 \geq m_3$ folgt die obere Schranke $m_{12}^2 \leq (m - m_3)^2$. Um eine untere Schranke von m_{12}^2 zu erhalten, kann man ins Schwerpunktsystem des aus Teilchen 1 und 2 bestehenden Teilsystems übergehen. Bezeichnet man die Energien in diesem Bezugssystem mit einem Strich, so gilt

$$m_{12}^2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2/c^2 = (E'_1 + E'_2)^2/c^4 \geq (m_1 + m_2)^2,$$

wobei die Ungleichung trivial ist. Somit hat man schließlich $(m_1 + m_2)^2 \leq m_{12}^2 \leq (m - m_3)^2$, und ähnlich $(m_1 + m_3)^2 \leq m_{13}^2 \leq (m - m_2)^2$ und $(m_2 + m_3)^2 \leq m_{23}^2 \leq (m - m_1)^2$. Wegen der Beziehung (V.3) zwischen den Dalitz-Variablen kann bei gegebener m_{12}^2 die Variable m_{13}^2 nicht ihre Werte im ganzen Intervall annehmen, sondern nur in einem kleineren, m_{12}^2 -abhängigen Bereich. Weitere Details dazu können in der Review of Particle Properties [1], § 47.4.3 & 47.4.4 gefunden werden.

Bemerkungen:

* Wegen der Erhaltung des gesamten Viererimpulses sind die Dalitz-Variablen nicht unabhängig voneinander, sondern genügen der Beziehung

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2. \quad (\text{V.3})$$

* In einem Drei-Teilchen-Zerfall sind die Energien und Impulse der Zufallsprodukte nicht durch die Kinematik völlig festgelegt, sondern können ein kontinuierliches Spektrum an Werten annehmen,⁽¹⁸⁾ wobei der maximale mögliche Wert der Energie E_1 und somit des Impulses $|\vec{p}_1|$ für Teilchen 1 durch den minimalen möglichen Wert von m_{23} gegeben ist [vgl. $E_1 = (m^2 + m_1^2 - m_{23}^2)c^2/2m$].

⁽¹⁸⁾ Gerade diese Beobachtung hat Wolfgang Pauli 1930 veranlasst, die Existenz des (Anti-)Neutrinos zu postulieren, um das kontinuierliche Energiespektrum der in β -Zerfällen emittierten Elektronen zu erklären.

^(aa)R. DALITZ, 1925–2006

V.4 Kinematik einfacher Stöße

In diesem Abschnitt werden ein paar Definitionen betreffend Teilchenstöße eingeführt. Wir diskutieren nur Kollisionen zwischen zwei durch a bzw. b gekennzeichneten Teilchen, weil Stöße in einer relativistischen Theorie nur lokal sein können, d.h. die beteiligten Teilchen sollen sich im gleichen Punkt der Raumzeit befinden, was mit mehr als zwei Teilchen praktisch unmöglich wird.

Bekannterweise unterscheidet man zwischen *elastischen Stößen*, in denen die Teilchen im Endzustand die gleichen wie im Anfangszustand bleiben, und *inelastischen Stößen*. Unter den letzteren werden die Stöße mit nur zwei Teilchen (1 und 2) im Endzustand als *quasielastisch* bezeichnet. Zusammen werden elastische und quasielastische Stöße auch *Zwei-nach-zwei-Prozesse* genannt.

Sei $a + b \rightarrow 1 + 2$ ein solcher Prozess. Die Massen bzw. die Viererimpulse der Teilchen werden mit m_a, m_b, m_1 und m_2 bzw. $\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_1$ und \mathbf{p}_2 bezeichnet. Die *Mandelstam*^(ab)-Variablen für den Prozess werden definiert durch

$$\begin{aligned} s &\equiv (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2/c^2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2/c^2, \\ t &\equiv (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1)^2/c^2 = (\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_2)^2/c^2, \\ u &\equiv (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_2)^2/c^2 = (\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_1)^2/c^2. \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

Die Variable s ist gleich $1/c^4$ mal dem Quadrat der Schwerpunktsenergie E_{cm} der kollidierenden Teilchen, während t den Quadrat des Viererimpuls-Übertrags geteilt durch c^2 darstellt. Im besonderen Fall eines elastischen Stoßes — mit $(\mathbf{p}_1)^2 = (\mathbf{p}_a)^2 = m_a^2 c^2$ und $(\mathbf{p}_2)^2 = (\mathbf{p}_b)^2 = m_b^2 c^2$ — gilt im Schwerpunktsystem $E_a = E_1$, was zu $t = -|\vec{p}_a - \vec{p}_1|^2$ führt.

Definitionsgemäß sind die Mandelstam-Variablen Lorentz-invariant. Sie sind nicht unabhängig voneinander, da im allgemeinen Fall eines Zwei-nach-zwei-Prozesses gilt

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2. \quad (\text{V.5})$$

Im besonderen Fall einer elastischen Kollision lautet diese Gleichung

$$s + t + u = 2m_a^2 + 2m_b^2.$$

Beweis der Beziehung (V.5): Die Definitionen (V.4) liefern

$$s + t + u = 3m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2 + 2\mathbf{p}_a \cdot (\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/c^2.$$

Unter Verwendung des Viererimpulserhaltung gilt $\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_a$, woraus das Ergebnis folgt. \square

^(ab)S. MANDELSTAM, 1928–2016

KAPITEL VI

Zerfälle

VI.1 Definitionen 46

VI.2 Berechnung der Zerfallsrate 47

VI.2.1 Streumatrix 47

VI.2.2 Zeitabhängige Störungstheorie 47

VI.2.3 Vereinfachtes Modell 49

Dieses Kapitel behandelt die erste Art von elementaren Prozessen bei wechselwirkenden Teilchen, und zwar den Zerfall instabiler Teilchen. In Abschn. VI.1 werden einige wichtigen auf Zerfälle bezogenen Begriffe eingeführt. Dann geht Abschn. VI.2 auf die Berechnung der Zerfallsrate ein, verdeutlicht am Beispiel eines vereinfachten Modells für die Wechselwirkung.

VI.1 Definitionen

Eine erste wichtige Eigenschaft von instabilen Teilchen ist die *Lebensdauer* τ . Genauer sollte man von der mittleren Lebensdauer sprechen, da die Lebensdauer eines einzigen Teilchens nicht vorhersagbar ist, weil es sich bei dem Zerfall um einen quantenmechanischen Prozess handelt. Meist wird diese mittlere Lebensdauer τ für ein ruhendes Teilchen angegeben.⁽¹⁹⁾

Eine verwandte Größe ist die *Zerfallsrate*, entsprechend der Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, dass ein Zerfall stattfindet. Diese Zerfallsrate wird üblicherweise als Γ bezeichnet. Damit lautet das Zerfallsgesetz für die Abnahme der Teilchenzahl $N(t)$ zwischen den Zeiten t und $t + dt$:

$$dN = -\Gamma N(t) dt,$$

was sich sofort integrieren lässt als $N(t) = N(0) e^{-\Gamma t}$. Somit findet man einfach, dass $\Gamma = \frac{1}{\tau}$ gilt.

Oft kann ein gegebenes Teilchen in mehrere verschiedene Mengen an Zerfallsprodukten zerfallen. Jede solche mögliche Art von Zerfallsprodukten wird *Zerfallskanal* genannt. Wird ein Zerfallskanal als j beschrieben, so definiert man die (partielle) Zerfallsrate in diesen Kanal, Γ_j . Für die Gesamtzerfallsrate gilt natürlich $\Gamma_{\text{tot}} = \sum_j \Gamma_j$.

Dazu definiert man das *Verzweigungsverhältnis* in einen Kanal als $\Gamma_j/\Gamma_{\text{tot}}$. Je größer dieses Verzweigungsverhältnis ist, desto mehr Zerfälle in den zugehörigen Kanal führen.

⁽¹⁹⁾Natürlich stellt sich dann die Frage, ob masselose Teilchen, die kein Ruhesystem haben, instabil sein können — was im Standard-Modell nicht passiert. Kinematisch darf ein solches Teilchen in zwei oder mehr masselose Teilchen zerfallen, vorausgesetzt diese sich kollinear zum Mutterteilchen bewegen. Dann kann man zeigen, dass die mittlere Lebensdauer τ in einem Bezugssystem, wo das Teilchen die Energie E hat, proportional zu dieser Energie ist [10], in Übereinstimmung mit dem Ergebnis für massive Teilchen, vgl. die Zerfallsrate (VI.19).

VI.2 Berechnung der Zerfallsrate

In diesem Abschnitt wird das Prinzip der Berechnung der Zerfallsrate dargestellt und an einem vereinfachten Beispiel verdeutlicht.

VI.2.1 Streumatrix

Im Anfangszustand eines Zerfalls befindet sich ein Teilchen mit Masse m und Viererimpuls \mathbf{p} , beschrieben durch den Zustandsvektor $|i\rangle$ eines geeigneten Hilbert-Raums. Der Endzustand besteht aus Zerfallsprodukten mit jeweiligen Massen $m_1, m_2 \dots$ und Viererimpulsen $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots$: diese werden kollektiv durch einen Zustandsvektor $|f\rangle$ dargestellt. Sowohl $|i\rangle$ als $|f\rangle$ sind Eigenvektoren eines Hamilton-Operators \hat{H}_0 , der freie Teilchen beschreibt.⁽²⁰⁾

Die Zustandsvektoren gehören einem geeigneten Hilbert-Raum („Fock-Raum“), dessen Kets alle physikalisch erlaubten Kombinationen von Teilchen mit jeweiligen Impulsen beschreiben. Beispiele werden hiernach gegeben, s. Gl. (VI.13) und (VI.15).

Der gesamte Hamilton-Operator für die Teilchen enthält aber auch Wechselwirkungen und ist also der Form

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}(t), \quad (\text{VI.1})$$

wobei $g\hat{V}$ ein Wechselwirkungsterm ist, der Übergänge zwischen den Eigenzuständen von \hat{H}_0 induzieren kann. Die Zeitentwicklung eines Zustandsvektors lässt sich dann mithilfe des mit \hat{H} assoziierten Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t, t_0)$ beschreiben. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass sich das System von Teilchen zur Zeit t_0 im Zustand $|i\rangle$ und zur späteren Zeit t im Zustand $|f\rangle$ befindet, durch das Matrixelement $\langle f | \hat{U}(t, t_0) | i \rangle$ gegeben.

Man definiert die *Streumatrix* \hat{S} , auch S-Matrix genannt, durch die Angabe deren Matrixelemente

$$S_{fi} \equiv \langle f | \hat{U}(+\infty, -\infty) | i \rangle. \quad (\text{VI.2})$$

Dieser Definition nach sind die wechselwirkungsfreien Anfangs- und Endzustände sog. asymptotische Zustände, die nur in der unendlichen Vergangenheit bzw. in der unendlichen Zukunft zu finden sind.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Streumatrix unitär ist.

Die Berechnung der Streumatrix bzw. deren Elemente erfolgt normalerweise in der Quantenfeldtheorie. Hiernach wird das Prinzip der Berechnung ausgehend von nicht-relativistischer Quantenmechanik illustriert.

VI.2.2 Zeitabhängige Störungstheorie

In diesem Abschnitt wird die Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude zwischen einem Anfangs- und einem Endzustand eines nicht-relativistischen quantenmechanischen Systems mithilfe der sog. zeitabhängigen Störungstheorie, formuliert im Wechselwirkungsbild, dargestellt.

VI.2.2a Wechselwirkungsdarstellung

Ein System sei durch den Hamilton-Operator $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + g\hat{V}(t)$ beschrieben, wobei \hat{H}_0 zeitunabhängig ist, während der Term $g\hat{V}(t)$ eine „Wechselwirkung“ beschreibt. Insbesondere kann das System unter dem Einfluss von $g\hat{V}(t)$ von einem Eigenzustand zu \hat{H}_0 in einen anderen übergehen.

Dabei wird üblicherweise angenommen, dass der Wechselwirkungsterm langsam („adiabatisch“) ein- und ausgeschaltet werden kann — was automatisch zur Zeitabhängigkeit führt —, damit ein Eigenzustand zu \hat{H}_0 auch Eigenzustand zu $\hat{H}(t)$ zu gegebenen Zeiten t ist. Solche Feinheiten werden in der kurzen Diskussion dieses Abschnitts ignoriert.⁽²¹⁾

⁽²⁰⁾ Dabei stehen die Bezeichnungen i und f für „initial“ und „final“.

⁽²¹⁾ Für eine Diskussion dieser „adiabatischen Näherung“ s. z.B. Griffiths [11] Kap. 10.1.

Um solche Übergangswahrscheinlichkeiten zu berechnen, lohnt es sich, das Problem in der *Wechselwirkungsdarstellung*⁽²²⁾ der Quantenmechanik zu betrachten. Diese folgt aus der Schrödinger-Darstellung, indem die zeitabhängigen Zustandsvektoren $|\psi(t)\rangle_S$ und die (meist) zeitunabhängigen Observablen \hat{A}_S jeweils durch⁽²³⁾

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S, \quad (\text{VI.3a})$$

und

$$\hat{A}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}, \quad (\text{VI.3b})$$

ersetzt werden.

Bemerkung: Dank den Definitionen (VI.3) bleiben Matrixelemente von Operatoren unabhängig von der Wahl der Darstellung: für alle $|\psi\rangle, |\chi\rangle, \hat{A}$ gilt

$${}_I\langle\chi|\hat{A}_I|\psi\rangle_I = {}_S\langle\chi|\hat{A}_S|\psi\rangle_S.$$

Dies gilt insbesondere für die (messbaren!) Erwartungswerte von Observablen.

Ausgehend von der Schrödinger-Gleichung in der Schrödinger-Darstellung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_S = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle_S$$

zeigt man einfach, dass die Bewegungsgleichung für $|\psi(t)\rangle_I$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = g\hat{V}_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (\text{VI.4a})$$

mit [vgl. Definition (VI.3b)]

$$\hat{V}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{V}(t) e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \quad (\text{VI.4b})$$

lautet. Somit wird die zeitliche Entwicklung von $|\psi(t)\rangle_I$ durch den Wechselwirkungsterm $g\hat{V}_I(t)$ allein bestimmt. Die formale Lösung zur Differentialgleichung (VI.4a) für eine gegebene Anfangsbedingung $|\psi(t_0)\rangle_I$ lässt sich durch den *Zeitentwicklungsoperator* $\hat{U}_I(t, t_0)$ ausdrücken:

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I. \quad (\text{VI.5})$$

Setzt man diese Form in Gl. (VI.4a) ein, so findet man, dass $\hat{U}_I(t, t_0)$ der Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_I(t, t_0)}{\partial t} = g\hat{V}_I(t) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (\text{VI.6a})$$

mit der Anfangsbedingung

$$\hat{U}_I(t_0, t_0) = \hat{\mathbb{1}} \quad (\text{VI.6b})$$

genügt, wobei $\hat{\mathbb{1}}$ der Identitätsoperator auf dem Hilbert-Raum der Zustandsvektoren ist.

VI.2.2b Störungsrechnung des Zeitentwicklungsoperators

Die Integration von Gl. (VI.6) nach t liefert die Integralgleichung

$$\hat{U}_I(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}} + \frac{g}{i\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') \hat{U}_I(t', t_0) dt'. \quad (\text{VI.7})$$

Ersetzt man jetzt $\hat{U}_I(t', t_0)$ im Integranden durch $\hat{\mathbb{1}} + \frac{g}{i\hbar} \int_{t_0}^{t'} \hat{V}_I(t'') \hat{U}_I(t'', t_0) dt''$, so ergibt sich

$$\hat{U}_I(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}} - \frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') dt' + \mathcal{O}(g^2), \quad (\text{VI.8})$$

d.h. ein Ausdruck des Zeitentwicklungsoperators zur ersten Ordnung in der Kopplung g .

⁽²²⁾auch *Dirac-Darstellung* genannt.

⁽²³⁾Der Index I steht für „interaction“ (picture).

Allgemeiner kann Gl. (VI.7) iterativ gelöst werden. Dies liefert die *Dyson^(ac)-Reihe*

$$\hat{U}_I(t_f, t_i) = \hat{\mathbb{1}} + \frac{g}{i\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') dt' + \frac{g^2}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') \int_{t_0}^{t'} \hat{V}_I(t'') dt'' dt' + \dots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \hat{U}_I^{(k)}(t, t_0),$$

mit $\hat{U}_I^{(0)}(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}}$ und $\hat{U}_I^{(k)}(t, t_0) = \frac{g}{i\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') \hat{U}_I^{(k-1)}(t', t_0) dt'$. Explizit gilt

$$\begin{aligned} \hat{U}_I^{(k)}(t, t_0) &= \frac{g^k}{(i\hbar)^k} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t_k) \int_{t_0}^{t_k} \dots \int_{t_0}^{t_2} \hat{V}_I(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_k \\ &= \frac{g^k}{(i\hbar)^k} \int_{t \geq t_k \geq \dots \geq t_1 \geq t_0} \hat{V}_I(t_k) \dots \hat{V}_I(t_1) dt_1 \dots dt_k, \end{aligned}$$

d.h., $\hat{U}_I^{(k)}$ ist der Ordnung k in der Störung $g\hat{V}_I(t)$. Dabei sind die Operatoren so angeordnet, dass der mit dem größten Zeitargument ganz links steht, der mit dem zweitgrößten an zweiter Stelle von links steht, usw. — die Ordnung ist wichtig, da i.A. $[\hat{V}_I(t), \hat{V}_I(t')] \neq 0$ für $t \neq t'$.

Das Volumen des k -dimensionalen Bereichs $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t$ ist eigentlich $1/k!$ mal dem Volumen des Bereichs $t_0 \leq t_j \leq t$ für $j = 1, \dots, k$. Es gilt also

$$\hat{U}_I^{(k)}(t, t_0) = \frac{1}{k!} \frac{g^k}{(i\hbar)^k} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \mathcal{T}[\hat{V}_I(t_k) \dots \hat{V}_I(t_1)] dt_1 \dots dt_k,$$

wobei das *zeitgeordnete Produkt* $\mathcal{T}(\dots)$ die zeitliche Anordnung der Operatoren gewährleistet in Bereichen, wo $t_{j+1} < t_j$ für mindestens einen Wert von j . Es folgt dann nach Summation der Dyson-Reihe

$$\hat{U}_I(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left[-\frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') dt' \right].$$

Für weitere Details, vgl. ein Lehrbuch über Quantenmechanik, wie z.B. Griffiths [11] Kap. 9.1 oder Messiah, Band 2 [12], Anfang des Kapitels 17 (bis einschließlich §17.1.1).

VI.2.3 Vereinfachtes Modell

Der Einfachheit halber wird jetzt der Zerfall eines als ρ bezeichneten skalaren Teilchens mit Masse m_ρ und Viererimpuls \mathbf{p} in zwei ebenfalls skalare Teilchen betrachtet, wobei die Zerfallsprodukte ein Teilchen π^+ (Masse $m_1 = m_\pi$, Viererimpuls \mathbf{p}_1) und dessen Antiteilchen π^- (Masse $m_2 = m_\pi$, Viererimpuls \mathbf{p}_2) sind.

Bemerkung: Das eigentliche ρ -Meson hat den Spin 1, nicht den Spin 0, wie hier der Einfachheit halber angenommen wird.

VI.2.3a Feldoperatoren – Wechselwirkungsterm – Anfangs- und Endzustände

Der Feldoperator für einlaufende ρ -Teilchen wird durch Gl. (II.11a) gegeben:

$$\hat{\phi}_\rho(\mathbf{x}) = \int \left[\hat{a}_{\vec{q}}^{(\rho)} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} + \hat{a}_{\vec{q}}^{(\rho)\dagger} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right] \frac{\hbar c d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{q}}}}, \quad (\text{VI.9})$$

wobei benutzt wurde, dass das ρ -Teilchen sein eigenes Antiteilchen ist.⁽²⁴⁾ Zur Beschreibung der auslaufenden π^+ -Teilchen, die erzeugt werden sollen, gibt Gl. (II.11b)

$$\hat{\phi}_\pi(\mathbf{x})^\dagger = \int \left[\hat{a}_{\vec{q}_1}^{(\pi)\dagger} e^{i\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{x}/\hbar} + \hat{b}_{\vec{q}_1}^{(\pi)} e^{-i\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{x}/\hbar} \right] \frac{\hbar c d^3\vec{q}_1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{q}_1}}}. \quad (\text{VI.10})$$

⁽²⁴⁾ Jede erhaltene innere Quantenzahl des ρ ist gleich der Summe der entsprechenden Quantenzahlen für die π^+ und π^- , bei denen die Zahl mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommt, so dass die Summe verschwindet. Das ρ kann also keine innere Quantenzahl haben, und somit kein verschiedenes Antiteilchen.

^(ac)F. DYSON, 1923–

Schließlich lautet der Feldoperator für die auslaufenden π^- -Antiteilchen

$$\hat{\phi}_\pi(\mathbf{x}) = \int \left[\hat{a}_{\vec{q}_2}^{(\pi)} e^{-i\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{x} / \hbar} + \hat{b}_{\vec{q}_2}^{(\pi)\dagger} e^{i\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{x} / \hbar} \right] \frac{\hbar c \, d^3 \vec{q}_2}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{q}_2}}}. \quad (\text{VI.11})$$

Dabei gelten die üblichen Energie-Impuls-Beziehungen: $E_{\vec{q}} = \sqrt{\vec{q}^2 c^2 + m_\rho^2 c^4}$, $E_{\vec{q}_1} = \sqrt{\vec{q}_1^2 c^2 + m_\pi^2 c^4}$ und $E_{\vec{q}_2} = \sqrt{\vec{q}_2^2 c^2 + m_\pi^2 c^4}$.

Bemerkung: Die Zuordnung vom Feldoperator $\hat{\phi}_\pi(\mathbf{x})$ dem auslaufenden π^- bzw. vom adjungierten $\hat{\phi}_\pi^\dagger(\mathbf{x})$ dem auslaufenden π^+ ist willkürlich und spielt hiernach keine Rolle.

Für den Wechselwirkungsterm im Hamilton-Operator wird die folgende vereinfachte Form in Abhängigkeit der obigen Feldoperatoren angenommen:

$$g\hat{V}_I(t) \equiv \int \frac{\mathcal{M}}{\hbar\sqrt{\hbar c}} \hat{\phi}_\pi(t, \vec{x})^\dagger \hat{\phi}_\pi(t, \vec{x}) \hat{\phi}_\rho(t, \vec{x}) \, d^3 \vec{x}, \quad (\text{VI.12})$$

wobei die *Amplitude* $\mathcal{M} \in \mathbb{C}$ zeit- und ortsunabhängig ist.

Der Anfangszustand $|i\rangle$ des untersuchten Zerfalls besteht aus ρ -Teilchen mit Viererimpuls \mathbf{p} . Ein solcher Zustand lässt sich durch die Wirkung des Erzeugungsoperators $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger}$ auf den Vakuumzustand erhalten:

$$|\rho(\vec{p})\rangle = \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} |0\rangle. \quad (\text{VI.13})$$

Dieser Zustandsvektor ist aber nicht auf 1 normiert, sondern auf

$$\langle \rho(\vec{p}) | \rho(\vec{p}) \rangle = \delta^{(3)}(\vec{0}) = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (\text{VI.14})$$

mit dem (möglicherweise unendlichen) dreidimensionalen Volumen \mathcal{V} , in dem sich die ρ -Teilchen bzw. die zugehörige ebene Welle befinden. Dies wiederum bedeutet, dass der Zustandsvektor $|\rho(\vec{p})\rangle$ kein einziges Teilchen, sondern $\mathcal{V}/(2\pi\hbar)^3$ davon beschreibt.

Beweis der Gl. (VI.14): Die erste Gleichung folgt aus

$$\langle \rho(\vec{p}) | \rho(\vec{p}') \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)\dagger}] + \hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)} | 0 \rangle = \langle 0 | \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') | 0 \rangle,$$

wobei einerseits der Kommutator (II.10a) und andererseits die Normierung auf 1 des Vakuumzustands verwendet wurden.

Die zweite Gleichung entspricht einfach der Tatsache, dass die Dirac-Distribution die Fouriertransformierte von 1 ist: im eindimensionalen Fall gilt

$$2\pi\delta(k) = \int e^{ikx} \, dx,$$

wobei für $k = 0$ zu $2\pi\delta(0) = L$ führt, wobei L das „Raumvolumen“ ist.

Um festzustellen, wie viele Teilchen durch den Zustandsvektor beschrieben werden, soll man den Erwartungswert des Teilchenzahloperators $\hat{N}^{(\rho)}$ in diesem Zustand berechnen. Dabei ist $\hat{N}^{(\rho)}$ das Integral über alle mögliche Impulse \vec{p}' von dem Besetzungszahloperator $\hat{N}_{\vec{p}'}^{(\rho)} = \hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)}$. Dann hat man

$$\langle \rho(\vec{p}) | \hat{N}^{(\rho)} | \rho(\vec{p}) \rangle = \int \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} | 0 \rangle \, d^3 \vec{p}'.$$

Schreibt man für die zwei letzten Leiteroperatoren rechts

$$\hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} = [\hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)}, \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger}] + \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)} = \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \hat{1} + \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)}$$

so kommt $\langle \rho(\vec{p}) | \hat{N}^{(\rho)} | \rho(\vec{p}) \rangle = \int \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(\rho)\dagger} | 0 \rangle \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \, d^3 \vec{p}' = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} | 0 \rangle = \langle \rho(\vec{p}) | \rho(\vec{p}) \rangle$.

Ähnlich dem Anfangszustand lautet der Zustandsvektor für den Endzustand

$$|\pi^+(\vec{p}_1) \pi^-(\vec{p}_2)\rangle = \hat{a}_{\vec{p}_1}^{(\pi)\dagger} \hat{b}_{\vec{p}_2}^{(\pi)\dagger} |0\rangle, \quad \text{d.h.} \quad \langle \pi^+(\vec{p}_1) \pi^-(\vec{p}_2) | = \langle 0 | \hat{b}_{\vec{p}_2}^{(\pi)} \hat{a}_{\vec{p}_1}^{(\pi)}. \quad (\text{VI.15})$$

VI.2.3b Streumatrixelement

Mit dem annähernden Ausdruck (VI.8) des Zeitentwicklungsoperators lautet das Streumatrixelement (VI.2)

$$S_{fi} = {}_I\langle f | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | i \rangle_I = \delta_{fi} - {}_I\langle f | \frac{ig}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}_I(t') dt' | i \rangle_I + \mathcal{O}(g^2). \quad (\text{VI.16})$$

Im jetzigen Fall von Interesse sind Anfangs- und Endzustand unterschiedlich, so dass der erste nicht-verschwindende Beitrag durch den Term der Ordnung g gegeben ist. Unter Verwendung des Wechselwirkungsterms (VI.12) kommt

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \langle \pi^+(\vec{p}_1) \pi^-(\vec{p}_2) | \int \frac{\mathcal{M}}{\hbar\sqrt{\hbar c}} \hat{\phi}_\pi(t, \vec{x})^\dagger \hat{\phi}_\pi(t, \vec{x}) \hat{\phi}_\rho(t, \vec{x}) d^3\vec{x} dt | \rho(\vec{p}) \rangle.$$

Das Einsetzen der Feldoperatoren (VI.9)–(VI.11) und der Zustandsvektoren (VI.13), (VI.15) in dieses Matrixelement gibt

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} \int \frac{(\hbar c)^{5/2} \mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}} \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_2}}} e^{i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} / \hbar} d^3\vec{x} dt.$$

Durch dieses Einsetzen erhält man das Integral nach Zeit und Raum von Integralen nach den Impulsen \vec{q} , \vec{q}_1 , \vec{q}_2 von Termen der Art

$$\langle 0 | \hat{b}_{\vec{p}_2}^{(\pi)} \hat{a}_{\vec{p}_1}^{(\pi)} \left\{ \hat{a}_{\vec{q}}^{(\rho)} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar} \right\} \left\{ \hat{b}_{\vec{q}_1}^{(\pi)} e^{-i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{x} / \hbar} \right\} \left\{ \hat{a}_{\vec{q}_2}^{(\pi)} e^{-i\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{x} / \hbar} \right\} \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} | 0 \rangle,$$

wobei die geschweiften Klammern bedeuten, dass einer der beiden Operatoren genommen werden soll. Der einzige nicht-verschwindende Beitrag kommt vom Term mit $\hat{a}_{\vec{q}}^{(\rho)} \hat{a}_{\vec{q}_1}^{(\pi)\dagger} \hat{b}_{\vec{q}_2}^{(\pi)\dagger}$ — für jede Teilchen- und Antiteilchenart muss es die gleiche Zahl von Vernichtern und Erzeugern geben — entsprechend dem Phasenfaktor $e^{i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x} / \hbar}$. Benutzt man dann Gleichungen der Form

$$\hat{a}_{\vec{q}}^{(\rho)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} = [\hat{a}_{\vec{q}}^{(\rho)}, \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger}] + \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} \hat{a}_{\vec{q}}^{(\rho)} = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \mathbf{1} + \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} \hat{a}_{\vec{q}}^{(\rho)},$$

wobei der letztere Term angewandt auf den Vakuumzustand Null geben wird, so findet man

$$\langle 0 | \hat{b}_{\vec{p}_2}^{(\pi)} \hat{a}_{\vec{p}_1}^{(\pi)} \hat{a}_{\vec{q}}^{(\rho)} \hat{a}_{\vec{q}_1}^{(\pi)\dagger} \hat{b}_{\vec{q}_2}^{(\pi)\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{(\rho)\dagger} | 0 \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{q}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_2 - \vec{q}_2).$$

Dann sind die Integrale über \vec{q} , \vec{q}_1 , \vec{q}_2 trivial und liefern das Resultat.

Die Integration nach t und \vec{x} lässt sich einfach durchführen und liefert eine Dirac-Distribution

$$S_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}/c} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}/c} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}/c}} \quad (\text{VI.17})$$

$$\equiv -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) T_{fi}.$$

Dabei heißt T_{fi} *Transfermatrixelement*. Dazu kommt die Erhaltung des Viererimpulses, ausgedrückt durch den $\delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p})$ -Term, automatisch aus der Berechnung heraus!

VI.2.3c Zerfallsrate

Die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall des Anfangszustands⁽²⁵⁾ wird durch das Betragsquadrat der Amplitude (VI.17) gegeben:

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}/c (2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}/c (2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}/c}.$$

Hier stellt $\delta^{(4)}(0)$ das vierdimensionale Raumzeitvolumen dar, in dem sich die Teilchen bewegen können. Ähnlich wie im zweiten Teil der Gl. (VI.14) gilt $\delta^{(4)}(0) = \mathcal{V}cT/(2\pi\hbar)^4$, wobei \mathcal{V} bzw. T

⁽²⁵⁾Stillschweigend wird angenommen, dass der Zerfall in ein $\pi^+ \pi^-$ -Paar der einzige erlaubte Zerfallskanal ist.

das dreidimensionale Volumen, in dem sich die Teilchen befinden, bzw. die Zeitspanne, in der der Zerfall stattfinden kann, bezeichnet.

Die Zerfallsrate für den betrachteten Anfangszustand ist die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, also $|S_{fi}|^2/T$, integriert über alle möglichen Impulse der auslaufenden Teilchen:

$$\Gamma_{|i\rangle \rightarrow \dots} = \frac{\mathcal{V}c^2}{(2\pi)^3 \hbar^4} \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_{\vec{p}}} \frac{c d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}.$$

Dabei ist aufzupassen, dass diese Rate für einen Anfangszustand gilt, der $\mathcal{V}/(2\pi\hbar)^3$ Teilchen enthält, wie oben bemerkt wurde. Um die Übergangsrate für einen auf 1 normierten Anfangszustand, entsprechend einem einzigen zerfallenden Teilchen, zu kriegen, soll man deshalb durch $\mathcal{V}/(2\pi\hbar)^3$ teilen. Somit lautet die gesuchte Zerfallsrate

$$\Gamma = \frac{c^2}{2\hbar E_{\vec{p}}} \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) |\mathcal{M}|^2 \frac{c d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}. \quad (\text{VI.18})$$

Dieses Resultat stellt ein Beispiel von *Fermis Goldene Regel* für Zerfälle dar.

Im allgemeinen Fall mit n Teilchen im Endzustand ist die Zerfallsrate gegeben durch

$$\Gamma = \frac{c^2}{2\hbar E_{\vec{p}}} C \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i - \mathbf{p}\right) |\mathcal{M}|^2 \prod_{i=1}^n \frac{c d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}}. \quad (\text{VI.19})$$

Abgesehen von numerischen Faktoren besteht diese Zerfallsrate aus drei Elementen, die jetzt diskutiert werden.

- Erstens ist C ein statistischer Faktor, der die mögliche Ununterscheidbarkeit einiger der auslaufenden Teilchen berücksichtigt: für je j identische Teilchen im Endzustand bekommt C einen Faktor $1/j!$.
- Dann wird die *Amplitude* \mathcal{M} durch den eigentlichen Wechselwirkungen festgestellt: hier spielt die Dynamik der Teilchen eine Rolle — welchen Wechselwirkungen unterliegen sie, welche Werte nehmen deren innere Quantenzahlen an —, sowie ihre Natur — handelt es sich um Teilchen mit Spin 0, $\frac{1}{2}$ oder 1...
- Schließlich kommt eine *Phasenraumintegration*

$$\int (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i - \mathbf{p}\right) \prod_{i=1}^n \frac{c d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}}, \quad (\text{VI.20})$$

wobei die Erhaltung des Viererimpulses schon berücksichtigt wird. Dabei lässt sich das Maß für die Integration im Impulsraum eines einzigen Teilchens in der Lorentz-invarianten Form

$$\frac{c d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}} = 2\pi \delta(\mathbf{p}_i^2 - m_i^2 c^2) \Theta(p_i^0) \frac{d^4 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^4} \quad (\text{VI.21})$$

schreiben, wobei Θ die Heaviside^(ad)-Funktion bezeichnet. Somit enthält die Phasenraumintegration auch die Bedingung, dass alle auslaufenden (Anti-)Teilchen „on-Shell-Teilchen“ sind, und eine positive Energie haben.

Bemerkungen:

- * In der Literatur findet man oft ein paar Kurzbezeichnungen:

$$d\text{LIPS}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \equiv \prod_{i=1}^n \frac{c d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}},$$

^(ad)O. HEAVISIDE, 1850–1925

wobei LIPS für „Lorentz-invariant phase space“ steht, sowie

$$d\Phi_n(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i - \mathbf{p}\right) \prod_{i=1}^n \frac{c d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}}$$

für die Kombination aus Impulsraum-Integrationsmaß und Viererimpulserhaltung.

* Ist die Amplitude \mathcal{M} ein Lorentz-Skalar, so ist das ganze Integral in Gl. (VI.19) Lorentz-invariant, und die Zerfallsrate Γ skaliert unter Lorentz-Transformationen wie der Kehrwert der Energie $E_{\vec{p}}$, d.h. wie der Kehrwert des Lorentz-Faktors γ . Dann skaliert die mittlere Lebensdauer τ einfach proportional zu γ ... was zu erwarten war.

* Im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens vereinfacht sich der Faktor $c^2/E_{\vec{p}}$ in Gl. (VI.19) zu $1/m$.

* Die Phasenraumintegration lässt sich für einen Zwei-Teilchen-Zerfall komplett ausführen dank der Tatsache, dass die Kinematik in diesem Fall völlig festgestellt ist, wie in Abschn. V.2 schon gesehen wurde.

Literatur zum Kapitel VI

- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 6.1.1 & 6.2.1.

KAPITEL VII

Streuprozesse

VII.1	Grundbegriffe	54
VII.1.1	Erste Definitionen	54
VII.1.2	Wirkungsquerschnitt. Luminosität	55
VII.2	Berechnung des Wirkungsquerschnitts	57
VII.2.1	Fermis Goldene Regel für Streuprozesse	57
VII.2.2	Lorentz-invariante Form des totalen Wirkungsquerschnitts	59
VII.2.3	Differentieller Wirkungsquerschnitt in einem Zwei-nach-zwei-Prozess	60

In diesem Kapitel werden Streuprozesse, d.h. Teilchenstöße, diskutiert. Nach der Einführung von ein paar Begriffen (Abschn. VII.1) wird das Prinzip der Berechnung des Wirkungsquerschnitts in Abschn. VII.2 dargestellt, mithilfe eines Beispiels ähnlich dem vereinfachten Zerfallsprozess im Kapitel VI.

Hiernach werden nur Kollisionen zwischen zwei Teilchen a und b betrachtet, mit zwei oder mehr Teilchen $1, 2, \dots$ im Endzustand. Prozesse mit drei oder mehr Teilchen im Anfangszustand, sowie solche mit einem einzigen Teilchen im Endzustand, sind tatsächlich in der Elementarteilchenphysik höchst unwahrscheinlich.⁽²⁶⁾

VII.1 Grundbegriffe

Dieser erste Abschnitt fasst die Definitionen von ein paar Grundbegriffen betreffend Streuprozesse zusammen.

VII.1.1 Erste Definitionen

Der Unterschied zwischen *elastischen Streuungen* — d.h. Prozesse der Art $a + b \rightarrow a' + b'$ — und *inelastischen Streuungen* — entweder der Art $a + b \rightarrow 1 + 2$, entsprechend *quasielastischen Streuungen*, oder $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots$ — wurde schon in Abschn. V.4 eingeführt.

Experimentell werden manchmal alle Streuprodukte gemessen und identifiziert, öfter sind aber nur Teil der Endteilchen bekannt, während die anderen uncharakterisiert bleiben. Dementsprechend soll man theoretisch einerseits *exklusive Prozesse* betrachten, in denen alle Teilchen im Endzustand vollständig charakterisiert sind, und andererseits *inklusive Prozesse*, in denen Teil der Streuprodukte nicht untersucht werden, wie z.B. $a + b \rightarrow 1 + \text{„Rest“}$.

Der *Streuwinkel* θ ist klassisch der Winkel, um den ein einlaufendes Teilchen abgelenkt wird, wie in Abb. VII.1 dargestellt wird. Allgemeiner wird er durch das Skalarprodukt zwischen den Impulsen eines einlaufenden und eines auslaufenden Teilchens definiert, hier ist z.B. θ der Winkel zwischen

⁽²⁶⁾Für Prozesse des Typs $a + b \rightarrow 1$ ist die Kinematik gerade die gleiche wie beim Zwei-Teilchen-Zerfall, so dass der Prozess nur dann zu einem on-Shell-Teilchen führen kann, wenn die einlaufenden Teilchen genau bestimmte Energien und Impulse haben.

\vec{p}_a und \vec{p}_1 . Man sollte darauf aufpassen, dass der Streuwinkel vom Bezugssystem abhängt, in dem die Streuung untersucht wird.

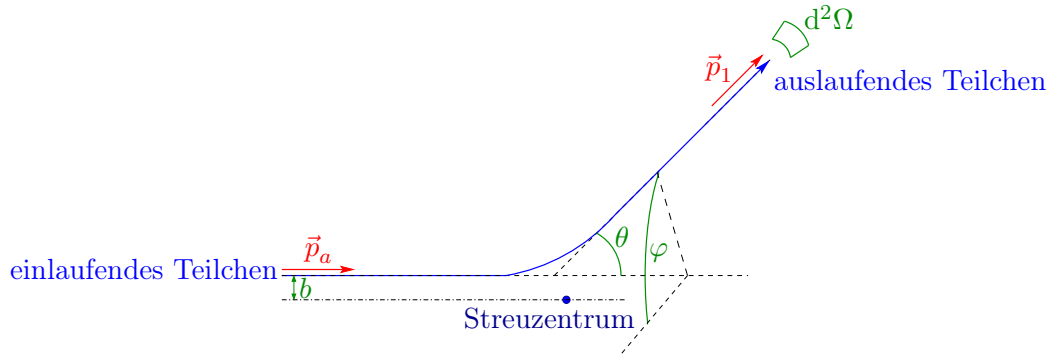


Abbildung VII.1 – Darstellung einiger Größen zur Charakterisierung eines Streuprozesses.

Bemerkung: Mithilfe der in Gl. (V.4) definierten Mandelstam-Variablen t findet man die Beziehung

$$\cos \theta = \frac{t - m_a^2 - m_1^2 + 2E_a E_1 / c^4}{2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|/c^2}. \quad (\text{VII.1})$$

Im besonderen Fall einer elastischen Streuung gilt im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen, wo $E_a = E_1$ ist, die einfache Relation $t = -2|\vec{p}_a|^2(1 - \cos \theta)/c^2$.

Im Stoß klassischer Teilchen definiert man noch den *Stoßparameter* b : dabei handelt es sich um den minimalen Abstand der einlaufenden Teilchen für den fiktiven Fall, wo sie sich geradlinig bewegen würden, statt abgelenkt zu werden. In der Quantenmechanik, wo Teilchen keiner Bahnkurve folgen, verliert dieser Begriff an Bedeutung.

VII.1.2 Wirkungsquerschnitt. Luminosität

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Streuprozess stattfindet, wird in der Teilchenphysik mithilfe des *Wirkungsquerschnitts* charakterisiert.

Klassisch handelt es sich dabei um die (effektive) Schnittfläche des Ziels — entsprechend hier dem zweiten einlaufenden Teilchen bzw. dem Streuzentrum — aus der Sicht eines einlaufenden Teilchens. Dies wird unten am Beispiel der Streuung eines klassischen Teilchens an einer harten Kugel illustriert.

In der Quantenmechanik entspricht der Begriff einer ähnlichen Größe, die aber von der Energie bzw. der Geschwindigkeit des einlaufenden Teilchens abhängt. Insbesondere können bei bestimmten Energien sog. *Resonanzen* auftreten, bei denen die Streuwahrscheinlichkeit stark wächst — das Ziel wird bei diesen Resonanzenergien als größer gesehen.

Für eine genaue Definition des Wirkungsquerschnitts soll man zuerst die Anzahl der Teilchen betrachten, die in einem (Gedenk-)Streuexperiment pro Zeit- und pro Raumwinkeleinheit in eine Richtung $(\theta, \varphi) \equiv \Omega$ gestreut werden, wobei die Winkeln in Abb. VII.1 definiert sind. Diese Anzahl sei als $d^3N_{\text{aus}}(\theta, \varphi)/dt d^2\Omega$ bezeichnet.

Dazu wird die *Luminosität* \mathcal{L}_{ein} als die Anzahl der einlaufenden Teilchen, die pro Zeiteinheit durch die Einheitsfläche fließen, definiert.

Dann ist der *differentielle Wirkungsquerschnitt* durch die Beziehung

$$\frac{d^2\sigma(\theta, \varphi)}{d^2\Omega} \equiv \frac{1}{\mathcal{L}_{\text{ein}}} \frac{d^3N_{\text{aus}}(\theta, \varphi)}{dt d^2\Omega} \quad (\text{VII.2})$$

definiert. Anders gesagt ist die *Ereignisrate* in eine gegebene Richtung gleich dem Produkt der Luminosität mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt, wobei ein Ereignis hier die Streuung eines Teilchens in die Richtung bezeichnet.

Der *totale Wirkungsquerschnitt* ist dann das Integral des differentiellen Wirkungsquerschnitts über alle Raumwinkel

$$\sigma_{\text{tot}} \equiv \int \frac{d^2\sigma(\theta, \varphi)}{d^2\Omega} d^2\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{d^2\sigma(\theta, \varphi)}{d^2\Omega} \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (\text{VII.3})$$

Dementsprechend ist die gesamte Ereignisrate gleich dem Produkt der Luminosität mit dem totalen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{dN_{\text{aus}}}{dt} = \mathcal{L}_{\text{ein}} \sigma_{\text{tot}}. \quad (\text{VII.4})$$

Da die Ereignisrate die Dimension einer Rate (!) $[\text{T}^{-1}]$ und die Luminosität die Dimension einer Teilchenstromdichte $[\text{L}^{-2} \text{T}^{-1}]$ hat, haben Wirkungsquerschnitte die Dimension L^2 einer Fläche. In der Teilchenphysik wird statt des m^2 der *barn* benutzt, wobei $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = (10 \text{ fm})^2$. Zum Beispiel hat die ATLAS Kollaboration⁽²⁷⁾ am Large Hadron Collider (LHC) am CERN in Proton-Proton-Kollisionen bei einer Schwerpunktsenergie von 13 TeV einen inelastischen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{inel.}} = 78,1 \pm 2,9 \text{ mb}$ gemessen [13].

Bemerkungen:

* Der Winkel zwischen zwei Impulsen hängt allgemein vom Bezugssystem ab, insbesondere der Streuwinkel. Dementsprechend hängt der differentielle Wirkungsquerschnitt vom Bezugssystem ab. Dagegen ist der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} eine Lorentz-invariante Größe, da es nur eine richtungsunabhängige Zahl charakterisiert.

* Bei der oben eingeführten Luminosität \mathcal{L}_{ein} handelt es sich tatsächlich um die *instantane Luminosität*. Diese kann auch integriert über die Dauer eines Experiments werden, was die *integrierte Luminosität* liefert.

Beispielsweise wurde der LHC ursprünglich entwickelt, um eine instantane Luminosität in Proton-Proton-Stößen von $10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 10^4 \mu\text{b}^{-1} \text{ s}^{-1}$ zu erreichen. In 2017 gehörte dieser Wert zur Routine,⁽²⁸⁾ und ein Rekordwert von $2,06 \cdot 10^4 \mu\text{b}^{-1} \text{ s}^{-1}$ wurde sogar erreicht.⁽²⁹⁾ Dazu betrug die über die Periode 2015–2018 (Run 2) integrierte Luminosität in Proton-Proton-Kollisionen im ATLAS-Experiment ca. 140 fb^{-1} .⁽³⁰⁾

Luminosität in Teilchenstößen

Betrachte den Stoß zweier Teilchen a und b , wobei der Endzustand für die Diskussion beliebig sein kann. Es wird angenommen, dass eines der Teilchen, z.B. Teilchen b , eine nichtverschwindende Masse hat. Dann kann man in dessen Ruhesystem gehen:



Sei jetzt angenommen, dass es im Volumen \mathcal{V} , wo sich die Teilchen befinden, nur ein einziges Teilchen a und ein einziges Teilchen b gibt. Dann ist die Luminosität der einlaufenden Welle, die das Teilchen a beschreibt, gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{ein}} = \frac{1}{\mathcal{V}} |\vec{v}_a|, \quad (\text{VII.5})$$

wobei $1/\mathcal{V}$ die durchschnittliche Teilchendichte der einlaufenden Teilchen darstellt.

Beispiel: Streuung an einer harten Kugel

Im Fall der Streuung eines klassischen Teilchens an einer festen harten Kugel mit dem Radius R sind der Stoßparameter b und der Streuwinkel θ einfach miteinander verknüpft. Somit findet man

⁽²⁷⁾ A Toroidal LHC Apparatus, Webseite: atlas.cern.

⁽²⁸⁾ Diese Information kann prinzipiell online auf der [LHC luminosity](#) Webseite gefunden werden. Bis 2021/22 findet am LHC ein „long shutdown“ statt, so dass nichts zu lesen ist.

⁽²⁹⁾ S. diese online-Nachricht.

⁽³⁰⁾ S. CERN Courier, Juli/August 2019, Seite 17.

für $b \leq R$ (vgl. Abb. VII.2) $b = R \sin \alpha$ mit $2\alpha = \pi - \theta$, d.h. $b = R \cos \frac{\theta}{2}$. Hier ist das Problem azimuthal symmetrisch.

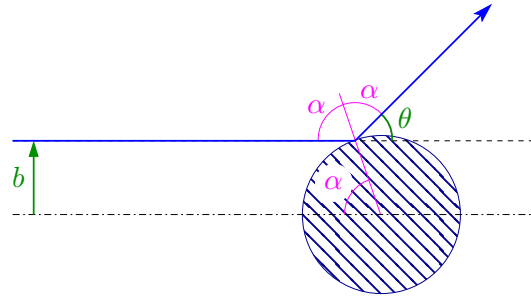


Abbildung VII.2 – Streuung an einer harten Kugel.

Sei $\theta \in [0, \pi]$; die Teilchen, die um einen Winkel zwischen θ und $\theta + d\theta$ gestreut werden, sind solche, die mit einem Stoßparameter zwischen b und $b + db$ auf die Kugel stoßen, wobei

$$db = d\left(R \cos \frac{\theta}{2}\right) = -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Sei N_{ein} die Anzahl der einlaufenden Teilchen, entsprechend einer Teilchendichte $N_{\text{ein}}/\mathcal{V}$. Wenn diese Teilchen alle dieselbe Geschwindigkeit v_{ein} haben, dann lautet die Luminosität $\mathcal{L}_{\text{ein}} = N_{\text{ein}}v_{\text{ein}}/\mathcal{V}$. Dazu bleibt die Geschwindigkeit der Teilchen unverändert in der Streuung, so dass die Anzahl der in die Richtung (θ, φ) gestreuten Teilchen pro Zeit- und Raumwinkeleinheit durch

$$\frac{d^3 N_{\text{aus}}(\theta, \varphi)}{dt d^2 \Omega} = \frac{1}{d\Omega} \frac{N_{\text{ein}}}{\mathcal{V}} v_{\text{ein}} |b db d\varphi|$$

gegeben ist, wobei $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Unter Berücksichtigung der Luminosität und der Ausdrücke für b und db findet man

$$\frac{d^3 N_{\text{aus}}(\theta, \varphi)}{dt d^2 \Omega} = \mathcal{L}_{\text{ein}} \frac{R \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sin \theta d\theta} = \mathcal{L}_{\text{ein}} \frac{R^2}{4}.$$

Dies bedeutet einen differentiellen Wirkungsquerschnitt $d^2 \sigma(\theta, \varphi)/d^2 \Omega = R^2/4$ für alle $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Wiederum ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{tot}} = \pi R^2$, d.h. gleich der Schnittfläche der Kugel.

VII.2 Berechnung des Wirkungsquerschnitts

Ähnlich der Zerfallsrate in Abschn. VI.2 lässt sich der Wirkungsquerschnitt mithilfe von Fermis Goldener Regel schreiben. Somit beruht der totale Wirkungsquerschnitt auf dem Phasenraumintegral einer Amplitude zum Quadrat über die Impulse der auslaufenden Teilchen (§ VII.2.1). Dieses Integral wird mit einem Vorfaktor multipliziert, dem sog. Flussfaktor, der in § VII.2.2 diskutiert wird. Wenn es nur zwei Teilchen im Endzustand kann das Phasenraumintegral weitgehend ohne Kenntnisse über die zugrundeliegende Wechselwirkung durchgeführt werden (§ VII.2.3), woraus der differentielle Wirkungsquerschnitt folgt.

VII.2.1 Fermis Goldene Regel für Streuprozesse

Betrachte z.B. den Zwei-nach-zwei-Prozess $a + b \rightarrow 1 + 2$, wobei die Teilchen die jeweiligen Viererimpulse $\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ haben. Der Einfachheit halber werden einige Annahmen gemacht: erstens sollen die zwei einlaufenden bzw. die zwei auslaufenden Teilchen nicht identisch sein. Dann haben sie alle den Spin 0. Schließlich gibt es mindestens ein massives Teilchen im Anfangszustand, z.B. Teilchen b .

Die einlaufenden Teilchen werden durch einen Zustandsvektor $|a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b)\rangle$ beschrieben, der sich durch Anwendung von geeigneten Erzeugungsoperatoren auf den Vakuumzustand erhalten lässt. Dieser Zustandsvektor ist auf

$$\langle a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b) | a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b) \rangle = [\delta^{(3)}(\vec{0})]^2 = \left[\frac{\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3} \right]^2 \quad (\text{VII.6})$$

normiert. Wiederum wird den auslaufenden Teilchen ein Endzustand $\langle 1(\vec{p}_1), 2(\vec{p}_2) |$ assoziiert. Beide Anfangs- und Endzustand sind Eigenzustände eines wechselwirkungsfreien Hamilton-Operators \hat{H}_0 .

Der Prozess unter Berücksichtigung erfolgt aus dem Einschalten eines zusätzlichen Wechselwirkungsterms $g\hat{V}(t)$ im Hamilton-Operator, mit

$$g\hat{V}_I(t) \equiv \int \frac{\mathcal{M}}{\hbar c} \hat{\phi}_a(t, \vec{x}) \hat{\phi}_b(t, \vec{x}) \hat{\phi}_1(t, \vec{x}) \hat{\phi}_2(t, \vec{x}) d^3\vec{x}, \quad (\text{VII.7})$$

wobei die komplexwertige *Amplitude* \mathcal{M} zeit- und ortsunabhängig ist, während $\hat{\phi}_i(\vec{x})$ für $i = a, b, 1, 2$ den mit Teilchen i assoziierten Klein-Gordon-Feldoperator bezeichnet.

Zur ersten nicht-trivialen Ordnung in Störungsrechnung lautet das *Streumatrixelement* (VI.2) zwischen Anfangs- und Endzustand [vgl. (VI.16)]

$$S_{\text{fi}} = \frac{1}{i\hbar} \langle 1(\vec{p}_1), 2(\vec{p}_2) | \int \frac{\mathcal{M}}{\hbar c} \hat{\phi}_a(t, \vec{x}) \hat{\phi}_b(t, \vec{x}) \hat{\phi}_1(t, \vec{x}) \hat{\phi}_2(t, \vec{x}) d^3\vec{x} dt | a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b) \rangle.$$

Drückt man die Feldoperatoren durch die zugehörigen Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren aus, so findet man, dass die Wirkung von $\hat{\phi}_i(\vec{x})$ für $i = a$ oder b bzw. $i = 1$ oder 2 auf den Anfangszustand bzw. Endzustand einen Term $\hbar c e^{-i\vec{p}_i \cdot \vec{x} / \hbar} / \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_i}}$ bzw. $\hbar c e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{x} / \hbar} / \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_i}}$ liefert, so dass schließlich

$$S_{\text{fi}} = \frac{1}{i\hbar} \int \frac{(\hbar c)^3 \mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_a}} \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_b}} \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_2}}} e^{i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) \cdot \vec{x} / \hbar} d^3\vec{x} dt.$$

Die Integration nach Raum und Zeit gibt dann

$$S_{\text{fi}} = -i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) \frac{c^2 \mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_a}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_b}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}}. \quad (\text{VII.8})$$

Dieser Ausdruck des Streumatrixelements hat die gleiche Struktur wie in Gl. (VI.17), und insbesondere berücksichtigt automatisch die Energie-Impuls-Erhaltung.

Bildet man nun das Betragsquadrat dieses Streumatrixelements, so ergibt sich

$$|S_{\text{fi}}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \frac{c^4 |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_a} (2\pi)^3 2E_{\vec{p}_b} (2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1} (2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}.$$

Dabei ist $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)$ gleich $1/\hbar^4$ mal dem Raumzeitvolumen $\mathcal{V}cT$, in dem die ein- und auslaufenden Teilchen propagieren.

$|S_{\text{fi}}|^2$ stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass der Anfangszustand $|a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b)\rangle$ nach einer Zeitspanne T in den Endzustand $\langle 1(\vec{p}_1), 2(\vec{p}_2) |$ übergeht. Um die entsprechende Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und für ein einziges Paar von einlaufenden Teilchen zu erhalten, soll man noch $|S_{\text{fi}}|^2$ durch T und durch die Normierung (VII.6) des Anfangszustands teilen. Somit lautet die Anzahl der pro Zeiteinheit mit Impulsen \vec{p}_1, \vec{p}_2 auslaufenden Teilchen

$$\frac{d^7 N_{\text{aus}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{dt d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2} = \frac{\hbar^2 c^3}{\mathcal{V}} \frac{1}{4E_{\vec{p}_a} E_{\vec{p}_b}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) \frac{c^2 |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1} (2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}. \quad (\text{VII.9})$$

Aus der Integration dieser Formel über die passenden Variablen lassen sich Ausdrücke für den differentiellen und den totalen Wirkungsquerschnitt herleiten.

Dabei ist der Letztere zunächst einfacher zu erhalten, zumindest formell. Integriert man die Anzahl (VII.9) über alle möglichen Werte der auslaufenden Impulse, so ergibt sich die Anzahl der pro Zeiteinheit auslaufenden Teilchen 1 und 2

$$\frac{dN_{\text{aus}}}{dt} = \frac{\hbar^2 c^3}{\mathcal{V}} \frac{1}{4E_{\vec{p}_a} E_{\vec{p}_b}} \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) |\mathcal{M}|^2 \frac{c d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}.$$

Diese Anzahl ist über Beziehung (VII.4) mit dem totalen Wirkungsquerschnitt und der Luminosität verknüpft. Um die Letztere zu ermitteln, kann man ins Ruhesystem von Teilchen b gehen — dank der Annahme, dass Teilchen b nicht masselos ist. In diesem Bezugssystem gilt $E_{\vec{p}_b} = m_b c^2$, während die Luminosität gemäß Gl. (VII.5) gleich $\mathcal{L}_{\text{ein}} = |\vec{v}_a|/\mathcal{V}$ ist, wobei \vec{v}_a die Geschwindigkeit von Teilchen a im gewählten Bezugssystem bezeichnet. Dies gibt für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\hbar^2 c}{4|\vec{v}_a| E_{\vec{p}_a} m_b} \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) |\mathcal{M}|^2 \frac{c d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}. \quad (\text{VII.10})$$

Diese Formel stellt wieder ein Beispiel von Fermis Goldener Regel dar.

Wie schon oben erwähnt wurde, soll der totale Wirkungsquerschnitt Lorentz-invariant sein. Während das Integral deutlich Lorentz-invariant ist — vorausgesetzt dies auch für $|\mathcal{M}|^2$ gilt, was hier ohne Beweis angenommen wird —, ist es für der Vorfaktor nicht sofort klar. Somit wird der Letztere im nächsten Abschnitt genauer untersucht.

VII.2.2 Lorentz-invariante Form des totalen Wirkungsquerschnitts

Das im Nenner des Vorfaktors des totalen Wirkungsquerschnitts (VII.10) auftretende Produkt $4|\vec{v}_a| E_{\vec{p}_a} m_b/c$, wobei \vec{v}_a und $E_{\vec{p}_a}$ im Ruhesystem des Teilchens b gemessen werden, wird (*Møller*^(ae)-) *Flussfaktor* genannt und hiernach als \mathcal{F} bezeichnet.

In einem beliebigen Bezugssystem, in welchem die Viererimpulse der kollidieren Teilchen \mathbf{p}_a und \mathbf{p}_b sind, gilt

$$\mathcal{F} = 4\sqrt{(\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4}. \quad (\text{VII.11})$$

Diese Formel definiert offensichtlich eine Lorentz-invariante Größe.

Beweis: Da \mathcal{F} ein Lorentz-Skalar ist, muss man nur prüfen, dass der Ausdruck (VII.11) tatsächlich gleich $4|\vec{v}_a| E_{\vec{p}_a} m_b/c$ ist. Im Ruhesystem vom Teilchen b , wo $\vec{p}_b = \vec{0}$ und $E_{\vec{p}_b} = m_b c^2$ gelten, findet man sofort $\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b = E_{\vec{p}_a} m_b$ und somit

$$(\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4 = (E_{\vec{p}_a}^2 - m_a^2 c^4) m_b^2 = |\vec{p}_a|^2 c^2 m_b^2.$$

Unter Verwendung der Beziehung $\vec{v}_a = c^2 \vec{p}_a / E_{\vec{p}_a}$ ergibt sich

$$(\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4 = \frac{|\vec{v}_a|^2}{c^2} E_{\vec{p}_a}^2 m_b^2$$

d.h. $\mathcal{F} = 4|\vec{v}_a| E_{\vec{p}_a} m_b/c$. □

Ein alternativer nützlicher Ausdruck des Flussfaktors beruht auf der Mandelstam-Variablen s , Gl. (V.4). Somit kann man schreiben

$$\mathcal{F} = 2\sqrt{(s - m_a^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2} c^2. \quad (\text{VII.12})$$

Diese Formel folgt sofort aus der Gleichung

$$4(\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b)^2 = (2\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b)^2 = [(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2 - \mathbf{p}_a^2 - \mathbf{p}_b^2]^2 = (s - m_a^2 - m_b^2)^2 c^4.$$

^(ae)C. MØLLER, 1904–1980

Für die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts im nächsten Abschnitt wird es sich auch lohnen, den Ausdruck des Møller-Flussfaktors durch die kinetischen Größen im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen zu kennen. In diesem Bezugssystem findet man

$$\mathcal{F} = \frac{4(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})|\vec{p}_a|}{c} \quad \text{im Schwerpunktsystem der Teilchen } a \text{ und } b. \quad (\text{VII.13})$$

Dabei kann die Summe $E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b}$ auch durch die Schwerpunktsenergie E_{cm} ersetzt werden.

Im Schwerpunktsystem gilt $\vec{p}_b = -\vec{p}_a$, was sofort zu $\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b = E_{\vec{p}_a} E_{\vec{p}_b}/c^2 + |\vec{p}_a|^2$ führt. Somit ergibt sich $(\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b)^2 = E_{\vec{p}_a}^2 E_{\vec{p}_b}^2/c^4 + |\vec{p}_a|^4 + 2E_{\vec{p}_a} E_{\vec{p}_b} |\vec{p}_a|^2/c^2$, und unter Verwendung der Energie-Impuls-Relation $E_{\vec{p}_i}^2/c^2 = |\vec{p}_i|^2 + m_i^2 c^2$ für beide Teilchen

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4 &= 2|\vec{p}_a|^4 + |\vec{p}_a|^2 (m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2E_{\vec{p}_a} E_{\vec{p}_b}/c^2) \\ &= |\vec{p}_a|^2 (|\vec{p}_a|^2 + |\vec{p}_b|^2 + m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2E_{\vec{p}_a} E_{\vec{p}_b}/c^2) \\ &= |\vec{p}_a|^2 (E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})^2/c^2. \end{aligned} \quad \square$$

Zusammen liefern Gl. (VII.10) und (VII.11) den Ausdruck des totalen Wirkungsquerschnitts für einen Zwei-nach-zwei-Streuprozess

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{(\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4}} \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) |\mathcal{M}|^2 \frac{c \, d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c \, d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}. \quad (\text{VII.14})$$

Dieses Ergebnis kann auf den Fall des totalen Wirkungsquerschnitts für eine Streuung mit n Teilchen (gekennzeichnet $1, 2, \dots, n$) im Endzustand verallgemeinert werden. Dann gilt

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{(\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4}} C \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b\right) |\mathcal{M}|^2 \prod_{i=1}^n \frac{c \, d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}}, \quad (\text{VII.15})$$

wobei C ein ähnlicher statistischer Faktor wie bei der Zerfallsrate (VI.19) ist.

VII.2.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt in einem Zwei-nach-zwei-Prozess

Im besonderen Fall einer Zwei-nach-zwei-Streuung sind die Energien und Impulse der Streuprodukte durch die Kinematik so eingeschränkt, dass der zugehörige differentielle Wirkungsquerschnitt explizit berechnet werden kann, auch wenn die Amplitude \mathcal{M} , die durch die Dynamik bestimmt wird, unbekannt ist.

Dies lässt sich am einfachsten im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen finden, wo definitionsgemäß $\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{0}$. Unter Verwendung des Ausdrucks (VII.13) des Flussfaktors in diesem Bezugssystem wird der „unintegrierte“ Wirkungsquerschnitt — entsprechend einem Maß für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gestreuten Teilchen Impulse zwischen \vec{p}_1 und $\vec{p}_1 + d^3 \vec{p}_1$ bzw. \vec{p}_2 und $\vec{p}_2 + d^3 \vec{p}_2$ haben — gegeben durch [vgl. Gl. (VII.14)]

$$\begin{aligned} d^6 \sigma(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= \frac{\hbar^2 c}{4(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})|\vec{p}_a|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) |\mathcal{M}|^2 \frac{c \, d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c \, d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}} \\ &= \frac{\hbar^2}{64\pi^2} \frac{|\mathcal{M}|^2 c^3}{(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})|\vec{p}_a| E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_2}} \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2. \end{aligned}$$

Der $\delta^{(4)}$ -Term kann auch als $c \delta(E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} - E_{\vec{p}_a} - E_{\vec{p}_b}) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ geschrieben werden, wobei die Gleichung $\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{0}$ benutzt wurde. Dann ist das Integral über \vec{p}_2 trivial und gibt

$$d^3 \sigma(\vec{p}_1) = \frac{\hbar^2}{64\pi^2} \frac{|\mathcal{M}|^2 c^2}{(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})|\vec{p}_a|} \frac{\delta(\sqrt{m_1^2 c^4 + \vec{p}_1^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + \vec{p}_1^2 c^2} - E_{\vec{p}_a} - E_{\vec{p}_b})}{\sqrt{m_1^2 c^2 + \vec{p}_1^2} \sqrt{m_2^2 c^2 + \vec{p}_1^2}} d^3 \vec{p}_1.$$

Um dieses Ergebnis weiter zu integrieren, soll die Abhängigkeit der Amplitude \mathcal{M} von den kinematischen Variablen diskutiert werden. Allgemein sollte \mathcal{M} eine Funktion der Impulse der ein- und auslaufenden Teilchen sein: $\mathcal{M}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_1, \vec{p}_2)$. Im Schwerpunktsystem, wo $\vec{p}_b = -\vec{p}_a$ und dank der Impulserhaltung $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ gelten, ist \mathcal{M} nur Funktion von \vec{p}_a und \vec{p}_1 . Dazu ist \mathcal{M} ein Lorentz-Skalar, d.h. insbesondere invariant unter Drehungen, und kann deshalb nur von den skalaren Größen \vec{p}_a^2 , \vec{p}_1^2 und $\vec{p}_a \cdot \vec{p}_1 = |\vec{p}_a| |\vec{p}_1| \cos \theta$ abhängen. Zusammenfassend ist die Amplitude \mathcal{M} für eine Zweinach-zwei-Streuung nur Funktion von $|\vec{p}_a|$, $|\vec{p}_1|$ und θ , wobei diese Größen im Schwerpunktsystem gemessen werden.

Wegen der möglichen Abhängigkeit von dem Streuwinkel θ kann die Winkelintegration nicht durchgeführt werden, im Gegensatz zum Fall des Phasenraumintegrals beim Zwei-Teilchen-Zerfall.

Für die restlichen Integrationen kann man zunächst die Substitution $d^3\vec{p}_1 \rightarrow p^2 dp d^2\Omega$, mit $\Omega \equiv (\theta, \varphi)$ und dementsprechend $d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, in die obige Formel für $d^3\sigma(\vec{p}_1)$ einsetzen. Dann ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d^2\sigma(\theta, \varphi)}{d^2\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2} \frac{c^2}{(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b}) |\vec{p}_a|} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(\sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p^2 c^2} - E_{\vec{p}_a} - E_{\vec{p}_b})}{\sqrt{m_1^2 c^2 + p^2} \sqrt{m_2^2 c^2 + p^2}} p^2 dp.$$

Weiterer Fortschritt erfolgt unter Nutzung der neuen Integrationsvariablen

$$E \equiv \sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p^2 c^2},$$

entsprechend

$$dE = \left(\frac{c^2}{\sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{m_2^2 c^4 + p^2 c^2}} \right) p dp = \frac{E}{\sqrt{m_1^2 c^2 + p^2} \sqrt{m_2^2 c^2 + p^2}} p dp,$$

sowie

$$p(E) = \frac{1}{2Ec} \sqrt{E^4 - 2E^2(m_1^2 + m_2^2)c^4 + (m_1^2 - m_2^2)^2 c^8}.$$

Die letztere Formel folgt aus einfachen Berechnungen. Zunächst gilt

$$E^2 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2p^2 c^2 + 2\sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} \sqrt{m_2^2 c^4 + p^2 c^2},$$

d.h.

$$(E^2 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4 - 2p^2 c^2)^2 = 4(m_1^2 c^4 + p^2 c^2)(m_2^2 c^4 + p^2 c^2).$$

Nach dem Ausmultiplizieren der Produkte auf beiden Seiten und dem Herauskürzen von ein paar Termen kommt

$$E^4 + m_1^4 c^8 + m_2^4 c^8 - 2E^2 m_1^2 c^4 - 2E^2 m_2^2 c^4 - 2m_1^2 m_2^2 c^8 = 4E^2 p^2 c^2,$$

woraus das Ergebnis folgt. \square

Mithilfe der Integrationsvariablen E lässt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt als

$$\frac{d^2\sigma(\theta, \varphi)}{d^2\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2} \frac{c^2}{(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b}) |\vec{p}_a|} \int_{E_{\min}}^\infty |\mathcal{M}(|\vec{p}_a|, p(E), \cos \theta)|^2 \delta(E - E_{\vec{p}_a} - E_{\vec{p}_b}) \frac{p(E)}{E} dE$$

schreiben, wobei die untere Grenze des Integrals $E_{\min} \equiv (m_1 + m_2)c^2$ ist. Damit das Argument der Delta-Funktion für einen Wert von E im Integrationsbereich verschwindet, soll $E_{\min} - E_{\vec{p}_a} - E_{\vec{p}_b} < 0$ sein. Anders gesagt soll die Schwerpunktsenergie $E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b} \equiv E_{\text{cm}}$ größer sein als die Summe der Massenenergien $(m_1 + m_2)c^2$ der auslaufenden Teilchen — was eine triviale kinematische Bedingung zur Realisierbarkeit des Prozesses ist. In diesem Fall kann die Integration leicht durchgeführt werden, und es ergibt sich

$$\frac{d^2\sigma(\theta, \varphi)}{d^2\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2} \frac{c^2}{E_{\text{cm}} |\vec{p}_a|} \frac{p(E_{\text{cm}})}{E_{\text{cm}}} |\mathcal{M}(|\vec{p}_a|, p(E_{\text{cm}}), \cos \theta)|^2.$$

Dabei stellt $p(E_{\text{cm}})$ den Wert des Impulsbetrags $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ dar, bei dem die Dirac-Distribution für die Energie-Impuls-Erhaltung realisiert wird. Somit lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Prozess $a + b \rightarrow 1 + 2$ im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen

$$\frac{d^2\sigma(\theta, \varphi)}{d^2\Omega} = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2} \frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{p}_a|} \frac{|\mathcal{M}(|\vec{p}_a|, |\vec{p}_1|, \cos\theta)|^2}{(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})^2}, \quad (\text{VII.16})$$

wobei $|\vec{p}_1|$ der durch Viererimpulserhaltung bestimmte Betrag des Impulses eines der auslaufenden Teilchen ist.

Bemerkung: Da die kinematischen Größen hier im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen angegeben sind, ist $(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})^2$ im Nenner dieser Formel gleich $s c^4$, mit s der (Lorentz-invarianten) ersten Mandelstam-Variablen.

Literatur zum Kapitel VII

- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 6.1.2 & 6.2.2.

KAPITEL VIII

Feynman-Regeln

VIII.1 Feynman-Diagramme und -Regeln 63

VIII.2 Beispiele 66

In den zwei letzten Kapiteln über Zerfälle (Kap. VI) und Streuprozesse (Kap. VII) wurden ähnliche Ausdrücke für die Größen (Zerfallsrate bzw. Wirkungsquerschnitt) hergeleitet, die die Wahrscheinlichkeit für den jeweiligen Prozess charakterisieren. Dabei treten insbesondere im Integranden eines Phasenraumintegrals sog. „Amplituden“ \mathcal{M} bzw. deren Betragsquadrate $|\mathcal{M}|^2$ auf, die ohne weitere Erklärung eingeführt wurden und von den tatsächlich aktiven Wechselwirkungen abhängen sollen.

Betrachte den Übergang, induziert durch einen Wechselwirkungsterm, zwischen einem Anfangs- und einem Endzustand, die aus beliebig vielen ein- und auslaufenden Teilchen mit bestimmten Viererimpulsen und Spins bestehen, wie z.B. in Abb. VIII.1 schematisch dargestellt wird.

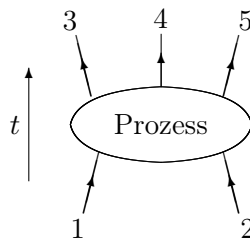


Abbildung VIII.1 – Schematische Darstellung eines Prozesses mit zwei Teilchen im Anfangszustand und drei Teilchen im Endzustand.

Zur Berechnung der Amplitude \mathcal{M} für einen solchen gegebenen quantenfeldtheoretischen Prozess wurde ein günstiger Formalismus entwickelt, der auf einer intuitiven graphischen Darstellung basiert. In diesem kurzen Kapitel werden diese sog. Feynman-Diagramme und die damit einhergehenden Feynman-Regeln ohne Beweis eingeführt.⁽³¹⁾

VIII.1 Feynman-Diagramme und -Regeln

Zu einer gegebenen Ordnung in Störungsrechnung — entsprechend der Potenz des Wechselwirkungsterms in der Reihenentwicklung des Zeitentwicklungsoperators, vgl. § VI.2.2 b — lässt sich die Amplitude \mathcal{M} als Summe von Teilamplituden schreiben. Jeder Teilamplitude kann ein *Feynman-Diagramm* zugeordnet werden, das aus drei Arten von elementaren Bausteinen besteht: solche Diagramme enthalten immer *externe Linien* mit einem freien Endpunkt und *Vertices*, wo sich drei oder mehr Linien treffen; möglicherweise gibt es auch *interne Linien*, auch *Propagatoren* genannt, zwischen zwei Vertices.

⁽³¹⁾Enttäuschte Leserinnen können sich mit dem Gedanken trösten, dass R.Feynman selbst „seine“ Regeln für quantenelektrodynamische Prozesse nicht hergeleitet, sondern genial intuitiert hat.

Als Beispiel wird in Abb. VIII.2 ein Feynman-Diagramm für den (quantenelektrodynamischen) Annihilationsprozess $e^-(\mathbf{p}_1, \sigma_1) + e^+(\mathbf{p}_2, \sigma_2) \rightarrow \gamma(\mathbf{p}_3, \lambda_3) + \gamma(\mathbf{p}_4, \lambda_4)$ abgebildet, wobei \mathbf{p}_i, σ_i bzw. λ_i die jeweiligen Viererimpulse, Helizitäten bzw. Polarisierungen der ein- und auslaufenden Teilchen sind. Dazu sind μ_3, μ_4 Lorentz-Indizes, deren Bedeutung hiernach erklärt wird.

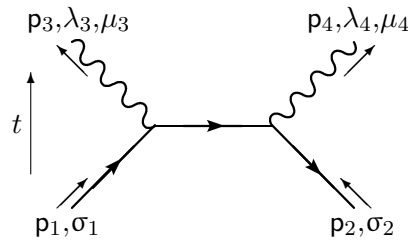


Abbildung VIII.2 – Feynman-Diagramm für Elektron-Positron-Annihilation zur führenden Ordnung.

Ein solches Diagramm darf nicht als Darstellung einer Folge von Ereignissen in der Raumzeit interpretiert werden. Insbesondere bedeutet der mit t versehene Pfeil links nur, dass die externen Linien 1 und 2 unten bzw. 3 und 4 oben für die ein- bzw. auslaufenden Teilchen stehen.

Jeder Baustein eines Feynman-Diagramms entspricht einem multiplikativen Beitrag zur Teilamplitude, gegeben durch die *Feynman-Regeln*, die jetzt formuliert werden.

① Externe Linien

Diese stellen die ein- und auslaufenden Teilchen dar, wobei der freie Endpunkt dem asymptotisch freien Anfangs- bzw. Endzustand bei $t \rightarrow -\infty$ bzw. $t \rightarrow +\infty$ entspricht. Jede solche Linie wird durch den Viererimpuls des Teilchens gekennzeichnet, sowie, im Fall von Spin- $\frac{1}{2}$ - bzw. Spin-1-Teilchen, durch die zugehörige Helizität σ bzw. Polarisation λ .

Je nach der Art des Teilchens werden verschiedene Typen von Linien benutzt, die wiederum verschiedenen Beiträgen zur Amplitude entsprechen:

$\overrightarrow{\text{p}}$
----- für ein Spin-0-Teilchen mit Viererimpuls \mathbf{p} .
Dies gibt einen Faktor 1 in der Amplitude.

$\overrightarrow{\text{p}, \sigma}$
————— für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (z.B. ein Elektron) mit Viererimpuls \mathbf{p} und Helizität σ .
Für ein einlaufendes Teilchen ist der Beitrag zur Amplitude gleich $u(\vec{\mathbf{p}}, \sigma)$;
für ein auslaufendes Teilchen ist der Beitrag zur Amplitude gleich $\bar{u}(\vec{\mathbf{p}}, \sigma)$.

$\overleftarrow{\text{p}, \sigma}$
————— für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Antiteilchen (z.B. ein Positron) mit Viererimpuls \mathbf{p} und Helizität σ .
Für ein einlaufendes Antiteilchen ist der Beitrag zur Amplitude gleich $\bar{v}(\vec{\mathbf{p}}, \sigma)$;
für ein auslaufendes Antiteilchen ist der Beitrag zur Amplitude gleich $v(\vec{\mathbf{p}}, \sigma)$.

$\overrightarrow{\text{p}, \lambda, \mu}$
~~~~~ für ein Spin-1-Teilchen (z.B. ein Photon) mit Viererimpuls  $\mathbf{p}$  und Polarisation  $\lambda$ .  
Dies gibt einen Faktor  $\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\vec{\mathbf{p}})$  in der Amplitude.

### Bemerkungen:

\* Äußere Linien stehen für on-Shell-Teilchen bzw. -Antiteilchen, so dass die Angabe des Impulses  $\vec{\mathbf{p}}$  und der Masse  $m$  — je nach der Teilchenart: Elektron, Myon, Neutrino, Photon... — die Energie und somit den Viererimpuls vollständig festlegt.

\* Der Pfeil auf den für Spin- $\frac{1}{2}$ -(Anti)Teilchen stehenden Linien gibt an, welche Teilchen und welche Antiteilchen sind: bei den Ersteren propagieren die Ladungen in die gleiche Richtung wie der Viererimpuls, bei den Letzteren propagieren sie rückwärts.

Die Linien für Spin-0- oder Spin-1-Teilchen können natürlich auch mit solchen Pfeilen versehen werden, falls die Teilchen eine erhaltene Ladung tragen. Im Fall der Bosonen des Standardmodells werden jene Pfeile traditionell nicht geschrieben.

\* In diesem Skript wurde angenommen, dass Polarisationsvektoren reell sind [vgl. Gl. (III.12)]. Man darf auch komplexwertige Polarisationsvektoren betrachten. In jenem Fall ist der Faktor in der Amplitude  $\varepsilon_{(\lambda)}^{\mu}(\vec{p})$  für ein einlaufendes Spin-1-Teilchen und  $\varepsilon_{(\lambda)}^{\mu*}(\vec{p})$  für ein auslaufendes Teilchen.

### ② Vertices

Vertices stellen die Punkte dar, wo Teilchen miteinander wechselwirken. Dabei hat man, je nach dem Wechselwirkungsterm im Hamilton-Operator, 3-Teilchen-Vertices, 4-Teilchen-Vertices, usw.

In § VI.2.2b wurde gezeigt, dass die Reihenentwicklung des quantenmechanischen Zeitentwicklungsoperators  $\hat{U}_I(t, t_0)$  nach Potenzen der Wechselwirkung Terme der Form

$$-\frac{i}{\hbar} \int g \hat{V}_I(t') dt'$$

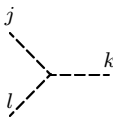
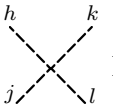
liefert. In einer quantentheoretischen Beschreibung, die auf einer Lagrange-Formulierung basiert, lauten diese Terme

$$\frac{i}{\hbar} \int \hat{\mathcal{L}}_I dt' d^3\vec{x}',$$

wobei  $\hat{\mathcal{L}}_I$  der Wechselwirkungsterm (im Wechselwirkungsbild) in der Lagrange-Dichte ist. Der Letztere ist allgemein ein Polynom in den Feldoperatoren der an der Wechselwirkung teilnehmenden Teilchen, wie z.B. für Teilchen mit Spin 0

$$\hat{\mathcal{L}}_I = g_{jkl} \hat{\phi}_j \hat{\phi}_k \hat{\phi}_l + g_{hijkl} \hat{\phi}_h \hat{\phi}_j \hat{\phi}_k \hat{\phi}_l + \dots \quad (\text{VIII.1})$$

Dann schreibt man für jeden Vertex des Feynman-Diagramms einfach einen Faktor  $ig$ , wobei die *Kopplungskonstante*  $g$  der passende Koeffizient des Polynoms ist. Im Beispiel der obigen Lagrange-Dichte (VIII.1) lautet der Beitrag zur Teilamplitude

- für jeden 3-Teilchen-Vertex  kommt ein Faktor  $ig_{jkl}$ ;
- für jeden 4-Teilchen-Vertex  kommt ein Faktor  $ig_{hijkl}$ , usw.

**Bemerkung:** Zum konstanten multiplikativen Faktor können neben der Kopplung  $g$  noch Matrizen beitragen, falls solche im Wechselwirkungsterm  $\hat{\mathcal{L}}_I$  auftauchen, wie insbesondere Dirac-Matrizen (z.B. im Fall der Quantenelektrodynamik, s. Kap. IX).

### ③ Interne Linien

Eine günstige doch schnell irreführende Interpretation einer solchen Linie ist, dass sie das Propagieren von irgendeinem (Anti)Teilchen zwischen zwei Wechselwirkungspunkten beschreiben. Jenes (Anti)Teilchen hätte dann die gleiche Masse  $m$  und die gleichen Quantenzahlen (Spin, Ladungen...) wie das entsprechende „reale“ Teilchen, das im Anfangs- oder Endzustand auftreten kann.

Dagegen hat es keinen Helizitäts- oder Polarisationszustand — in den hiernach angegebenen Propagatoren wird schon über alle Möglichkeiten summiert. Dazu trägt es einen Viererimpuls  $\mathbf{q}$ , der die Energie-Impuls-Beziehung  $\mathbf{q}^2 = m^2 c^2$  nicht erfüllen soll: es ist „off-Shell“. Somit wird das Ding, das man mit einer inneren Linie assoziiert, als *virtuelles (Anti)Teilchen* bezeichnet.

Hiernach werden die verschiedenen internen Linien je mit der zugehörigen Form des Propagators dargestellt. In jedem Fall bezeichnet  $m$  die Masse des virtuellen (Anti)Teilchens.

$$\text{---}\overset{\vec{q}}{\text{---}}\text{---} \quad (\text{Spin-0-Teilchen}) \quad \text{entspricht dem Propagator} \quad \frac{i}{q^2 - m^2 c^2}. \quad (\text{VIII.2a})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{---}\overset{\vec{q}}{\text{---}}\text{---} \quad (\text{Spin-}\frac{1}{2}\text{-Teilchen}) \quad \text{und} \\ \text{---}\overset{\vec{q}}{\text{---}}\text{---} \quad (\text{Spin-}\frac{1}{2}\text{-Antiteilchen}) \end{array} \right\} \text{entsprechen dem Propagator} \quad \frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2 c^2}. \quad (\text{VIII.2b})$$

$$\overset{\mu}{\text{---}}\overset{\vec{q}}{\text{---}}\overset{\nu}{\text{---}} \quad (\text{Spin-1-Teilchen}) \quad \text{entspricht dem Propagator} \quad \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2 - m^2 c^2}. \quad (\text{VIII.2c})$$

Alle diese Propagatoren tragen multiplikativ zur Amplitude  $\mathcal{M}$  bei.

#### ④ Energie-Impuls-Erhaltung

An jedem Vertex muss der Viererimpuls erhalten sein. Diese Bedingung schränkt die möglichen Werte der Viererimpulse von vielen internen Linien ein. Hier soll die globale Viererimpulserhaltung zwischen Anfangs- und Endzustand benutzt werden.

#### ⑤ Integration über die Viererimpulse der internen Linien

Über jedem internen Viererimpuls  $q$ , der im vorigen Schritt ④ nicht festgelegt wurde, soll jetzt mit dem Integrationsmaß  $d^4q/(2\pi)^4$  integriert werden.

**Bemerkung:** Hier erkennt man, dass die Propagatoren keine on-Shell, sondern off-Shell-Teilchen darstellen: die zeitliche Komponente  $q^0$  hängt *nicht* mit den räumlichen zusammen [vgl. Gl. (VI.21)], sondern kann alle reellen — auch negativen — Werte annehmen.

#### ⑥ Antisymmetrisierung (1)

Für jede geschlossene Fermion-Schleife eines gegebenen Feynman-Diagramms wird die Teilamplitude mit  $(-1)$  multipliziert. Dazu soll man die Spur des entsprechenden Produkts von Gamma-Matrizen — die in der Slash-Notation im Propagator (VIII.2c) verteckt sind — bilden.

#### ⑦ Gesamtphase

Das Ergebnis der Schritte ① bis ⑥ wird jetzt noch mit einem Faktor  $i$  multipliziert, was die endgültige Teilamplitude  $\mathcal{M}$  liefert. Dies hat natürlich keinen Einfluss auf  $|\mathcal{M}|^2$ , ist aber eine übliche Konvention.

Jetzt sollen alle Teilamplituden, die bis zu einer gegebenen Ordnung in den Kopplungskonstanten vorkommen, summiert werden, um die gesamte Amplitude zu erhalten. Dabei kommt ein letzter Schritt, falls es zwei identische ein- oder auslaufende Fermionen gibt:

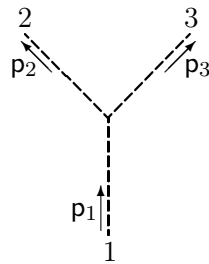
#### ⑧ Antisymmetrisierung (2)

Zwei Diagramme, die sich nur durch Austausch von zwei externen Fermionen unterscheiden, sollen nicht addiert, sondern subtrahiert werden, d.h. eines davon soll mit einem Minuszeichen versehen werden.

## VIII.2 Beispiele

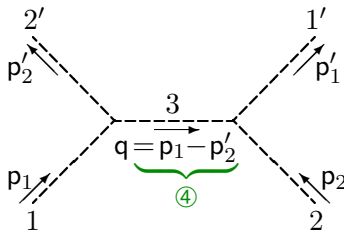
Jetzt werden drei Beispiele von Feynman-Diagrammen sowie die zugehörigen Amplituden  $\mathcal{M}$  angegeben, und zwar für den Fall einer Theorie skalarer Teilchen der Arten 1, 2 und 3 mit jeweiligen Massen  $m_1, m_2, m_3$ , die untereinander über den Term  $\hat{\mathcal{L}}_1 = -g\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3$  in der Lagrange-Dichte wechselwirken. Somit treten in dieser Theorie nur Drei-Teilchen-Vertices mit je einem Teilchen von jeder Art auf.



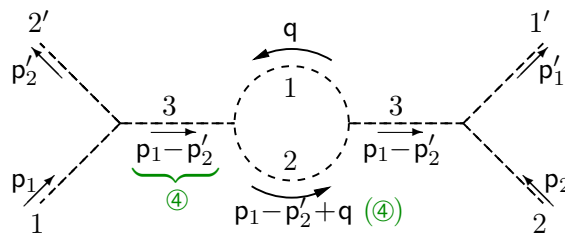
**Beispiel 1: Zerfallsprozess  $1 \rightarrow 2 + 3$** 

$$\mathcal{M} = \underbrace{(-ig)}_{\textcircled{2}} \underbrace{(i)}_{\textcircled{7}} = g$$

Hier und in den zwei folgenden Beispielen werden die aus den äußeren Linien kommenden trivialen Faktoren 1 vom Schritt ① nicht geschrieben.

**Beispiel 2: elastischer Streuprozess  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$** 

$$\mathcal{M} = \underbrace{(-ig)^2}_{\textcircled{2}} \underbrace{\frac{i}{(p_1 - p_2')^2 - m_3^2 c^2}}_{\textcircled{3} \& \textcircled{4}} \underbrace{(i)}_{\textcircled{7}} = \frac{g^2}{(p_1 - p_2')^2 - m_3^2 c^2}$$

**Beispiel 3: elastischer Streuprozess  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$** 

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \underbrace{(-ig)^4}_{\textcircled{2}} \left[ \underbrace{\frac{i}{(p_1 - p_2')^2 - m_3^2 c^2}}_{\textcircled{3} \& \textcircled{4}} \right]^2 \int \underbrace{\frac{i}{q^2 - m_1^2 c^2}}_{\textcircled{5}} \underbrace{\frac{i}{(p_1 - p_2' + q)^2 - m_2^2 c^2}}_{\textcircled{3} \& \textcircled{4}} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \underbrace{(i)}_{\textcircled{7}} \\ &= ig^4 \frac{1}{[(p_1 - p_2')^2 - m_3^2 c^2]^2} \int \frac{1}{(q^2 - m_1^2 c^2) [(p_1 - p_2' + q)^2 - m_2^2 c^2]} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \end{aligned}$$

Somit stellt dieses Feynman-Diagramm einen Beitrag der Ordnung  $\mathcal{O}(g^4)$  zur Amplitude für den Streuprozess.

**Bemerkungen:**

\* Die Anzahl der Vertices entspricht der Ordnung in Störungsrechnung der Teilamplitude unter Betrachtung. Wenn man nach der Amplitude bis zur einer gegebenen Ordnung  $k$  sucht, dann soll man nur die Diagramme mit  $k' \leq k$  Vertices zeichnen.

\* Falls es Fermionen gibt, ist die Anordnung der Beiträge der dazugehörigen Vertices und Propagatoren zu einer Teilamplitude nicht beliebig — sie involvieren nämlich Dirac-Matrizen, deren Produkt nicht kommutativ ist. Dies wird in Abschn. IX.1 am Beispiel der Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik weiter detailliert.

\* Regel ④ für die Viererimpulserhaltung an den Vertices wird manchmal anders angegeben, z.B. in Griffiths [8], Kap. 6.3: mit jedem Vertex sollte ein Faktor  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\dots)$  assoziiert werden, wobei

die Auslassungspunkte für die algebraische Summe der Viererimpulse an dem Vertex stehen, z.B.  $\dots = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2 - \mathbf{q}$  für den Vertex links im Beispiel 2 oben. Dann bleiben viel mehr interne Viererimpulse, die im Schritt ⑤ integriert werden. Nach jenem Schritt gibt es aber noch einen Faktor  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \mathbf{p}_{\text{aus}} - \sum \mathbf{p}_{\text{ein}})$  für die globale Viererimpulserhaltung zu viel, der von Hand gelöscht werden muss. Die globale Viererimpulserhaltung ist nämlich schon in der Phasenraumintegration nach den auslaufenden Impulsen berücksichtigt.

## Literatur zum Kapitel VIII

- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 6.3.

Teil C

**Wechselwirkungen der  
Elementarteilchenphysik**



Wechselwirkungen **blabla...**

**eine Einleitung fehlt...**

# KAPITEL IX

## Quantenelektrodynamik

---

|        |                                                           |    |
|--------|-----------------------------------------------------------|----|
| IX.1   | Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik                  | 73 |
| IX.2   | Grundlegende Prozesse                                     | 74 |
| IX.2.1 | Prozess erster Ordnung                                    | 74 |
| IX.2.2 | Elastische Prozesse zweiter Ordnung                       | 75 |
| IX.2.3 | Inelastische Prozesse zweiter Ordnung                     | 77 |
| IX.2.4 | Wichtige Prozesse dritter Ordnung                         | 79 |
| IX.3   | Wirkungsquerschnitt für elastische Elektron–Myon-Streuung | 79 |
| IX.3.1 | Unpolarisiertes Amplitudenbetragsquadrat                  | 79 |
| IX.3.2 | Mott- und Rutherford-Formel                               | 81 |
| IX.3.3 | Wirkungsquerschnitt bei großem Energieübertrag            | 82 |

---

Dieses Kapitel befasst sich mit einer ersten Wechselwirkung, welcher die experimentell bewiesenen Elementarteilchen unterliegen, und zwar mit der Quantenelektrodynamik (QED), die das quantenfeldtheoretische Pendant zum Elektromagnetismus darstellt.

Historisch wurde die QED auch als erste entwickelt, und zwar in den Jahren 1946–1951 durch Richard Feynman, Julian Schwinger<sup>(af)</sup> und Shin-Ichirō Tomonaga<sup>(ag)</sup>, die dafür den Nobelpreis erhalten haben, sowie F. Dyson, der die Äquivalenz der Theorien der drei ersteren gezeigt hat. Manche der wichtigen historischen Artikel werden in [14] gesammelt.

Dabei handelt es sich um die am genauesten verifizierte Theorie der Physik, dank einerseits experimentellen Messungen mit sehr geringen Messfehlern und andererseits hochpräzisen Berechnungen. Das Musterbeispiel dafür ist das magnetische Dipolmoment des Elektrons  $\mu_e$  — genauer, dessen Betrag —, gemessen in Einheiten des Bohr’schen<sup>(ah)</sup> Magnetons  $\mu_B = e\hbar/2m_e$  (in SI-Einheiten). Definiert man  $a_e \equiv |\mu_e|/\mu_B$ , so findet man experimentell [15]<sup>(32)</sup>

$$a_e^{\text{exp}} = 1,001\,159\,652\,180\,91(26)$$

und in störungsrechnerischen Berechnungen bis zur 10. Potenz der Kopplungskonstante [17]<sup>(33)</sup>

$$a_e^{\text{th}} = 1,001\,159\,652\,181\,643(764).$$

Somit stimmen Experiment und Theorie bis zur 12. Stelle nach dem Komma überein.<sup>(34)</sup>

---

<sup>(32)</sup>Dieser Mittelwert über verschiedene Experimente spiegelt meistens die Ergebnisse von [16] wider.

<sup>(33)</sup>Zur Ordnung  $\mathcal{O}(e^{10})$  tragen 12672 unterschiedliche quantenelektrodynamische Feynman-Diagramme bei. Zum Vergleich gilt zur 8. Ordnung  $a_e^{\text{th}} = 1,001\,159\,652\,182\,79(771)$  [18], mit „nur“ 891 Diagrammen der Ordnung  $\mathcal{O}(e^8)$ .

<sup>(34)</sup>Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie ist im Fall des magnetischen Dipolmoments des Myons nicht so beeindruckend:  $a_\mu^{\text{exp}} = 1,001\,165\,920\,89(63)$  einerseits [15],  $a_\mu^{\text{th}} = 1,001\,165\,918\,40(59)$  andererseits [19]. Der letztere Wert enthält aber, neben dem bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(e^{10})$  berechneten QED-Beitrag, auch einen weniger kontrollierten Beitrag aus der hadronischen Physik, der die Diskrepanz teilweise erklären könnte — und ist viel kleiner bei  $a_e^{\text{th}}$ .

---

<sup>(af)</sup>J. SCHWINGER, 1918–1994    <sup>(ag)</sup>S.-I. TOMONAGA, 1906–1979    <sup>(ah)</sup>N. BOHR, 1885–1962

In Abschn. IX.1 wird der Term für die Wechselwirkung von elektrisch geladenen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit Photonen eingeführt. Die wichtigsten daraus folgenden quantenelektrodynamischen Prozesse niedriger Ordnung werden in Abschn. IX.2 anhand deren Feynman-Diagramme vorgestellt. Dann wird in Abschn. IX.3 der totale Wirkungsquerschnitt für den einfachsten jener Prozesse berechnet.

## IX.1 Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik

Die Quantenelektrodynamik beschreibt die Wechselwirkung elektrisch geladener Teilchen bzw. der damit assoziierten Feldoperatoren mit einem masselosen Vektorfeldoperator  $\hat{A}^\mu(\mathbf{x})$ . Dabei entspricht der Letztere dem Viererpotential des klassischen elektromagnetischen Feldes, und wird als Feldoperator für *Photonen* (mit Spin 1 und Masse 0) interpretiert. Im Rahmen der Elementarteilchenphysik haben alle elektrisch geladenen Teilchen — bis auf die elektroschwachen Bosonen  $W^\pm$  — den Spin  $\frac{1}{2}$  und werden daher durch Dirac-Spinoren  $\hat{\psi}(\mathbf{x})$  beschrieben. Deshalb wird hiernach nur auf die Wechselwirkung zwischen Spinoren und Photonen eingegangen.

Betrachte zunächst nur ein Elektron oder allgemeiner ein einziges geladenes Lepton, das durch einen Dirac-Spinor-Feldoperator  $\hat{\psi}_\ell(\mathbf{x})$  beschrieben wird. Dessen Wechselwirkung mit dem Vektorpotential wird durch den folgenden Term in der Lagrange-Dichte gegeben:

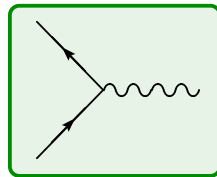
$$\hat{\mathcal{L}}_I = e\hat{\psi}_\ell(\mathbf{x})\gamma^\mu\hat{A}_\mu(\mathbf{x})\hat{\psi}_\ell(\mathbf{x}). \quad (\text{IX.1})$$

Dabei ist die Kopplungskonstante gleich der *Elementarladung*  $e$ , entsprechend dem Betrag der Elektronenladung. Statt der Letzteren benutzt man oft die *Feinstrukturkonstante*  $\alpha_{\text{em}}$ , definiert durch

$$\alpha_{\text{em}} \equiv \frac{e^2}{4\pi}. \quad (\text{IX.2})$$

Im SI-Einheitensystem gilt  $\alpha_{\text{em}} = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ . Der 2014 von CODATA empfohlene Wert, der in Prozessen mit kleinen Energieüberträgen gilt, beträgt  $\alpha_{\text{em}}^{-1} \approx 137,035\,999$  [15].

In Übereinstimmung mit der in Kap. VIII eingeführten Feynman-Regel ② entspricht der Wechselwirkungsterm (IX.1) einem einzigen Drei-Teilchen-Vertex, wo sich eine Spin-1- und zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Linien treffen:



(IX.3)

Einem solchen Vertex wird in einer Amplitude ein Faktor  $ie\gamma^\mu$  zugeordnet.

Hier sollten die Feynman-Regeln in Anwesenheit von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen präzisiert werden. Hat man in einem Feynman-Diagramm solche (Anti)Teilchen, so gibt es zwei Möglichkeiten: bei der Linie handelt es sich entweder um eine Linie, die zwei externe Linien miteinander verbindet, oder um eine innere Schleife.

Im ersten Falle muss man für die Berechnung des Beitrags zur Teilamplitude von dem Endpunkt der Linie, der ein einlaufendes Teilchen bzw. ein auslaufendes Antiteilchen darstellt, anfangen, und den entsprechenden Beitrag  $u(\vec{p}, \sigma)$  bzw.  $v(\vec{p}, \sigma)$  ganz rechts schreiben. Folgt man dann der Linie in die mit einem Pfeil gekennzeichnete Richtung des Ladungsstroms weiter, so trifft man aufeinander folgende Vertices und innere Linien: die zugehörigen Vertexfaktoren (IX.3) (im Falle von QED-Vertices) und Propagatoren (VIII.2b) müssen von rechts nach links geschrieben werden. Schlussendlich kommt ganz links der Beitrag für den zweiten Endpunkt der Linie, d.h. für ein auslaufendes Teilchen bzw. ein einlaufendes Antiteilchen, entsprechend einem Faktor  $\bar{u}(\vec{p}', \sigma')$  bzw.  $\bar{v}(\vec{p}', \sigma')$ .

Im Falle einer inneren Fermion-Schleife kann man von einem beliebigen Vertex anfangen, dann entgegen der Pfeilrichtung für den Ladungsstrom die sukzessiven Vertexfaktoren und Propagatoren von links nach rechts schreiben. Am Ende bildet man die Spur (vgl. Regel ©), deren Zyklizität die freie Wahl des Anfangsvertex ermöglicht.

Bisher wurde nur die Wechselwirkung zwischen einer einzigen Art von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen und dem Photon betrachtet. Sei jetzt eine Theorie mit mehreren elektrisch geladenen Fermionen, die hiernach mit einem Index  $j$  gekennzeichnet werden, mit jeweiligen elektrischen Ladungen  $Q_j$  (in Einheiten von  $e$ ) und Feldoperatoren  $\hat{\psi}_j(x)$ . Dann lautet der QED-Wechselwirkungsterm in der Lagrange-Dichte

$$\hat{\mathcal{L}}_I = - \sum_j Q_j e \hat{\psi}_j(x) \gamma^\mu \hat{A}_\mu(x) \hat{\psi}_j(x). \quad (\text{IX.4})$$

Im Fall  $Q_j = -1$ , wie z.B. für das Elektron oder das Myon, findet man den Term (IX.1) wieder.

Entsprechend jedem Summanden in Gl. (IX.4) kann man für jede Teilchenart  $j$  einen Drei-Teilchen-Vertex des Typs (IX.3) zeichnen, dem der Vertexfaktor  $-iQ_j e \gamma^\mu$  zugeordnet ist.

### Bemerkungen:

\* Der Wechselwirkungsterm  $\hat{\mathcal{L}}_I$  in Gl. (IX.1) oder (IX.4) ist ein Lorentz-invariantes komplexwertiges Funktional der Feldoperatoren, auch wenn die Letzteren nicht Lorentz-invariant sind.

Man kann nämlich zeigen, dass sich die vier Komponenten  $\mu = 0, 1, 2, 3$  des Produkts  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  für einen beliebigen Dirac-Spinor  $\psi$  unter Lorentz-Transformationen verhalten, wie solche eines (kontravarianten) Vierervektors.

\* An einem quantenelektrodynamischen Vertex bleibt die Art des beteiligten Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens unverändert. Dies wird bei der schwachen Wechselwirkung nicht mehr der Fall sein.

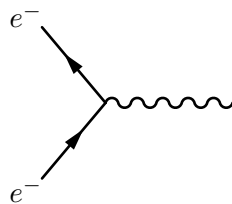
\* In der skalaren Elektrodynamik, die die Wechselwirkung zwischen Photonen und elektrisch geladenen Spin-0-Teilchen (wie z.B. Pionen  $\pi^\pm$ ) beschreibt, gibt es zwei Vertices, statt nur einen.

## IX.2 Grundlegende Prozesse

Die ganzen Prozesse der Quantenelektrodynamik beruhen auf dem einfachen Term (IX.4) bzw. auf dem elementaren Vertex (IX.3), wobei das propagierende Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen eines der Elementarteilchen des Standard-Modells ist. In diesem Abschnitt werden die Feynman-Diagramme für die einfachsten dieser Prozesse dargestellt.

### IX.2.1 Prozess erster Ordnung

Die Wechselwirkung zwischen einem Photon, das einem magnetischen Feld entspricht, und einem Elektron, hängt vom magnetischen Dipolmoment des Elektrons ab. Zur niedrigsten Ordnung wird der Prozess durch das Feynman-Diagramm der Abb. IX.1 beschrieben.



**Abbildung IX.1** – Feynman-Diagramm für das magnetische Dipolmoment zur Ordnung  $\mathcal{O}(e)$ .

Zu dieser Ordnung gilt  $|\mu_e| = \mu_B \propto e$ .



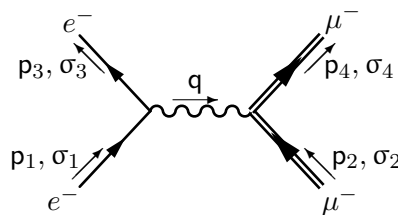
## IX.2.2 Elastische Prozesse zweiter Ordnung

Mit zwei Vertices findet man mehr Prozesse, insbesondere verschiedene elastische Streuprozesse.

### IX.2.2a Elektron–Myon-Streuung

Das einfachste Beispiel davon ist der Streuprozess  $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$  mit zwei verschiedenen Teilchenarten im Anfangszustand — und folglich im Endzustand. Der Klarheit halber wird hier das Myon mit einer doppelten Linien bezeichnet, um den Unterschied mit dem Elektron zu betonen.

Das einzige mögliche Feynman-Diagramm in der QED mit einem Elektron und einem Myon im Anfangs- und im Endzustand und nur zwei Vertizes wird in Abb. IX.2 dargestellt. Es besteht aus zwei elementaren Vertizes, und zwar einem für die Elektron-Photon-Wechselwirkung und einem für die Myon-Photon-Wechselwirkung.



**Abbildung IX.2** – Feynman-Diagramm für Elektron–Myon-Streuung zur führenden Ordnung.

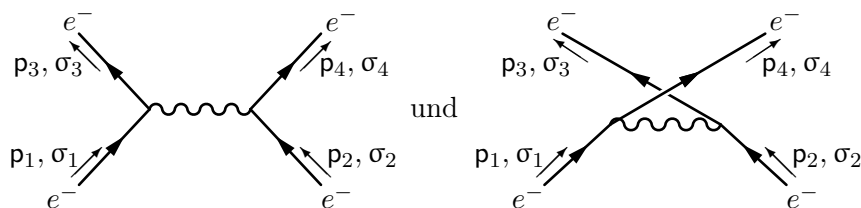
Die Amplitude, die diesem Diagramm entspricht, wird in Abschn. IX.3 gegeben [Gl. (IX.6)] und dort benutzt, um den zugehörigen Wirkungsquerschnitt zu berechnen.

In diesem Prozess kann das Myon durch irgendein anderes elektrisch geladenes Teilchen  $j$  bis auf ein Elektron ersetzt werden. In allen Fällen gilt dann  $m_j > m_e$ . Im Grenzfall  $m_j \rightarrow \infty$ , was physikalisch für  $m_j \gg m_e$  relevant ist, wird der Prozess als *Mott<sup>(ai)</sup>-Streuung* bezeichnet — und der differentielle Wirkungsquerschnitt wird unabhängig von der Masse des schweren Teilchens.

Hat das einfallende Elektron dazu eine geringe relative Geschwindigkeit  $v_e \rightarrow 0$ , so spricht man von *Rutherford<sup>(aj)</sup>-Streuung* in Anlehnung am ursprünglichen Rutherford-Streuexperiment<sup>(35)</sup> an schwere Atomkerne.

### IX.2.2b Elektron–Elektron-Streuung

Wenn die zwei Teilchen im Anfangszustand identisch sind, als z.B. im Falle des Streuprozesses  $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ , spricht man von *Møller-Streuung*. Aufgrund der Ununterscheidbarkeit der auslaufenden Teilchen sollen dann zwei Diagramme betrachtet werden.



**Abbildung IX.3** – Feynman-Diagramme für Møller-Streuung zur führenden Ordnung.

Dabei unterscheiden sich die Diagramme daran, dass in dem einen das einlaufende Elektron mit Viererimpuls  $p_1$  nach der Streuung den Viererimpuls  $p_3$  hat (links), während es im anderen Fall mit dem Viererimpuls  $p_4$  ausläuft (rechts). Somit folgt die Teilamplitude für das Diagramm rechts aus der Amplitude für das linke Diagramm nach Austausch von  $p_3$  und  $\sigma_3$  gegen  $p_4$  und  $\sigma_4$ . Aufgrund

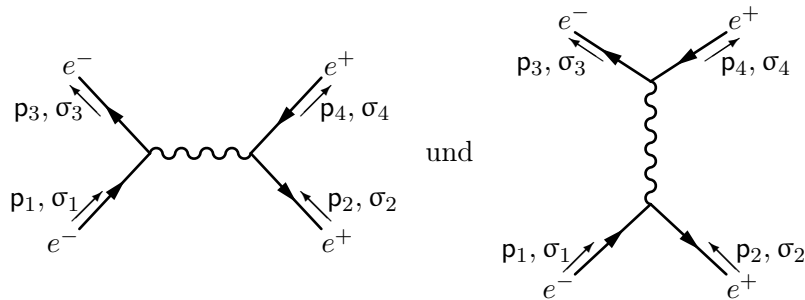
<sup>(35)</sup> ... eigentlich durchgeführt durch Geiger<sup>(ak)</sup> & Marsden<sup>(al)</sup> mit Spin-0-Projektileilchen ( $\alpha$ -Teilchen), statt Spin- $\frac{1}{2}$  wie hier. ...

<sup>(ai)</sup>N. F. MOTT, 1905–1996   <sup>(aj)</sup>E. RUTHERFORD, 1871–1937   <sup>(al)</sup>H. GEIGER, 1882–1945   <sup>(al)</sup>E. MARSDEN, 1889–1970

der Regel ⑧ muss eine der Teilamplituden mit  $(-1)$  multipliziert werden, bevor die beiden addiert werden.

### IX.2.2c Elektron–Positron–Streuung

Der letzte elastische Streuprozess zwischen zwei Fermionen ist die Streuung eines Teilchens mit dem zugehörigen Antiteilchen, z.B. die *Bhabha*<sup>(am)</sup>-Streuung  $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ . Zur Ordnung  $e^2$  tragen die zwei in Abb. IX.4 dargestellten Feynman-Diagramme bei.

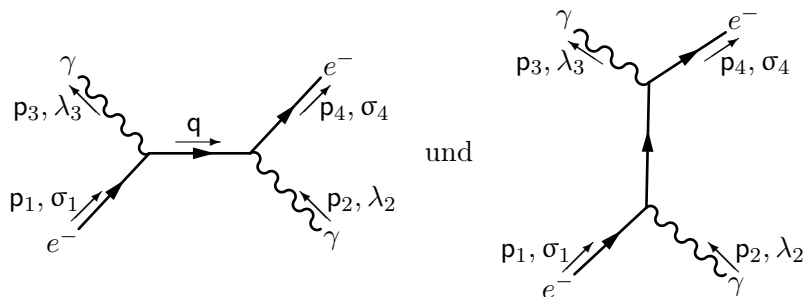


**Abbildung IX.4** – Feynman-Diagramme für Bhabha-Streuung zur führenden Ordnung.

Betrachtet man diese zwei Diagramme, so sieht man, dass das zweite sich aus dem ersten erhalten lässt durch den Austausch des mit 3 gekennzeichneten auslaufenden Elektrons mit dem mit 2 gekennzeichneten einlaufenden Positron. Somit soll hier auch eine der Teilamplituden von der anderen subtrahiert werden.

### IX.2.2d Elektron–Photon–Streuung

Schließlich bleibt noch ein elastischer Prozess der Ordnung  $e^2$  übrig, und zwar die *Compton*<sup>(an)</sup>-Streuung  $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ . es gibt wieder zwei mögliche Feynman-Diagramme, die in Abb. IX.5 dargestellt werden.



**Abbildung IX.5** – Feynman-Diagramme für Compton-Streuung zur führenden Ordnung.

Für die zugehörigen Amplituden spielt die oben angegebene Regel für die Anordnung der Vertices und Propagatoren entlang einer Fermion-Linie eine Rolle. Beispielsweise lautet die Amplitude des linken Diagramms

$$\mathcal{M} = i \varepsilon_{(\lambda_2)}^\mu(\vec{p}_2) \bar{u}(\vec{p}_4, \sigma_4) (ie\gamma_\mu) \frac{i(\not{p}_1 - \not{p}_3 + m_e)}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 - m_e^2} (ie\gamma_\nu) u(\vec{p}_1, \sigma_1) \varepsilon_{(\lambda_3)}^\nu(\vec{p}_3)$$

wobei der Viererimpuls  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$  getragen durch die innere Elektron-Linie — mit der Masse  $m_e$  im Propagator — aus der Viererimpulserhaltung (Regel ④) folgt. Unter Verwendung der kürzeren Notationen  $u(i) \equiv u(\vec{p}_i, \sigma_i)$ ,  $\varepsilon^\mu(j) \equiv \varepsilon_{(\lambda_j)}^\mu(\vec{p}_j)$  lässt sich diese Teilamplitude schreiben als

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u}(4) \not{\varepsilon}(2) \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3 + m_e}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 - m_e^2} \not{\varepsilon}(3) u(1).$$

Die Teilamplitude für das Diagramm rechts erfolgt durch Ersetzen von  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$  durch  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  und Austauschen von  $\not{\varepsilon}(2)$  mit  $\not{\varepsilon}(3)$ .

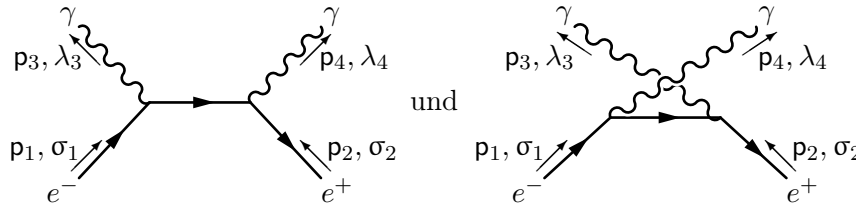
<sup>(am)</sup>H. J. BHABHA, 1909–1966    <sup>(an)</sup>A. COMPTON, 1892–1962

### IX.2.3 Inelastische Prozesse zweiter Ordnung

Jetzt werden ein paar wichtige inelastische Prozesse der Ordnung  $\mathcal{O}(e^2)$  dargestellt.

#### IX.2.3 a Paarvernichtung

Ein erster wichtiger Prozess zweiter Ordnung ist die Vernichtung eines Elektron–Positron-Paars in zwei on-Shell-Photonen  $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ . Aufgrund der Anwesenheit zweier identischer Teilchen im Endzustand gibt es zwei Feynman-Diagramme, die sich durch den Austausch der Labels der Photonen unterscheiden und in Abb. IX.6 gezeigt sind. Da die zwischen diesen Diagrammen ausgetauschten Linien Bosonen (und zwar Photonen) darstellen, sollen die zugehörigen Teilamplituden einfach addiert werden.



**Abbildung IX.6** – Feynman-Diagramme für Elektron–Positron-Annihilation zur führenden Ordnung.

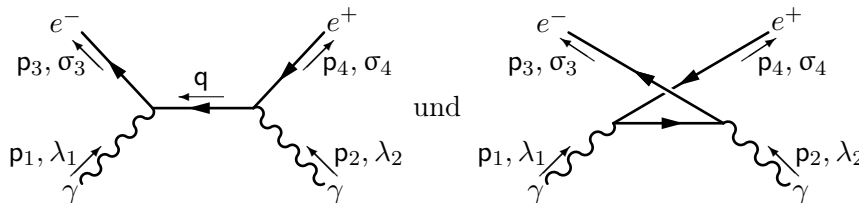
Man findet, dass die Teilamplitude für das Diagramm links durch

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{v}(2) \not{\epsilon}(4) \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3 + m_e}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 - m_e^2} \not{\epsilon}(3) u(1)$$

gegeben wird, sehr ähnlich der Teilamplitude für das Diagramm links in Abb. IX.5

#### IX.2.3 b Paarerzeugung

Tauscht man die Rollen der ein- und auslaufenden Teilchen im letzteren Prozess, so erhält man statt Elektron-Paarvernichtung die Paarerzeugung  $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$ . Hier auch tragen zwei Feynman-Diagramme zur Ordnung  $\mathcal{O}(e^2)$  bei, vgl. Abb. IX.7.



**Abbildung IX.7** – Feynman-Diagramme für Paarerzeugung zur führenden Ordnung.

Für das Diagramm links gibt die Viererimpulserhaltung  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ , so dass die zugehörige Teilamplitude lautet

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u}(3) \not{\epsilon}(1) \frac{\not{p}_3 - \not{p}_1 + m_e}{(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)^2 - m_e^2} \not{\epsilon}(2) v(4).$$

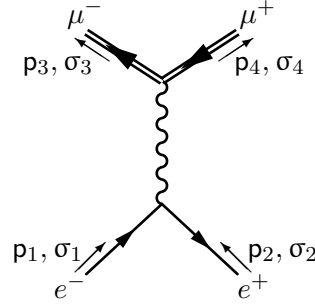
#### Bemerkungen:

\* Da die Amplitude eine komplexe Zahl ist, sind hermitesche Konjugation und komplexe Konjugation bei ihr äquivalent:  $\mathcal{M}^\dagger = \mathcal{M}^*$ . Berechnet man dann  $\mathcal{M}^\dagger$  unter Verwendung der Beziehung  $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^\mu(\gamma^0)^\dagger$  [Gl. (IV.11)], und tauscht man am Ende die Labels 1 gegen 3 und 2 gegen 4, so findet man, dass die komplex-konjugierte Amplitude  $\mathcal{M}^*$  des linken Diagramms in Abb. IX.7 gleich der Amplitude für das linke Diagramm von Abb. IX.6 ist, d.h. für den zeitumgekehrten Prozess.

\* Kinematisch ist Paarerzeugung nicht immer möglich! Um ein Elektron–Positron-Paar erzeugen zu können, muss die Energie im Schwerpunktsystem der einlaufenden Photonen größer als zweimal die Elektronenmasse (mal  $c^2$ ) sein. Dagegen kann Paarvernichtung immer stattfinden.

### IX.2.3c Myon-Paarerzeugung in Elektron-Positron-Streuung

Der Stoß eines Elektrons an einem Positron kann nicht nur entweder elastisch sein (Abb. IX.4) oder zu deren Vernichtung in zwei Photonen führen (Abb. IX.6), sondern kann noch weitere Endzustände ergeben, auch zur niedrigsten Ordnung  $\mathcal{O}(e^2)$ . Wenn die Energie im Schwerpunktsystem der einlaufenden  $e^-$  und  $e^+$  groß genug ist, kann im Endzustand ein Teilchen-Antiteilchen-Paar entstehen, wie z.B. ein Myon-Antimyon-Paar:  $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ . Das Feynman-Diagramm für diesen Prozess zur Ordnung  $\mathcal{O}(e^2)$  wird in Abb. IX.8 dargestellt.



**Abbildung IX.8** – Feynman-Diagramm für Myon-Paarerzeugung zur führenden Ordnung.

Die zugehörige Amplitude lautet

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(\vec{p}_2, \sigma_2) \gamma_\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1)] [\bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\mu v(\vec{p}_4, \sigma_4)].$$

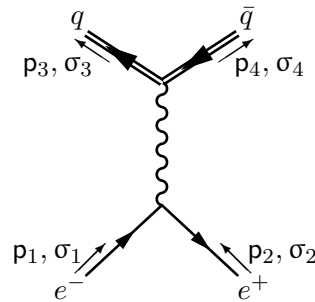
Unter Verwendung der in Abschn. IX.3 dargestellten Methoden kann man den entsprechenden differentiellen Wirkungsquerschnitt berechnen, sowie den totalen Wirkungsquerschnitt. Für den Fall, wo die Helizitätszustände der ein- und auslaufenden Teilchen unbekannt sind, gilt zur niedrigsten Ordnung

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{s} \sqrt{\frac{1 - 4m_\mu^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{s}\right) \left(1 + \frac{2m_e^2}{s}\right), \quad (\text{IX.5})$$

wobei  $s$  das Quadrat der Schwerpunktsenergie ist. Dabei erkennt man, dass die Letztere größer als  $2m_\mu$  sein muss, damit die Wurzel positiv ist.

### IX.2.3d Quark-Antiquark-Paarerzeugung in Elektron-Positron-Streuung

Eine andere Möglichkeit ist, dass die Vernichtung eines Elektron-Positron-Paars zur Erzeugung eines Quark-Antiquark-Paars führt, entsprechend dem in Abb. IX.9 dargestellten Feynman-Diagramm.



**Abbildung IX.9** – Feynman-Diagramm für Quark-Antiquark-Paarerzeugung zur führenden Ordnung.

Sei  $Q_q$  die elektrische Ladung des erzeugten Quarks in Einheiten von  $e$  —  $Q_q = \frac{2}{3}$  für  $u, c$  und  $t$ -Quarks, oder  $-\frac{1}{3}$  für  $d, s$  und  $b$ -Quarks. Die Amplitude für den Prozess zur Ordnung  $\mathcal{O}(e^2)$  lautet

$$\mathcal{M} = \frac{Q_q e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(\vec{p}_2, \sigma_2) \gamma_\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1)] [\bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\mu v(\vec{p}_4, \sigma_4)].$$

gegeben. Diese Amplitude ist natürlich sehr ähnlich jener für den Prozess  $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ , bis auf den Faktor  $-Q_q$  — dazu unterscheiden sich auch die Spinoren für die auslaufenden Teilchen, in denen die Teilchenmasse eine Rolle spielt.

### IX.2.4 Wichtige Prozesse dritter Ordnung

Zur Ordnung  $\mathcal{O}(e^3)$  kommen schon viele Prozesse bzw. Feynman-Diagramme vor. Darunter befinden sich die vier Diagramme der Abb. IX.10, die sog. *Strahlungskorrekturen* zum magnetischen Moment beschreiben.

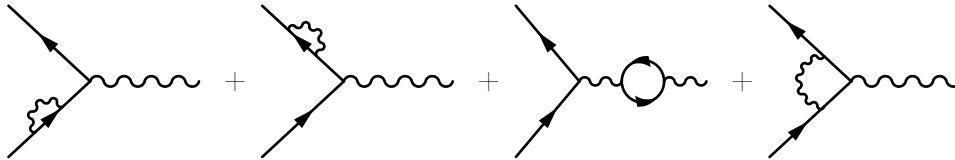


Abbildung IX.10 – Strahlungskorrekturen zum magnetischen Dipolmoment.

Die zwei ersten Diagramme können in der Definition der Masse des Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens absorbiert werden. Analog kann das dritte Diagramm in einer Neudefinition der Kopplungskonstante  $e$  der Quantenelektrodynamik angenommen werden.<sup>(36)</sup> Abgesehen von diesen *Renormierungen* bleibt das vierte Diagramm, das zu einer Änderung des magnetischen Dipolmoments führt. Man kann zeigen, dass zur Ordnung  $\mathcal{O}(e^2)$  gilt

$$|\mu_e| = \mu_B \left( 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} \right) = \mu_B \left( 1 + \frac{\alpha_{em}}{2\pi} \right) \simeq 1,001164\mu_B.$$

## IX.3 Wirkungsquerschnitt für elastische Elektron–Myon–Streuung

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Berechnung des Wirkungsquerschnitts für die in Abb. IX.2 dargestellte elastische Elektron–Myon–Streuung.

### IX.3.1 Unpolarisiertes Amplitudenbetragsquadrat

Durch Anwendung der Feynman-Regeln lautet die Amplitude für den Prozess

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= i \bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) i e \gamma^\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1) \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2} \bar{u}(\vec{p}_4, \sigma_4) i e \gamma^\nu u(\vec{p}_2, \sigma_2) \\ &= - \frac{e^2}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2} \bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1) \bar{u}(\vec{p}_4, \sigma_4) \gamma_\mu u(\vec{p}_2, \sigma_2). \end{aligned} \quad (\text{IX.6})$$

In einem echten Experiment sind die Helizitätszustände der kollidieren Teilchen selten bekannt, und jene der Streuprodukte werden auch meist nicht gemessen. Stattdessen hat jedes einlaufende Teilchen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entweder eine positive oder eine negative Helizität, so dass jede Konfiguration der Spinzustände  $\sigma_1 = \pm, \sigma_2 = \pm$  kann mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$  vorkommen.

In solchen Fällen lohnt es sich, anstatt die Wirkungsquerschnitte mit bestimmten Helizitäten herzuleiten, den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt direkt zu berechnen, was oft einfacher ist. Somit soll man zum einen über die verschiedenen möglichen Spinzustände der einlaufenden Teilchen mitteln, und zum anderen über die Spinkonfigurationen im Endzustand summieren. Dies lässt sich schon auf der Ebene der Amplitudenbetragsquadrate durchführen: anstatt das Betragsquadrat

<sup>(36)</sup>Die zwei ersten Diagramme und das vierte tragen auch individuell zur Kopplungskonstante bei, doch ihre Beiträge heben sich auf.

der Amplitude  $\mathcal{M}(\{\vec{p}_i, \sigma_i\})$  für bestimmte Werte der ein- und auslaufenden Impulse und Spins zu berechnen, betrachtet man direkt den Mittelwert

$$\langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\sigma_1=\pm} \sum_{\sigma_2=\pm} \sum_{\sigma_3=\pm} \sum_{\sigma_4=\pm} |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i, \sigma_i\})|^2. \quad (\text{IX.7})$$

Hier führt die Amplitude (IX.6) zu

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i, \sigma_i\})|^2 &= \frac{e^4}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^4} \bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1) [\bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\rho u(\vec{p}_1, \sigma_1)]^* \\ &\quad \times \bar{u}(\vec{p}_4, \sigma_4) \gamma_\mu u(\vec{p}_2, \sigma_2) [\bar{u}(\vec{p}_4, \sigma_4) \gamma_\rho u(\vec{p}_2, \sigma_2)]^*. \end{aligned}$$

Jedes Produkt  $\bar{u}(\vec{p}_i, \sigma_i) \gamma_\mu u(\vec{p}_j, \sigma_j)$  mit entweder einem kontra- oder einem kovarianten Index ist tatsächlich eine Zahl, d.h. eine  $1 \times 1$ -Matrix, die gleich deren Transponierten ist. Nach komplexer Konjugation kommt somit  $[\bar{u}(\vec{p}_i, \sigma_i) \gamma_\mu u(\vec{p}_j, \sigma_j)]^* = [\bar{u}(\vec{p}_i, \sigma_i) \gamma_\mu u(\vec{p}_j, \sigma_j)]^\dagger$ . Führt man die hermitesche Kongugation wie üblich durch, so kommt

$$[\bar{u}(\vec{p}_i, \sigma_i) \gamma_\mu u(\vec{p}_j, \sigma_j)]^\dagger = [u(\vec{p}_i, \sigma_i)^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu u(\vec{p}_j, \sigma_j)]^\dagger = u(\vec{p}_j, \sigma_j)^\dagger \gamma_0^\dagger \gamma_\mu^\dagger u(\vec{p}_i, \sigma_i).$$

Unter Verwendung der Beziehung  $\gamma_\mu^\dagger \gamma_0^\dagger = \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_\mu$  ergibt sich dann

$$[\bar{u}(\vec{p}_i, \sigma_i) \gamma_\mu u(\vec{p}_j, \sigma_j)]^* = \bar{u}(\vec{p}_j, \sigma_j) \gamma_\mu u(\vec{p}_i, \sigma_i).$$

Diese Relation kann zweimal in das Amplitudenbetragsquadrat  $|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i, \sigma_i\})|^2$  oben eingesetzt werden. Nach Mittelung über einlaufende Spinzustände und Summe über auslaufende Spinzustände erhält man somit

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^4} \sum_{\substack{\sigma_i=\pm \\ i=1,2,3,4}} \bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1) \bar{u}(\vec{p}_1, \sigma_1) \gamma^\rho u(\vec{p}_3, \sigma_3) \\ &\quad \times \bar{u}(\vec{p}_4, \sigma_4) \gamma_\mu u(\vec{p}_2, \sigma_2) \bar{u}(\vec{p}_2, \sigma_2) \gamma_\rho u(\vec{p}_4, \sigma_4). \end{aligned}$$

Für die einlaufenden Teilchen ( $i = 1, 2$ ) kann man dank der Vollständigkeitsrelation (IV.33a) die Summe über  $\sigma_i$  von  $u(\vec{p}_i, \sigma_i) \bar{u}(\vec{p}_i, \sigma_i)$  durch  $\not{p}_i + m_i \mathbf{1}_4$  ersetzen, und zwar mit  $m_1 = m_e$  und  $m_2 = m_\mu$ :

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^4} \sum_{\sigma_3, \sigma_4=\pm} \bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e \mathbf{1}_4) \gamma^\rho u(\vec{p}_3, \sigma_3) \\ &\quad \times \bar{u}(\vec{p}_4, \sigma_4) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_\mu \mathbf{1}_4) \gamma_\rho u(\vec{p}_4, \sigma_4). \quad (\text{IX.8}) \end{aligned}$$

Für jede beliebige  $4 \times 4$ -Matrix  $M$  ist das Produkt  $\bar{u}(\vec{p}, \sigma) M u(\vec{p}, \sigma)$  eine  $1 \times 1$ -Matrix, d.h. eine Zahl die Gleichung. Indem man die Matrix- und Spinorkomponenten schreibt, lautet das Produkt

$$\bar{u}(\vec{p}, \sigma) M u(\vec{p}, \sigma) = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \bar{u}(\vec{p}, \sigma)_\alpha M_{\alpha\beta} u(\vec{p}, \sigma)_\beta = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 M_{\alpha\beta} u(\vec{p}, \sigma)_\beta \bar{u}(\vec{p}, \sigma)_\alpha.$$

Dabei ist  $u(\vec{p}, \sigma)_\beta \bar{u}(\vec{p}, \sigma)_\alpha$  das Matrixelement  $(\beta, \alpha)$  der Matrix  $u(\vec{p}, \sigma) \bar{u}(\vec{p}, \sigma)$ . Nach Summieren über  $\sigma$  findet man dann mithilfe der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\sigma=\pm} \bar{u}(\vec{p}, \sigma) M u(\vec{p}, \sigma) = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 M_{\alpha\beta} \left[ \sum_{\sigma=\pm} u(\vec{p}, \sigma)_\beta \bar{u}(\vec{p}, \sigma)_\alpha \right] = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 M_{\alpha\beta} (\not{p} + m \mathbf{1}_4)_{\beta\alpha},$$

d.h. <sup>(37)</sup>

$$\sum_{\sigma=\pm} \bar{u}(\vec{p}, \sigma) M u(\vec{p}, \sigma) = \text{Tr}[M(\not{p} + m\mathbb{1}_4)]. \quad (\text{IX.9})$$

Unter Verwendung dieser Formel mit  $M = \gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e\mathbb{1}_4)\gamma^\rho$  bzw.  $M = \gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu\mathbb{1}_4)\gamma_\rho$  wird die Summe über  $\sigma_3$  bzw.  $\sigma_4$  in Gl. (IX.8) trivial. Insgesamt ergibt sich

$$\langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \rangle = \frac{e^4}{4(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e\mathbb{1}_4)\gamma^\rho(\not{p}_3 + m_e\mathbb{1}_4)] \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu\mathbb{1}_4)\gamma_\rho(\not{p}_4 + m_\mu\mathbb{1}_4)].$$

In der ersten Spur treten nur Größen auf, die das Elektron charakterisieren: dessen Masse und ein- und auslaufende Viererimpulse. Dagegen hängt die zweite Spur nur von dem Myon ab. Zudem ist der Ausdruck des gemittelten Amplitudenquadrats jetzt frei von Dirac-Spinoren, die durch Spuren von Produkten von Gamma-Matrizen ersetzt sind. Jene lassen sich durch die Formeln (IV.8)–(IV.10) sowie die Relation  $\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})$  mit dem Produkt von vier Dirac-Matrizen ausdrücken. <sup>(38)</sup> Mit deren Hilfe erhält man z.B.

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e\mathbb{1}_4)\gamma^\rho(\not{p}_3 + m_e\mathbb{1}_4)] &= p_{1\nu}p_{3\sigma} \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) + m_e^2 \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho) \\ &= 4[p_{1\nu}p_{3\sigma}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) + m_e^2\eta^{\mu\rho}] \\ &= 4[p_1^\mu p_3^\rho + p_3^\mu p_1^\rho - (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 - m_e^2)\eta^{\mu\rho}], \end{aligned}$$

und in ähnlicher Weise  $\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu\mathbb{1}_4)\gamma_\rho(\not{p}_4 + m_\mu\mathbb{1}_4)] = 4[p_{2\mu}p_{4\rho} + p_{4\mu}p_{2\rho} - (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 - m_\mu^2)\eta_{\mu\rho}]$ . Schließlich findet man nach einigen Berechnungen

$$\langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \rangle = \frac{8e^4}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^4} [(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)(\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4) + (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3) - m_e^2(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3) - m_\mu^2(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4) + 2m_e^2 m_\mu^2]. \quad (\text{IX.10})$$

Man sieht explizit, dass dieses gemittelte Amplitudenbetragsquadrat Lorentz-invariant ist.

**Bemerkung:** Ähnlich der Beziehung (IX.11) kann man auch deren Pendant

$$\sum_{\sigma=\pm} \bar{v}(\vec{p}, \sigma) M v(\vec{p}, \sigma) = \text{Tr}[M(\not{p} - m\mathbb{1}_4)] \quad (\text{IX.11})$$

für jede beliebige  $4 \times 4$ -Matrix  $M$  beweisen.

### IX.3.2 Mott- und Rutherford-Formel

Als letzter Schritt kann der Ausdruck (IX.10) in Gl. (VII.16) eingesetzt werden, um den differentiellen Wirkungsquerschnitt für den elastischen Prozess der Abb. IX.2 zu liefern:

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} \frac{\langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \rangle}{(E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2})^2}. \quad (\text{IX.12})$$

Die Berechnung im allgemeinen Fall stellt keine Schwierigkeit dar, es lohnt sich aber, den Grenzfall der Streuung des Elektrons an einem viel schwereren Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen zu betrachten, entsprechend dem Limes  $m_\mu \rightarrow \infty$ .

In diesem Grenzfall kann man in einem ersten Schritt annehmen, dass das Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen — in dem Gl. (IX.12) gilt — mit dem Ruhesystem des „Myons“ überein-

<sup>(37)</sup> Diese Gleichung — sowie Gl. (IX.11) und zwei ähnliche Gleichungen mit gemischten Teilchen- und Antiteilchen-Spinoren — wird manchmal *Casimirs* <sup>(ao)</sup> *Trick* genannt.

<sup>(38)</sup> Weitere Identitäten für Spuren von Produkten von Gamma-Matrizen können in Lehrbüchern der Relativistischen Quantenmechanik oder der Quantenfeldtheorie gefunden werden, z.B. in Bjorken & Drell [20] Kap. 7.2 oder in Landau & Lifschitz [5] Kap. III § 22.

<sup>(ao)</sup> H. B. G. CASIMIR, 1909–2000

stimmt. Diese Näherung ist gerechtfertigt, falls die (kinetische) Energie des Elektrons viel kleiner als die Massenenergie des Myons ist. Dann kann der Rückstoß des Letzteren vernachlässigt werden, d.h. es ruht noch nach dem Stoß.<sup>(39)</sup>

Unter diesen Annahmen reduziert sich die Energieerhaltung einfach auf  $E_{\vec{p}_1} = E_{\vec{p}_3}$  und daher auf die Erhaltung der kinetischen Energie des Elektrons, was zu  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3|$  führt. Somit ist der zweite Faktor im rechten Glied der Gl. (IX.12) gleich 1. Dazu gilt  $(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 = -(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = -4|\vec{p}_1|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , wobei  $\theta$  der Streuwinkel ist.

Die sechs skalaren Produkte  $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$  in Gl. (IX.10) lassen sich auch sofort berechnen. Da das Myon immer in Ruhe bleibt, sind alle Produkte des Viererimpulses des Elektrons vor oder nach dem Stoß mit einem Viererimpuls des Myons einfach gleich  $m_\mu E_{\vec{p}_1}$ . Dann gilt  $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 = m_\mu^2$ . Schließlich kommt  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = m_e^2 + 2|\vec{p}_1|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ .

Die letzte Vereinfachung besteht in der Approximation der Schwerpunktsenergie  $E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2}$  durch  $E_{\vec{p}_2} = m_\mu$ .<sup>(40)</sup> Dann führen Gl. (IX.10) und (IX.12) zu

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} \underset{m_\mu \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{\langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \rangle}{m_\mu^2} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{1}{m_\mu^2} \frac{8e^4}{(-4|\vec{p}_1|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2} \left( 2m_\mu^2 E_{\vec{p}_1}^2 - 2m_\mu^2 |\vec{p}_1|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Unter Verwendung der Energie-Impuls-Beziehung für das einlaufende Elektron ergibt sich die sog. *Mott-Streuformel*

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} \underset{m_\mu \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{e^4}{|\vec{p}_1|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( m_e^2 + |\vec{p}_1|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{4|\vec{p}_1|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( m_e^2 + |\vec{p}_1|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{IX.13})$$

Falls das einlaufende Elektron nicht-relativistisch ist, so dass der Betrag dessen Impuls  $|\vec{p}_1|$  viel kleiner als  $m_e$  ist, lautet dieser Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} \simeq \left( \frac{\alpha_{\text{em}}}{2m_e |\vec{v}_1|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2, \quad (\text{IX.14})$$

wobei  $\vec{v}_1$  die Geschwindigkeit des einlaufenden Elektrons ist. Dies ist gerade die *Rutherford-Formel* für die Streuung eines nicht-relativistischen klassischen — d.h. insbesondere ohne Spin — geladenen Teilchens in dem Coulomb-Feld eines festen Streuzentrums.

### IX.3.3 Wirkungsquerschnitt bei großem Energieübertrag

Für das folgende Kapitel ist es interessant, einen alternativen Ausdruck des Wirkungsquerschnitts herzuleiten, der auch für großen Energien des Elektrons gilt.

Sei  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$  der Viererimpuls des virtuellen Photons, vgl. Abb. IX.2. Wegen der Viererimpulserhaltung gilt auch  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2$ . Das Quadrieren dieser Gleichungen liefert die Skalarprodukte

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = m_e^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 = m_\mu^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{2}.$$

Arbeitet man wieder im Ruhesystem des Myons vor dem Stoß, so gelten noch  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = m_\mu E_{\vec{p}_1}$  und  $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = m_\mu E_{\vec{p}_3}$ . Dabei soll aber der Rückstoß des Myons nicht mehr vernachlässigt werden, so dass  $E_{\vec{p}_1} \neq E_{\vec{p}_3}$ . Schließlich folgen aus  $\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}$  die Skalarprodukte  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 = m_\mu E_{\vec{p}_1} + \mathbf{q}^2/2$  und  $\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 = m_\mu E_{\vec{p}_3} - \mathbf{q}^2/2$ . Nach Einsetzen dieser Produkte in Gl. (IX.10) ergibt sich der exakte Ausdruck

$$\langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \rangle = \frac{8e^4}{\mathbf{q}^4} \left[ 2m_\mu^2 E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_3} + m_\mu (E_{\vec{p}_3} - E_{\vec{p}_1}) \frac{\mathbf{q}^2}{2} + (m_e^2 + m_\mu^2) \frac{\mathbf{q}^2}{2} \right].$$

<sup>(39)</sup> Dabei werden Terme von relativer Ordnung  $|\vec{p}_1|/m_\mu$  oder  $|\vec{p}_3|/m_\mu$  weggelassen, konsistent mit der Annahme.

<sup>(40)</sup> ... unter Vernachlässigung der Energie des Elektrons  $E_{\vec{p}_1} = \sqrt{m_e^2 + |\vec{p}_1|^2}$ .



Jetzt wird  $m_e^2$  gegen  $m_\mu^2$  in diesem gemittelten Betragsquadrat vernachlässigt. Dazu wird angenommen, dass das Elektron relativistisch ist, so dass dessen Massenenergie vernachlässigbar gegen dessen Energie  $E_{\vec{p}_1}$  oder  $E_{\vec{p}_3}$  ist. Diese Hypothese führt zu

$$q^2 = 2m_e^2 - 2E_{\vec{p}_1}E_{\vec{p}_3} + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 \simeq -2E_{\vec{p}_1}E_{\vec{p}_3}(1 - \cos \theta).$$

Schließlich erkennt man bei  $E_{\vec{p}_3} - E_{\vec{p}_1}$  die 0-Komponente von  $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 = -\mathbf{q}$ , was sich auch als

$$E_{\vec{p}_3} - E_{\vec{p}_1} = -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_2}{m_\mu} = -\frac{\frac{1}{2}[(\mathbf{q} + \mathbf{p}_2)^2 - q^2 - p_2^2]}{m_\mu} = \frac{q^2}{2m_\mu}$$

schreiben lässt. Diese Resultate führen schließlich nach einiger Algebra zu

$$\left\langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \right\rangle = \frac{16e^4}{q^4} m_\mu^2 E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_3} \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (\text{IX.15})$$

Dieses gemittelte Amplitudenquadrat darf nicht in den Ausdruck (VII.16) des Wirkungsquerschnitts eingesetzt werden, weil das verwendete Bezugssystem nicht das Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen ist. Stattdessen sollte man mit der unintegrierten Version von Gl. (VII.10) anfangen:

$$d^6\sigma(\vec{p}_3, \vec{p}_4) = \frac{1}{4|\vec{v}_1|E_{\vec{p}_1}m_\mu} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \left\langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \right\rangle \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_3}} \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_4}}.$$

Da das Elektron relativistisch ist, gelten  $|\vec{v}_1| \simeq 1$  sowie  $d^3\vec{p}_3 = |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| d^2\Omega \simeq E'^2 dE' d^2\Omega$  mit der Energie  $E'$  des Elektrons nach dem Stoß, d.h.

$$\begin{aligned} d^6\sigma(E', \Omega, \vec{p}_4) &= \frac{E'}{32\pi^2 E_{\vec{p}_1} m_\mu} \left\langle |\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2 \right\rangle dE' d^2\Omega \frac{d^3\vec{p}_4}{2E_{\vec{p}_4}} \delta^{(4)}(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ &= \frac{e^4}{2\pi^2 q^4} m_\mu E'^2 \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] dE' d^2\Omega \frac{d^3\vec{p}_4}{2E_{\vec{p}_4}} \delta^{(4)}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}). \end{aligned}$$

Wenn der Impuls des auslaufenden Myons nicht gemessen wird, kann man nach  $\vec{p}_4$  integrieren. Dabei gibt die Beziehung (VI.21)

$$\int \delta^{(4)}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}) \frac{d^3\vec{p}_4}{2E_{\vec{p}_4}} = \delta((\mathbf{p}_2 + \mathbf{q})^2 - m_\mu^2) = \delta(2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q} + q^2).$$

Somit ergibt sich schließlich

$$\frac{d^3\sigma}{dE' d^2\Omega} = \frac{4\alpha_{\text{em}}^2}{q^4} E'^2 \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta\left(\frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}}{m_\mu} + \frac{q^2}{2m_\mu}\right).$$

Führt man die Änderung der Energie des Elektrons  $\nu \equiv (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})/m_\mu$  ein, so lautet dies

$$\frac{d^3\sigma}{dE' d^2\Omega} = \frac{4\alpha_{\text{em}}^2}{q^4} E'^2 \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m_\mu}\right).$$

Schließlich kann  $q^4$  im Nenner des Vorfaktors noch durch  $[2EE'(1 - \cos \theta)]^2 = (4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2})^2$  ersetzt werden, wobei  $E$  die Energie des Elektrons vor dem Stoß ist. Es kommt dann

$$\frac{d^3\sigma}{dE' d^2\Omega} = \left( \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{2E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m_\mu}\right) \quad \text{mit} \quad \nu \equiv \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}}{m_\mu}. \quad (\text{IX.16})$$

Diese Form wird sich für die Diskussion der tiefinelastischen Elektron–Proton–Streuung im nächsten Kapitel (Abschn. X.2.1) als günstig erweisen.

## Literatur zum Kapitel IX

- Berger, *Elementarteilchenphysik* [21], Kap. 3.
- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 7.5–7.9.
- Halzen & Martin, *Quarks and Leptons* [22], Kap. 6.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [6], Kap. 9–11.

# KAPITEL X

## Starke Wechselwirkung

- 
- X.1 Quarkmodell 85
    - X.1.1 Eightfold Way 85
    - X.1.2 Hadronenerzeugung in Elektron–Positron-Kollisionen 90
  - X.2 Partonmodell 92
    - X.2.1 Tiefinelastische Streuung 92
    - X.2.2 Partonen 94
  - X.3 Quantenchromodynamik 96
    - X.3.1 Vertices der QCD 96
    - X.3.2 Wichtige Vorhersagen der Quantenchromodynamik 97
    - X.3.3 Symmetrien der QED und der QCD 99
- 

In diesem Kapitel wird auf eine weitere Wechselwirkung eingegangen, und zwar auf die *starke Wechselwirkung*, die ursprünglich eingeführt wurde, um die Bindungskraft zwischen Protonen und Neutronen im Atomkern zu erklären. Jene starke Wechselwirkung stellt einen krassen Gegensatz zur Quantenelektrodynamik dar, indem die unterliegende Theorie extrem kompliziert zu lösen ist, insbesondere weil Störungsrechnung für manche Phänomene fast nutzlos ist. Dazu können die heutzutage als elementar betrachteten Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen, d.h. die Quarks, nicht isoliert voneinander werden, sondern kommen sie immer innerhalb Hadronen vor.

Somit ist es zunächst interessant zu zeigen, aus welchen Überlegungen auf die Existenz der Quarks geschlossen wird. Diese Folgerung entsteht einerseits aus einer Klassifizierung der verschiedenen Hadronen nach einigen ihrer Quantenzahlen im Rahmen des *Quarkmodells* (Abschn. X.1). Andererseits deuten einige experimentelle Ergebnisse auf eine innere Struktur des Protons hin, insbesondere Daten, gewonnen in Streuexperimenten mit Elektronen an Protonen, die zum *Partonmodell* führen (Abschn. X.2). Schließlich werden in Abschn. X.3 einige Ideen der Theorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks, die als *Quantenchromodynamik* bezeichnet wird, kurz dargestellt.

### X.1 Quarkmodell

In der Klassifizierung der vielen bekannten Hadronen nach den Werten ihrer gemessenen Spin, elektrischen Ladung und Strangeness haben Gell-Mann<sup>(ap)</sup> und Ne’eman<sup>(aq)</sup> 1961 eine einfache Struktur entdeckt [23, 24], die als „Eightfold Way“ (achtfacher Weg) bezeichnet wird (§ X.1.1). Ein weiterer Schritt war in 1964 die Erklärung dieser Struktur durch die Existenz von elementaren Bausteinen in den Hadronen im Rahmen des *Quarkmodells*. Dabei muss aber die Existenz einer nicht-beobachtbaren Quantenzahl postuliert werden, die dazu führt, dass jeder Quark-Flavour in  $N_c$  unterscheidbaren Exemplaren vorkommt. Dieses Postulat führt aber zu einer experimentell testbaren Vorhersage für die Erzeugung von Hadronen in Elektron–Positron-Kollisionen (§ X.1.2), wo die Annahme bestätigt wird.

---

<sup>(ap)</sup>M. GELL-MANN, 1929–2019    <sup>(aq)</sup>J. NE’EMAN, 1925–2006

### X.1.1 Eightfold Way

Wie in Kap. I schon gesagt wurde, lassen sich die Hadronen — d.h. die Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen: einerseits die Mesonen mit einem ganzzahligen Spin, andererseits die Baryonen mit einem halbzahligen Spin — durch verschiedene Quantenzahlen charakterisieren. Insbesondere sind in Zerfalls- und Streuprozessen die elektrische Ladung  $Q$  und der (gesamte) Spin  $J$  immer erhalten; dies gilt auch für die Strangeness  $S$ , solange die schwache Wechselwirkung keine Rolle spielt. Basierend auf diesen drei Quantenzahlen kann man Regelmäßigkeiten bei den Hadronen erkennen, wie jetzt an einigen Beispielen illustriert wird.

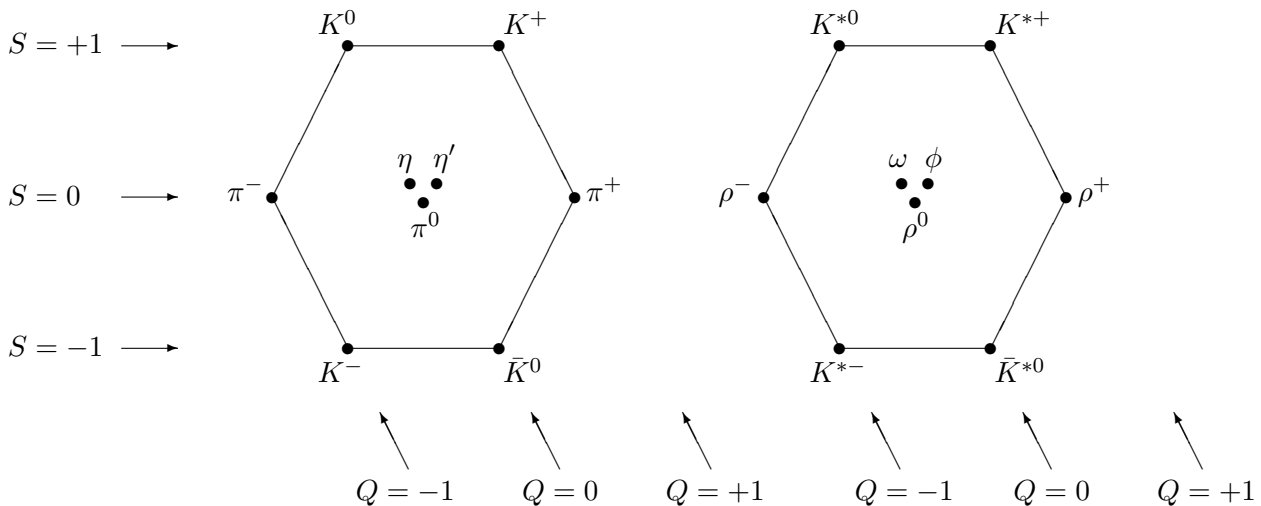
|                  | $Q$    | $S$    | $I_3$                        | Masse (MeV/ $c^2$ ) |
|------------------|--------|--------|------------------------------|---------------------|
| $\pi^0$          | 0      | 0      | 0                            | 134,98              |
| $\pi^+, \pi^-$   | +1, -1 | 0      | +1, -1                       | 139,57              |
| $K^+, K^-$       | +1, -1 | +1, -1 | $+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ | 493,68              |
| $K^0, \bar{K}^0$ | 0      | +1, -1 | $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ | 497,61              |
| $\eta$           | 0      | 0      | 0                            | 547,86              |
| $\eta'$          | 0      | 0      | 0                            | 957,8               |

**Tabelle X.1** – Quantenzahlen und Massen der leichten Mesonen mit  $J^P = 0^-$ .

|                        | $Q$    | $S$    | $I_3$                        | Masse (MeV/ $c^2$ ) |
|------------------------|--------|--------|------------------------------|---------------------|
| $\rho^0$               | 0      | 0      | 0                            | 775,3               |
| $\rho^+, \rho^-$       | +1, -1 | 0      | +1, -1                       | 775,3               |
| $\omega$               | 0      | 0      | 0                            | 782,6               |
| $K^{*+}, K^{*-}$       | +1, -1 | +1, -1 | $+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ | 891,8               |
| $K^{*0}, \bar{K}^{*0}$ | 0      | +1, -1 | $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ | 895,5               |
| $\phi$                 | 0      | 0      | 0                            | 1019,5              |

**Tabelle X.2** – Quantenzahlen und Massen der leichten Mesonen mit  $J^P = 1^-$ .

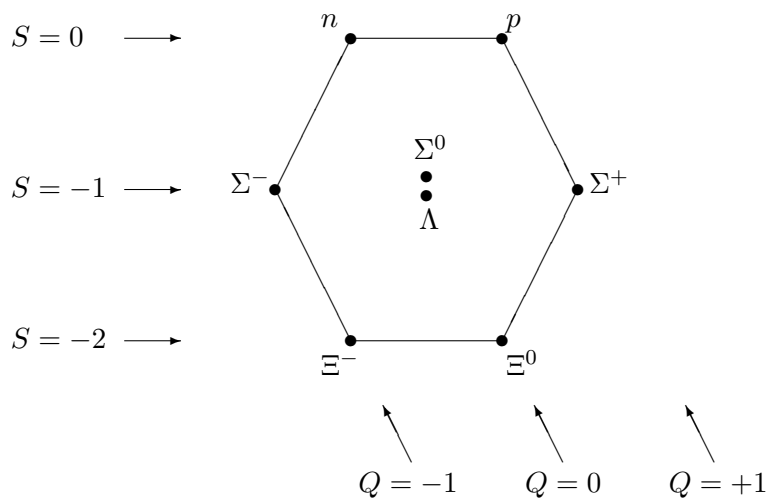
In Tab. X.1 bzw. X.2 werden einige Eigenschaften der leichtesten Mesonen mit Spin und Parität  $J^P = 0^-$  bzw.  $J^P = 1^-$  aufgelistet. Sinngemäß können diese Neunergruppen graphisch in Abhängigkeit ihren Werte von  $Q$  und  $S$  wie in Abb. X.1 dargestellt werden.



**Abbildung X.1** – Leichte Mesonen mit  $J^P = 0^-$  (links) und mit  $J^P = 1^-$  (rechts).

|            | $Q$ | $S$ | $I_3$          | Masse (MeV/ $c^2$ ) |
|------------|-----|-----|----------------|---------------------|
| $p$        | +1  | 0   | $+\frac{1}{2}$ | 938,27              |
| $n$        | 0   | 0   | $-\frac{1}{2}$ | 939,57              |
| $\Lambda$  | 0   | -1  | 0              | 1115,7              |
| $\Sigma^+$ | +1  | -1  | +1             | 1189,4              |
| $\Sigma^0$ | 0   | -1  | 0              | 1192,6              |
| $\Sigma^-$ | -1  | -1  | -1             | 1197,4              |
| $\Xi^0$    | 0   | -2  | $+\frac{1}{2}$ | 1314,9              |
| $\Xi^-$    | -1  | -2  | $-\frac{1}{2}$ | 1321,7              |

**Tabelle X.3** – Quantenzahlen und Massen der leichten Baryonen mit  $J^P = \frac{1}{2}^+$ .

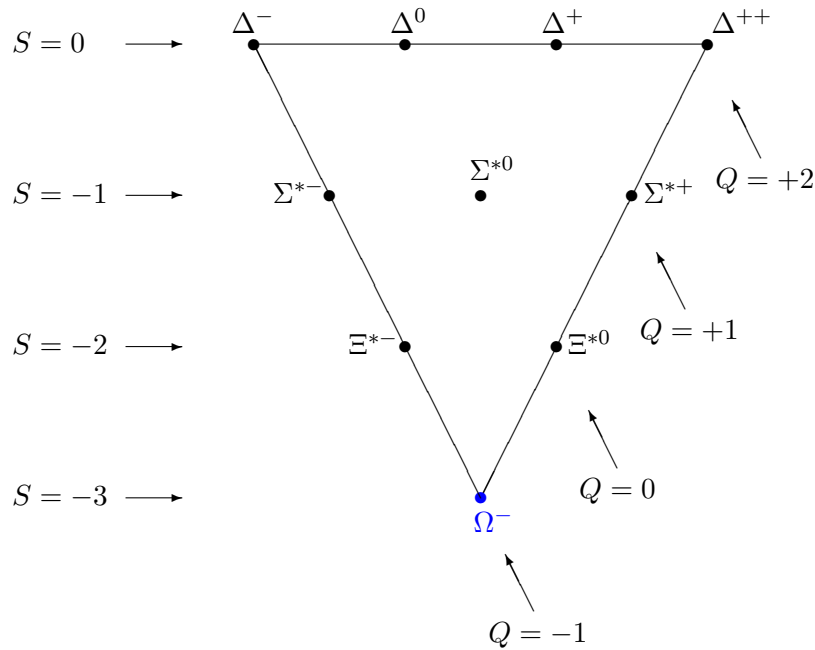


**Abbildung X.2** – Leichte Baryonen mit  $J^P = \frac{1}{2}^+$ .

Wiederum findet man bei den leichtesten Baryonen zum einen eine Achtergruppe mit  $J^P = \frac{1}{2}^+$  (Tab. X.3 und Abb. X.2) und zum anderen eine Zehnergruppe mit  $J^P = \frac{3}{2}^+$  (Tab. X.4, Abb. X.3). Weitere ähnliche Neuner- bzw. Achter- oder Zehnergruppen für die schwereren Mesonen bzw. Ba-

|               | $Q$ | $S$ | $I_3$          | Masse (MeV/ $c^2$ ) |
|---------------|-----|-----|----------------|---------------------|
| $\Delta^{++}$ | +2  | 0   | $+\frac{3}{2}$ | $\approx 1232$      |
| $\Delta^+$    | +1  | 0   | $+\frac{1}{2}$ | $\approx 1232$      |
| $\Delta^0$    | 0   | 0   | $-\frac{1}{2}$ | $\approx 1232$      |
| $\Delta^-$    | -1  | 0   | $-\frac{3}{2}$ | $\approx 1232$      |
| $\Sigma^{*+}$ | +1  | -1  | +1             | 1382,8              |
| $\Sigma^{*0}$ | 0   | -1  | 0              | 1383,7              |
| $\Sigma^{*-}$ | -1  | -1  | -1             | 1387,2              |
| $\Xi^{*0}$    | 0   | -2  | $+\frac{1}{2}$ | 1531,8              |
| $\Xi^{*-}$    | -1  | -2  | $-\frac{1}{2}$ | 1535,0              |
| $\Omega$      | -1  | -3  | 0              | 1672,4              |

**Tabelle X.4** – Eigenschaften der leichten Baryonen mit  $J^P = \frac{3}{2}^+$ .



**Abbildung X.3** – Leichte Baryonen mit  $J = \frac{3}{2}$ .

ryonen können auch gefunden werden (vgl. z.B. die nachgedruckten Artikel in Teil III der Artikelsammlung [25]).

**Bemerkung:** In Abb. X.1–X.3 (und X.4 hiernach) werden die Strangeness  $S$  (vertikal) und die elektrische Ladung  $Q$  (schräg) als Koordinaten benutzt. Anstatt  $Q$  kann man auch den Isospin  $I_3$  (vgl. § X.3.3 a) verwenden — der dann eine horizontale Koordinate darstellt.

Dazu kann man anstatt  $S$  die (*starke*) Hyperladung  $Y$  benutzen, die einfach mit  $S$  zusammenhängt:  $Y = S$  für die Mesonen der Tabellen X.1–X.2 und  $Y = S + 1$  für die Baryonen der Tabellen X.3–X.4.<sup>(41)</sup>

Bei den Teilchengruppierungen der Abb. X.1–X.3 handelt es sich auf den ersten Blick nur um bildliche Darstellungen. Sowohl Gell-Mann als auch Ne’eman haben aber auch bemerkt, dass 8, 9 oder 10 den Grad einfacher unitären Darstellungen der Gruppe  $SU(3)$  sein können. Somit gibt das Tensorprodukt zweier Darstellungen von Grad 3 (und zwar aus der Fundamentaldarstellung  $\mathbf{3}$  und deren komplex Konjugierten  $\bar{\mathbf{3}}$ ) eine Darstellung von Grad 9.<sup>(42)</sup> Wiederum kommen irreduzible Darstellungen von Grad 10 und 8 im Tensorprodukt von drei Darstellungen vom Grad 3 vor.

Der nächste Schritt, den Gell-Mann [26] und Zweig<sup>(ar)</sup> [27] als erste gemacht haben, ist die Identifikation der Fundamentaldarstellung und deren komplex Konjugierten mit Triplets von elementaren Bausteinen, aus denen die Mesonen und Baryonen bestehen. Physikalisch steht die Fundamentaldarstellung bzw. deren komplex konjugierte für drei Teilchen bzw. deren Antiteilchen, die als *Quarks* bzw. *Antiquarks* bezeichnet werden. Dann bestehen Mesonen aus einem Quark und einem Antiquark, und Baryonen aus drei Quarks.

Um die Quantenzahlen der Hadronen wiederzugeben, werden den Quarks geeignete Werte der Quantenzahlen zugeordnet. Somit haben alle Quarks den Spin  $J = \frac{1}{2}$  und die Baryonenzahl  $\mathcal{B} = +\frac{1}{3}$ . Die Werte der elektrischen Ladung  $Q$ , der Strangeness  $S$  und der Hyperladung  $Y$  für die  $u$  (up),

<sup>(41)</sup>Allgemeiner gilt  $Y = \mathcal{B} + S - \frac{1}{3}(C - B + T)$ , wobei  $\mathcal{B}$  die Baryonenzahl,  $C$  den Charm,  $B$  die Beauty und  $T$  die Topness ist, vgl. unnummerierte Gleichung in Abschn. 15.1 der Review of Particle Properties [1].

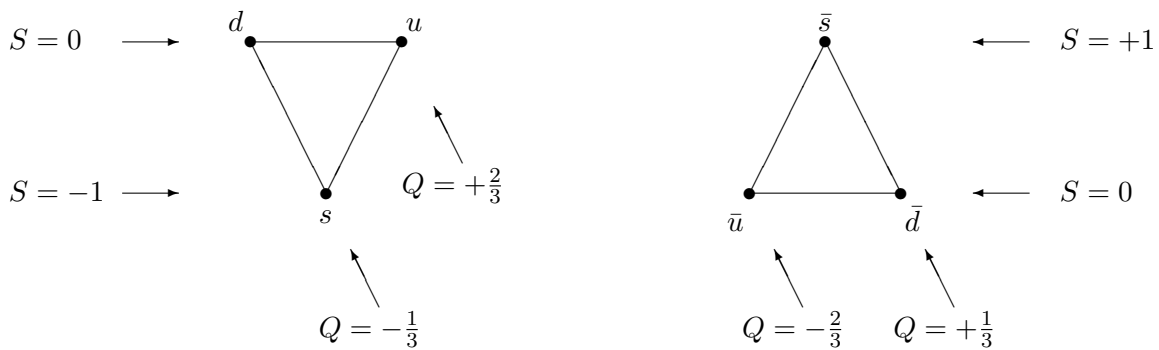
<sup>(42)</sup>Diese lässt sich dann als direkte Summe irreduzibler Darstellungen von Grad 8 und 1 schreiben,  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ , wobei die Darstellung vom Grad 1 im Fall der leichten Mesonen mit  $J^P = 0^-$  dem  $\eta'$  entspricht, das deutlich schwerer als die acht anderen Teilchen der Abb. X.1 links ist.

<sup>(ar)</sup>G. ZWEIG, 1937–

|           | $Q$            | $S$ | $I_3$          | $Y$            |
|-----------|----------------|-----|----------------|----------------|
| $u$       | $+\frac{2}{3}$ | 0   | $+\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{3}$ |
| $d$       | $-\frac{1}{3}$ | 0   | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{3}$ |
| $s$       | $-\frac{1}{3}$ | -1  | 0              | $-\frac{2}{3}$ |
| $\bar{u}$ | $-\frac{2}{3}$ | 0   | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| $\bar{d}$ | $+\frac{1}{3}$ | 0   | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| $\bar{s}$ | $+\frac{1}{3}$ | +1  | 0              | $+\frac{2}{3}$ |

**Tabelle X.5** – Quantenzahlen der leichtesten Quarks und Antiquarks.

$d$  (down) und  $s$  (strange) Quarks, aus denen die in den Tabellen X.1–X.4 aufgelisteten Hadronen bestehen, werden in Tab. X.5 angegeben und graphisch in Abb. X.4 dargestellt.



**Abbildung X.4** – Quarks und Antiquarks, aus denen die Hadronen der Abb. X.1–X.3 bestehen.

**Bemerkungen:**

\* Die obige Diskussion lässt sich auf eine größere Anzahl  $N_f$  der *Quark-Flavours* verallgemeinern: um die Hadronen mit *Charm* und solche mit *Beauty/Bottomness* zu beschreiben, führt man die  $c$  (charm) und  $b$  (bottom) Quarks mit jeweiligen elektrischen Ladungen  $Q = +\frac{2}{3}$  und  $Q = -\frac{1}{3}$  ein. Dazu kommt noch das  $t$  (top) Quark, mit der elektrischen Ladung  $Q = +\frac{2}{3}$ , mit dem aber kein bekanntes Hadron gebildet wird.

\* Für Hadronen bestehend aus  $u, d, s$  und  $c$ -Quarks kann man dreidimensionale Verallgemeinerungen der Abb. X.1–X.3 darstellen, z.B. Sechzehnergruppen von Mesonen oder Zwanzigergruppen von Baryonen (vgl. Abb. 15.1 und 15.4 der Review of Particle Properties [1]).

\* Die  $SU(3)$ -Gruppe, die zu Grunde den Überlegungen von Gell-Mann und Ne’eman lag, wird  $SU(3)$ -*Flavour-Gruppe* genannt, und oft als  $SU(3)_f$  bezeichnet.

Ein großer Erfolg des Quarkmodells war die Vorhersage eines Baryons mit  $Q = -1$  und  $S = -3$ , das in die untere Ecke in Abb. X.3 passen würde, und für welches Gell-Mann eine Masse von  $1685 \text{ MeV}/c^2$  berechnet hatte. Tatsächlich wurde ein solches Baryon, das  $\Omega^-$ , mit einer Masse von  $1672 \text{ MeV}/c^2$  bald darauf entdeckt [28].

Dennoch weist das Modell auch zwei große Probleme auf, so dass es lange nur als eine günstige mathematische Beschreibung ohne physikalische Deutung angesehen wurde. Erstens konnten isolierte Quarks nicht beobachtet werden — und wurden seitdem noch nie gesehen. Zweitens stellten ein paar Baryonen, z.B. die Ecken  $\Delta^{++} = uuu, \Delta^- = ddd$  und  $\Omega^- = sss$  des  $J = \frac{3}{2}$ -Dekupletts der Abb. X.3, anscheinend einen Widerspruch zum Pauli-Prinzip dar, da unten den drei identischen Quarks mindestens zwei den gleichen Spinzustand haben müssen — eigentlich haben sogar die drei Quarks den gleichen Spin.

Um das zweite Problem zu beseitigen wurde eine ad hoc Quantenzahl eingeführt, die *Farbe*, die in drei Varianten — „rot“, „grün“ und „blau“ — vorkommen kann und durch die Quarks getragen wird, während die Antiquarks die zugehörigen „Antifarben“ tragen. Dazu wurde postuliert, dass nur farblose Kombinationen von Quarks und Antiquarks als freie Teilchen auftreten können,<sup>(43)</sup> was das erste Problem löst — natürlich eher künstlich, da mit Hilfe eines Postulats. Unter diesen Annahmen ist die Wellenfunktion eines  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^-$  oder  $\Omega^-$  total symmetrisch unter dem Austausch der Spins oder der Orte der Quarks, hat aber einen total antisymmetrischen Farbanteil.

Gemäß der Farbhypothese gibt es also nicht nur einen, sondern  $N_c = 3$  verschiedene  $u$ -Quarks, drei  $d$ -Quarks, usw., was experimentell beobachtbar sein sollte.

### X.1.2 Hadronenerzeugung in Elektron–Positron-Kollisionen

Um die durch die Einführung der Farbquantenzahl implizierte Multiplikation der Freiheitsgrade besser in den Griff zu bekommen, kann man die Quark–Antiquark-Paarzeugung in inelastischen Elektron–Positron-Kollisionen in Betracht ziehen.

Betrachte also die Erzeugung in einem solchen Streuprozess von einem Teilchen–Antiteilchen-Paar, wobei das erzeugte Teilchen die Masse  $m$  und die elektrische Ladung  $Q$  hat. Hiernach wird  $m$  immer viel größer als die Elektronenmasse  $m_e$  sein. Zur niedrigsten Ordnung ist der Prozess rein quantenelektrodynamisch und dessen Amplitude wird durch ein einziges Feynman-Diagramm gegeben, ähnlich dem Diagramm der Abb. IX.8 (entsprechend Myon-Paarzeugung) oder der Abb. IX.9 (entsprechend Quark–Antiquark-Paarzeugung). Die zugehörige Amplitude lautet

$$\mathcal{M} = \frac{Qe^2}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2} [\bar{v}(\vec{p}_2, \sigma_2) \gamma_\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1)] [\bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\mu v(\vec{p}_4, \sigma_4)]$$

und führt zum totalen Wirkungsquerschnitt [vgl. Gl. (IX.5)]

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Teilchen–Antiteilchen-Paar}) = \frac{4\pi}{3} \frac{Q^2 \alpha_{\text{em}}^2}{s} \sqrt{\frac{1 - 4m^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right) \left(1 + \frac{2m_e^2}{s}\right),$$

mit der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  der einlaufenden Teilchen. Ist die Letztere viel größer als zweimal der Masse der auslaufenden Teilchen  $\sqrt{s} \gg 2m \gg 2m_e$ , so findet man

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Teilchen–Antiteilchen-Paar}) \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{Q^2 \alpha_{\text{em}}^2}{s}, \quad (\text{X.1})$$

wobei die weggelassenen Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(m^4/s^2)$  sind. Dabei kann man die rechte Seite der Gleichung noch mit  $\Theta(\sqrt{s} - 2m)$  multiplizieren, wobei  $\Theta$  die Heaviside-Funktion bezeichnet, um die Erzeugungsschwelle des Paares in die Formel einzubeziehen.

Jetzt kann jenes Ergebnis auf den Fall der Erzeugung eines Quark–Antiquark-Paares für ein Quark mit Flavour  $f$  und elektrischer Ladung  $Q_f$  angewandt werden. Wenn  $\sqrt{s} \gg 2m_{q_f}$  gibt Gl. (X.1) den totalen Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines  $q_f \bar{q}_f$ -Paares, wobei das Quark eine bestimmte Farbe hat, entweder rot oder grün oder blau. Um den totalen Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines Quark–Antiquark-Paares mit beliebiger Farbe zu erhalten, muss man über die  $N_c$  Farben summieren:

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow q_f + \bar{q}_f) \simeq \sum_{a=1}^{N_c} \frac{4\pi}{3} \frac{Q_f^2 \alpha_{\text{em}}^2}{s} \Theta(\sqrt{s} - 2m_{q_f}) = N_c \frac{4\pi}{3} \frac{Q_f^2 \alpha_{\text{em}}^2}{s} \Theta(\sqrt{s} - 2m_{q_f}). \quad (\text{X.2})$$

Somit hängt der Wirkungsquerschnitt von der Anzahl der Farben ab.

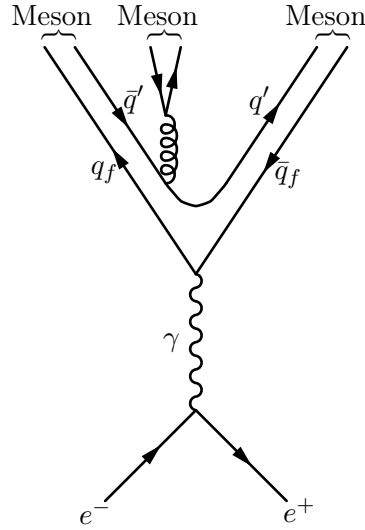
In einem Experiment werden Quarks nicht beobachtet, sondern nur Hadronen. Die Erzeugung des Quark–Antiquark-Paares  $q_f \bar{q}_f$  ist somit nur ein Zwischenschritt des komplizierteren Prozesses

$$e^- + e^+ \rightarrow q_f + \bar{q}_f \rightarrow \text{Hadronen}, \quad (\text{X.3})$$

<sup>(43)</sup>Dabei gilt die Summe gleicher Mengen von rot, grün und blau als farblos.



wie in Abb. X.5 schematisch dargestellt wird. Dann untersucht man Hadronenerzeugung, statt Quark–Antiquark-Paarerzeugung. Zur niedrigsten Ordnung in  $\alpha_{\text{em}}$  werden alle Hadronen über einen



**Abbildung X.5** – Elektron–Positron-Vernichtung in Hadronen-Jets.

solchen Prozess erzeugt. Dabei kann aber der Flavour des Quarks im Zwischenzustand beliebig sein, solange die Energie ausreicht, um das entsprechende Paar zu erzeugen. Somit ist der totale Wirkungsquerschnitt für Hadronenerzeugung die Summe über die Flavours der Wirkungsquerschnitte für  $q_f\bar{q}_f$ -Paarerzeugung. Unter Berücksichtigung der Formel (X.2) ergibt sich

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen}) \simeq N_c \sum_f \frac{4\pi Q_f^2 \alpha_{\text{em}}^2}{3s} \Theta(\sqrt{s} - 2m_{q_f}), \quad (\text{X.4})$$

wobei dieses Resultat für Energien  $\sqrt{s}$  weit von den Paar-Erzeugungsschwellen  $2m_{q_f}$  gilt.

Teilt man diesen Wirkungsquerschnitt durch jenen für Myon-Paarerzeugung, der sich auch durch Gl. (X.1) approximieren lässt, so findet man

$$R(\sqrt{s}) \equiv \frac{\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)} \simeq N_c \sum_f Q_f^2 \Theta(\sqrt{s} - 2m_{q_f}). \quad (\text{X.5})$$

Je nach dem Wert von  $\sqrt{s}$  nimmt die Summe im rechten Glied nur diskrete Werte an, die von den elektrischen Ladungen  $Q_u = Q_c = Q_t = \frac{2}{3}$  und  $Q_d = Q_s = Q_b = -\frac{1}{3}$  der Quarks abhängen. Wiederum nimmt das Verhältnis auch nur diskrete Werte an, die direkt proportional zu  $N_c$  sind:

$$R(\sqrt{s}) \simeq \begin{cases} \frac{2}{3}N_c & \text{für } 2m_s \ll \sqrt{s} \ll 2m_c \\ \frac{10}{9}N_c & \text{für } 2m_c \ll \sqrt{s} \ll 2m_b \\ \frac{11}{9}N_c & \text{für } 2m_b \ll \sqrt{s} \ll 2m_t \end{cases}$$

und  $R(\sqrt{s}) \simeq \frac{5}{3}N_c$  für  $\sqrt{s} \gg 2m_t$ .

Experimentell beobachtet man sukzessive Stufen mit  $R \approx 2$  für  $2m_s \ll \sqrt{s} \ll 2m_c$ ,  $R \approx 3,33$  für  $2m_c \ll \sqrt{s} \ll 2m_b$ , und  $R \approx 3,67$  für  $2m_b \ll \sqrt{s} \ll 2m_t$ .<sup>(44)</sup> Diese Messungen entsprechen somit einer Messung der Anzahl der Farben und liefern  $N_c = 3$ . Das heißt, dass jedes Quark mit gegebenem Flavour wirklich in drei unterschiedlichen Versionen auftreten kann, so dass die Farbhypothese bestätigt ist.

**Bemerkung:** Die Berechnung des Wirkungsquerschnitts (X.2) und damit des Verhältnisses (X.5) beruht auf der Annahme, dass die auslaufenden Quarks wechselwirkungsfreie on-Shell-Teilchen sind.

<sup>(44)</sup> Plots für den Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen})$  und das Verhältnis  $R(\sqrt{s})$  sind z.B. in der Review of Particle Properties [1] Abb. 51.2 und 51.3 zu finden.

Doch im Prozess (X.3) sind jene Quarks nur off-Shell virtuelle Teilchen. Somit soll es nicht überraschend sein, wenn das experimentelle Verhältnis  $R(\sqrt{s})$  stark von der einfachen Vorhersage (X.5) abweicht. Dies ist insbesondere der Fall für eine Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  in der Nachbarschaft der Masse eines gebundenen  $q\bar{q}$ -Zustands, d.h. wenn ein Quark und dessen Antiquark zu einem Meson verbinden können, vorausgesetzt sie miteinander (stark) wechselwirken können.

## X.2 Partonmodell

Dem Quarkmodell nach sind Hadronen, insbesondere Protonen, keine Elementarteilchen, sondern bestehen aus mehr fundamentalen Freiheitsgraden. Daher sollte das Proton eine innere Struktur besitzen, die sich experimentell nachweisen lassen sollte. Um das Innere des Protons zu untersuchen, soll die „Sonde“ eine kurze Wellenlänge bzw. eine hohe Energie haben. Dies wird in Streuexperimenten realisiert, in denen ein Lepton — insbesondere ein Elektron — an dem Proton stößt, wobei das Letztere zerstört wird (§ X.2.1). Dabei entdeckt man, dass das Proton aus punktförmigen Freiheitsgraden besteht (§ X.2.2), die sich anscheinend frei im Proton bewegen.

### X.2.1 Tiefinelastische Streuung

Historisch zeigte die Verteilung der gestreuten  $\alpha$ -Teilchen im Rutherford-Experiment, dass das Atom eine innere Struktur besitzt. In ähnlicher Weise können elektrisch geladene Leptonen an Hadronen beschleunigt werden, wobei das Lepton ein virtuelles Photon emittiert, das die Struktur des Hadrons untersucht.

Hiernach wird zuerst die Kinematik eines solchen Prozesses diskutiert. Dann wird die Parametrisierung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für das gestreute Lepton eingeführt.

#### X.2.1 a Kinematik

Betrachte die in Abb. X.6 dargestellte inelastische Streuung eines hochenergetischen Elektrons mit Viererimpuls  $k \equiv (E, \vec{k})$  an einem Proton mit Viererimpuls  $P$ . Dabei sind  $k$  und  $P$  durch die experimentellen Bedingungen bestimmt, und deshalb bekannt.

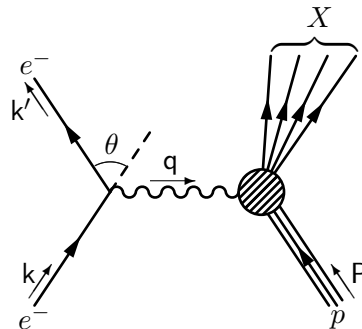


Abbildung X.6 – Kinematik der tiefinelastischen Streuung eines Elektrons an einem Proton.

Nach dem Stoß interessiert man sich nur für das gestreute Elektron und dessen kinematischen Größen. Dagegen wird der Rest — die aus der Zerstörung des Protons stammenden Hadronen — nicht weiter identifiziert. Dieser inklusive inelastische Prozess wird in der Form

$$e^- + p \rightarrow e^- + X \quad (\text{X.6})$$

geschrieben. Sei  $k' \equiv (E', \vec{k}')$  der Viererimpuls des Elektrons nach dem Stoß und  $q \equiv k - k'$  der Viererimpuls des virtuellen Photons.

Da alles über  $X$  unbekannt ist — bis auf den gesamten Viererimpuls  $P + q$ , der aus Energie-Impuls-Erhaltung folgt —, bleiben für die kinematischen Größen des Elektrons nach dem Stoß mehr unabhängige Freiheitsgrade, als im Fall elastischer Streuung. Somit sind drei unabhängige kinematische Variablen nötig — z.B. die Energie  $E'$  nach dem Stoß, der Streuwinkel  $\theta$ , und noch ein

anderer Winkel, der bei unpolarisierter Streuung keine Rolle spielt und daher hiernach weggelassen wird — um den auslaufenden Viererimpuls vollständig zu charakterisieren.<sup>(45)</sup>

Sowohl  $E'$  als auch  $\theta$  hängen vom Bezugssystem ab. In theoretischen Überlegungen benutzt man eher die Lorentz-invarianten Größen

$$Q_E^2 \equiv -\mathbf{q}^2, \quad \nu \equiv \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}}{m_p} \quad (\text{X.7a})$$

mit der Protonenmasse  $m_p$ . Die zweite Größe — die eigentlich den Energieverlust  $E - E'$  des Elektrons im Ruhesystem des Protons misst — kann äquivalent durch die *Bjorken*<sup>(as)</sup>- $x$  Variable

$$x_{\text{Bj}} \equiv \frac{Q_E^2}{2m_p\nu} = \frac{Q_E^2}{2\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}} \quad (\text{X.7b})$$

ersetzt werden. Dabei ist der Zusammenhang zwischen den Variablenpaaren  $(E', \theta)$  und  $(Q_E^2, \nu)$  eindeutig.

### Bemerkungen:

\* Man kann zeigen, dass  $Q_E^2$  und  $\nu$  positiv sind, und dass  $0 \leq x_{\text{Bj}} \leq 1$ .

\*  $Q_E^2$  wird *Virtualität* des virtuellen Photons genannt.

### X.2.1 b Bjorken-Skalenverhalten

Für hohe Energien  $E \gg m_e$  parametrisiert man den unpolarisierten differentiellen Wirkungsquerschnitt für das gestreute Elektron als

$$\frac{d^3\sigma}{dE' d^2\Omega} = \left( \frac{\alpha_{\text{em}}}{2E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left[ W_2(\nu, Q_E^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, Q_E^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (\text{X.8})$$

$W_1$  und  $W_2$  werden (elektrische) *Strukturfunktionen* des Protons genannt. Diese spiegeln Eigenschaften dessen inneren Struktur wider, und sind experimentell gut bekannt.

**Bemerkung:** Für die elastische Streuung eines Elektrons mit Energie  $E$  an einem punktförmigen Spin- $\frac{1}{2}$ -Elementarteilchen mit Masse  $m$  und elektrischer Ladung  $Q = 1$  gilt [vgl. Gl. (IX.16)]

$$\frac{d^3\sigma}{dE' d^2\Omega} = \left( \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{2E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\mathbf{q}^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left( \nu + \frac{\mathbf{q}^2}{2m} \right),$$

wobei die  $\delta$ -Funktion die Energie  $E'$  des Elektrons nach dem Stoß bestimmt. Eine solche Formel folgt aus Gl. (X.8), wenn man für die Strukturfunktionen die Formen

$$2W_1(\nu, Q_E^2) = \frac{Q_E^2}{2m^2} \delta \left( \nu - \frac{Q_E^2}{2m} \right) = \frac{Q_E^2}{2m^2\nu} \delta \left( 1 - \frac{Q_E^2}{2m\nu} \right), \quad W_2(\nu, Q_E^2) = \frac{1}{\nu} \delta \left( 1 - \frac{Q_E^2}{2m\nu} \right) \quad (\text{X.9})$$

annimmt. In diesem Fall hängen  $mW_1$  und  $\nu W_2$  nur vom dimensionslosen Verhältnis  $Q_E^2/2m\nu$  ab.

Für den Streuprozess (X.6) hat Bjorken 1969 aus theoretischen Überlegungen vorgeschlagen [29], dass im Limes  $Q_E^2 \rightarrow \infty$ ,  $\nu \rightarrow \infty$  bei festem  $x_{\text{Bj}} \equiv Q_E^2/2m_p\nu$  die Funktionen  $m_p W_1(\nu, Q_E^2)$  und  $\nu W_2(\nu, Q_E^2)$  nur von der Variablen  $x_{\text{Bj}}$  abhängen können:

$$\begin{aligned} m_p W_1(\nu, Q_E^2) &\rightarrow F_1(x_{\text{Bj}}), \\ \nu W_2(\nu, Q_E^2) &\rightarrow F_2(x_{\text{Bj}}). \end{aligned} \quad (\text{X.10})$$

Diese Eigenschaft wird als *Bjorken-Skalenverhalten* bezeichnet.

<sup>(45)</sup>Dagegen ist  $E'$  durch die Kinematik bei elastischer Streuung festgelegt.

<sup>(as)</sup>J. D. BJORKEN, 1934–

Das Argument beruht teilweise auf einer dimensionalen Analyse: Aus Gl. (X.7a) und (X.8) folgt, dass die Funktionen  $m_p W_1$  und  $\nu W_2$  dimensionslos sind. Im hochenergetischen Limes  $\sqrt{Q_E^2} \rightarrow \infty$ ,  $\nu \rightarrow \infty$  sind  $m_e$  und  $m_p$  vernachlässigbar, so dass die Funktionen nur von einer dimensionslosen Variablen abhängen können.

Dazu haben Callan<sup>(at)</sup> und Gross<sup>(au)</sup> vorhergesagt [30], dass die dimensionslosen Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  für nicht zu kleine Werte von  $x_{Bj}$  über die Beziehung

$$2x_{Bj}F_1(x_{Bj}) = F_2(x_{Bj}) \quad (\text{X.11})$$

miteinander verknüpft sind.

Diese theoretischen Überlegungen wurden kurz darauf experimentell<sup>(46)</sup> am SLAC<sup>(47)</sup> bestätigt [31, 32]. Dabei bedeuten das Bjorken-Skalenverhalten und die Callan–Gross-Beziehung, dass die Parametrisierung des Wirkungsquerschnitts (X.8) schon mit einer einzigen Funktion von einer einzigen Variablen erfolgt, statt zwei Funktionen von zwei Variablen betrachten zu müssen. Das Proton muss also eine spezielle Struktur haben, die zu dieser Vereinfachung führt.

## X.2.2 Partonen

Die Strukturfunktionen (X.9) für elastische Streuung an punktförmigen Teilchen genügen dem Bjorken-Skalenverhalten (X.10) und der Callan–Gross-Beziehung (X.11). Diese Tatsache deutet auf eine mögliche Erklärung — basierend auf dem sog. *Partonmodell* — dafür hin, warum beide Relationen auch in tiefinelastischen Streuungen an Protonen experimentell beobachtet werden.

Das Modell beruht auf der Grundidee, dass in solchen Prozessen (X.6) alles passiert, als ob das durch das Elektron emittierte virtuelle Photon mit der Wahrscheinlichkeit  $f(x)$  an einem freien punktförmigen Teilchen mit Viererimpuls  $xP$  *elastisch* stoße, wobei  $P$  den Viererimpuls des Protons bezeichnet und  $0 < x < 1$  ist. Diese punktförmigen Bestandteile des Protons werden *Partonen* genannt,<sup>(48)</sup> und die *Partondichtefunktion* (kurz: PDF)  $f(x)$  stellt eine Eigenschaft des Protons dar.

Verallgemeinert man diese Grundidee, so führt man verschiedene Arten von Partonen — hier durch einen Index  $i$  gekennzeichnet — mit jeweiliger Partondichtefunktion  $f_i(x)$  und elektrischer Ladung  $Q_i$ . Die unterschiedlichen Arten werden später weiter diskutiert.

Sind das Lorentz-Quadrat  $q^2 = -Q_E^2$  des Viererimpulses des virtuellen Photons und seine Energie  $\nu$  im Ruhesystem des Protons fest, so kann der Viererimpuls  $xP$  des an dem Stoß beteiligten Partons nicht beliebig sein. Die Strukturfunktionen für elastische Streuung (X.9) zeigen nämlich, dass die „Masse“  $m$  des Partons genau gleich  $Q_E^2/2\nu$  sein soll. Diese Masse lässt sich aus der Energie–Impuls-Beziehung als  $m^2 = (xP)^2 = x^2 m_p^2$  ausdrücken, so dass die Bedingung über  $m$  zu einer Bedingung über den durch das beteiligte Parton getragenen Bruchteil  $x$  des Protonenviererimpulses wird. Genauer muss  $x = Q_E^2/2m_p\nu$  gelten, d.h. der Bruchteil  $x$  muss gleich der Bjorken-Skalenvariablen  $x_{Bj}$  sein.

Dann ist die Strukturfunktion  $F_2$  des Protons gegeben durch

$$F_2(x) = x \sum_i Q_i^2 f_i(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{X.12})$$

wobei die Summe über alle Arten von Partonen läuft. Dabei werden sowohl das Bjorken-Skalenverhalten und als auch die Callan–Gross-Beziehung automatisch erfüllt, wie sich an Gl. (X.9) erkennen lässt.

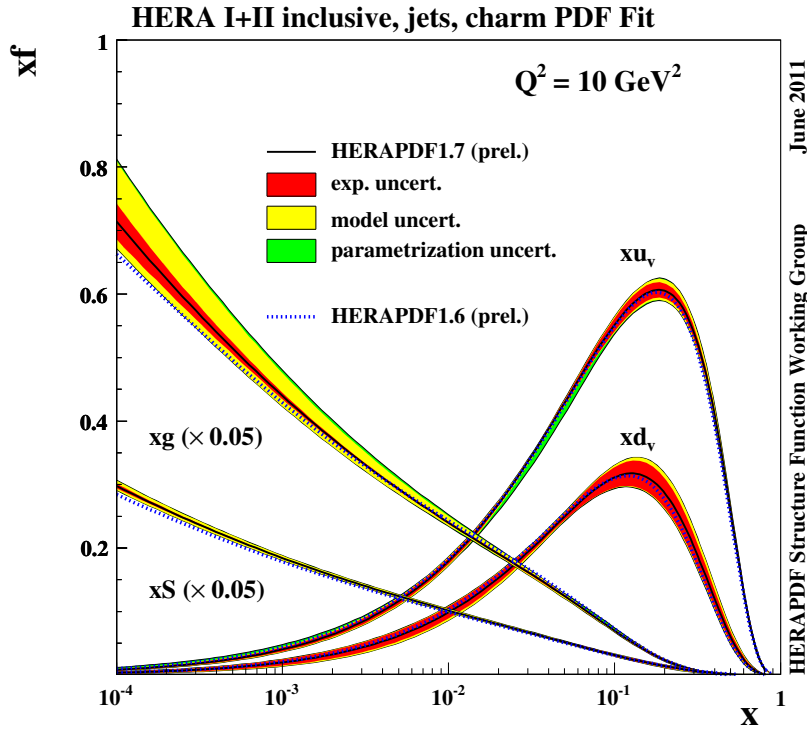
<sup>(46)</sup> . . . insbesondere durch Friedman<sup>(av)</sup>, Kendall<sup>(aw)</sup> und Taylor<sup>(ax)</sup>.

<sup>(47)</sup> Stanford Linear Accelerator Center

<sup>(48)</sup> Die Bezeichnung wurde durch Feynman eingeführt [33].

<sup>(at)</sup> C. G. CALLAN Jr., 1942–    <sup>(au)</sup> D. J. GROSS, 1941–    <sup>(ax)</sup> J. I. FRIEDMAN, 1930–    <sup>(ax)</sup> H. W. KENDALL, 1926–1999

<sup>(ax)</sup> R. E. TAYLOR, 1929–2018



**Abbildung X.7** – Unpolarisierte Partondichtefunktionen in einem Proton für Valenz- $u$ - und  $d$ -Quarks ( $u_v, d_v$ ), See-Quarks ( $S$ ) und Gluonen ( $g$ ), multipliziert mit  $x$ , laut den H1 & ZEUS-Experimenten am HERA Beschleuniger. Bild aus [https://www.desy.de/h1zeus/combined\\_results/index.php?do=proton\\_structure](https://www.desy.de/h1zeus/combined_results/index.php?do=proton_structure).

**Bemerkung:** Summiert man den Viererimpuls  $xP$  eines Partons multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit  $f_i(x)$ , dass ein Parton  $i$  den Bruchteil  $x$  trägt, über alle möglichen Werte von  $x$  und alle Arten von Partonen, so soll man den gesamten Viererimpuls  $P$  des Protons finden, d.h.

$$P = \int_0^1 \sum_i f_i(x) xP dx \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \sum_i x f_i(x) dx = 1. \quad (\text{X.13})$$

Die letztere Gleichung ist eine sog. *Summenregel*, der die Partondichtefunktionen genügen müssen.

Eine ausführliche Analyse der experimentellen Daten im Rahmen des Partonmodells führt zur Einführung von drei großen Klassen von Partonen in einem Hadron:

- Erstens gibt es „Valenz-Quarks“ mit Verteilungsfunktionen  $u_v(x), d_v(x)$ . Dabei ist  $xu_v(x)$  bzw.  $xd_v(x)$  in einem Proton maximal für  $x \approx 0,1-0,2$ , mit  $xu_v(x) \approx \frac{2}{3}$  bzw.  $xd_v(x) \approx \frac{1}{3}$ , d.h. solche  $u$ - bzw.  $d$ -Quarks tragen etwa  $\frac{2}{3}$  bzw.  $\frac{1}{3}$  des Protonenimpulses. Dies entspricht den drei Quarks  $uud$  des Quarkmodells.

In einem Hadron mit Strangeness, Charm oder Beauty treten natürlich auch Valenz- $s$ -,  $c$ - oder  $b$ -Quarks mit jeweiliger Dichtefunktion auf.

- Eine zweite Klasse besteht aus sog. „See-Quarks“ mit Dichtefunktionen  $u_s(x), \bar{u}_s(x), d_s(x), \bar{d}_s(x), s(x), \bar{s}(x)$ ... Diese See-Quarks entsprechen virtuellen Quark–Antiquark-Paaren innerhalb des geprobten Hadrons und tragen nur einen geringen Anteil des gesamten Impuls. Das Produkt  $x f_i(x)$  wird für  $x \lesssim 0,01-0,1$  aber größer als für die Valenzquarks.

Die Kinematik zeigt, dass Valenz- und See-Quarks den Spin  $\frac{1}{2}$  haben.

- Schließlich findet man noch Partonen mit dem Spin 1, die sich mit den *Gluonen* identifizieren lassen, mit einer Verteilungsfunktion  $g(x)$ . Diese haben keine elektrische Ladung, und tragen also nicht direkt zu  $F_2(x)$  bei. Sie müssen aber berücksichtigt werden, da sie teil des Gesamtimpulses des Protons tragen; insbesondere ist für  $x \lesssim 0,01$  das Produkt  $xg(x)$  größer als die Summe der  $xf_i(x)$  über alle anderen Arten von Partonen: bei kleinem  $x$  besteht ein Hadron meistens aus Gluonen.

Ein Beispiel von Partondichtefunktionen für die Valenz- $u$ - und  $d$ -Quarks, See-Quarks und Gluonen im Proton wird in Abb. X.7 dargestellt.

Eine genauere Untersuchung der Strukturfunktion  $F_2$  des Protons zeigt, dass sie tatsächlich nicht nur Funktion der Bjorken-Skalenvariablen  $x_{Bj}$  ist, sondern hängt auch von  $Q_E^2$  ab, und zwar wenn  $x_{Bj}$  kleiner als etwa 0,1 wird. Das heißt, dass das Skalenverhalten (X.10) verletzt ist. Dementsprechend sind die Partondichtefunktionen Funktionen von  $x$  und  $Q_E^2$ ,  $f_i(x, Q_E^2)$ : je nach der Auflösung, mit der das Proton untersucht wird — grob gesagt stellt  $(Q_E^2)^{-1/2}$  die typische Längenskala der kleinsten Details dar, die das virtuelle Photon auflösen kann —, sieht das Proton unterschiedlich aus, insbesondere bei kleinem  $x$ .

Diese Abhängigkeit nach  $Q_E^2$  lässt sich im Rahmen der Quantenchromodynamik, die im folgenden Abschnitt kurz vorgestellt wird, berechnen.

## X.3 Quantenchromodynamik

Die Theorie der starken Wechselwirkung, die hinter dem Quark- und dem Partonmodell steht und die zugehörigen Phänomene erklären kann, ist die *Quantenchromodynamik* (QCD). Dabei handelt es sich um eine sog. nicht-abelsche Eichfeldtheorie, basierend auf einer Gruppe  $SU(3)$ , die als *Farbgruppe* bezeichnet wird, und daher noch als  $SU(3)_c$  geschrieben wird.

Dabei werden die drei Dirac-Spinoren  $q_f^a$  mit  $a = r, g, b$  für einen gegebenen Quark-Flavour  $f$  als die drei Komponenten eines Vektors  $q_f$  im „Farbraum“ betrachtet, wobei jede Komponente schon ein vierkomponentiger Quark-Spinor ist. Die QCD folgt aus der Forderung einer sog. *Eichinvarianz*, und zwar, dass die Physik invariant unter lokalen  $SU(3)_c$ -Transformationen der Vektoren  $q_f$  sein soll, wobei sich die  $q_f$  als  $SU(3)$ -Triplets transformieren.

In diesem Abschnitt werden nur einige Elemente der QCD dargestellt, und zwar erstens die Vertices der Theorie (§ X.3.1) — welche die möglichen Prozesse festlegen —, dann einige wichtigen Vorhersagen der Theorie — die nur auf einer qualitativen Ebene in § X.3.2 diskutiert werden. Schließlich befasst sich § X.3.3 mit den globalen Symmetrien der QCD, die zur Einführung mehrerer Quantenzahlen führen, die zur Charakterisierung der Elementarteilchen sowie der Hadronen dienen.

### X.3.1 Vertices der QCD

Ähnlich der Quantenelektrodynamik kann die Quantenchromodynamik durch die Feynman-Regeln für die zugehörigen Vertices, die sich aus der Lagrange-Dichte herleiten lassen, spezifiziert werden. Im Fall der QCD kommen die drei in Abb. X.8 dargestellten Vertices vor. Dabei stellen die spiralförmigen Linien  $\text{○○○○}$  die *Gluonen* dar, d.h. die masselosen elektrisch neutralen Vektorpartikeln, die die starke Wechselwirkung vermitteln und an die Farbladung koppeln.

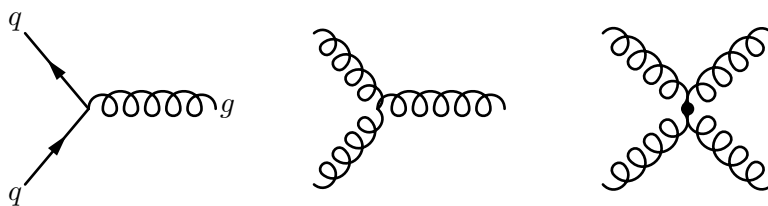


Abbildung X.8 – Vertices der Quantenchromodynamik.

Die an einem  $q\bar{q}g$ -Vertex (Abb. X.8 links) ein- und auslaufenden Quarks tragen typischerweise unterschiedliche Farbladungen. Dann trägt das Gluon die „Differenz“ dieser Farbladung. Trägt z.B. das ein- bzw. auslaufende Quark die Farbladung  $r$  (rot) bzw.  $b$  (blau), so soll das Gluon die Farbladung  $r\bar{b}$  nach rechts transportieren. Somit sind Gluonen farbgeladen und können in  $8 (= N_c^2 - 1)$ , mit  $N_c = 3$  der Anzahl der Farben) Farbkombinationen vorkommen.

Mathematisch werden die Gluonen durch Vektorfelder  $\mathcal{A}_\mu^A$  mit  $A = 1, \dots, 8$  modelliert. Um deren Kopplung mit den Quarks-Triplets  $q_f^{a=1,2,3}$  zu beschreiben, werden acht  $3 \times 3$ - „Gell-Mann“ Matrizen  $\lambda^A$  eingeführt, die die gleiche Rolle für  $SU(3)$  spielen, wie die Pauli-Matrizen für  $SU(2)$ .

Wegen ihrer Farbladung können Gluonen miteinander wechselwirken, entsprechend den zwei rechten Vertices der Abb. X.8. Diese *Selbstwechselwirkung* der Gluonen stellt einen großen Unterschied zum Photon in der QED dar.

Da die drei Vertices der QCD aus einer eichinvarianten Lagrange-Dichte kommen, sind die zugehörigen Kopplungskonstanten nicht unabhängig. In der Tat werden die beiden Drei-Teilchen-Vertices durch die gleiche *starke Kopplungskonstante*  $g_s$  bestimmt, während der Vier-Gluonen-Vertex durch  $g_s^2$  kontrolliert wird. Anstelle von  $g_s$  benutzt man auch die zugehörige starke Kopplungsstärke

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}, \quad (\text{X.14})$$

analog zu  $\alpha_{\text{em}}$  in der QED. Im Gegensatz zu  $\alpha_{\text{em}}$  kann aber  $\alpha_s$  „groß“, d.h. nicht viel kleiner als 1, sein. Infolgedessen<sup>(49)</sup> funktioniert Störungstheorie im Allgemeinen nicht so perfekt, wie in der QED, und Berechnungen erreichen selten eine Genauigkeit von 1% oder besser. Somit stellen numerische *Gitter-QCD*-Berechnungen eine wichtige Lösungsmethode dar.

### X.3.2 Wichtige Vorhersagen der Quantenchromodynamik

Die „einfache“ Forderung einer eichinvarianten  $SU(3)$  Theorie führt zu einer Vielzahl an Phänomenen, die in der QED nicht auftreten. Hiernach werden zwei hervortretende Eigenschaften ohne Beweis dargestellt.

#### X.3.2a Asymptotische Freiheit

Die Kopplungskonstante  $g_s$  ist trotz ihrem traditionellen Namen keine Konstante, sondern sie hängt von der Energie- bzw. Impulsskala  $Q_E$  des Prozesses unter Betrachtung ab. Genauer haben Gross, Politzer<sup>(ay)</sup> und Wilczek<sup>(az)</sup> 1973 entdeckt, dass  $g_s(Q_E)$  mit steigender Energieskala  $Q_E$  abnimmt und im Limes  $Q_E \rightarrow \infty$  nach Null geht. Dieses Verhalten wird als *asymptotische Freiheit* bezeichnet.

Genauer findet man zur ersten Ordnung in Störungsrechnung

$$\alpha_s(Q_E^2) \simeq \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + 4\pi\alpha_s(\mu^2)b_0 \ln(Q_E^2/\mu^2)} \quad (\text{X.15})$$

mit einer Referenzskala  $\mu$  und  $b_0 \equiv (11N_c - 2N_f)/48\pi^2$ , wobei  $N_c = 3$  die Anzahl der Farben und  $N_f$  die Anzahl der bei der Energieskala  $Q_E$  aktiven Flavours bezeichnet — d.h.  $N_f = 3$  für  $Q_E \lesssim 2m_c$ ,  $N_f = 4$  für  $2m_c \lesssim Q_E \lesssim 2m_b$ , usw.

Der Verlauf von  $\alpha_s(Q^2)$ , ermittelt aus unterschiedlichen Experimenten, wird in Abb. X.9 gezeigt. Insbesondere sieht man, dass die Kopplungsstärke bei der Masse  $M_Z \approx 91,2$  GeV des  $Z^0$ -Bosons

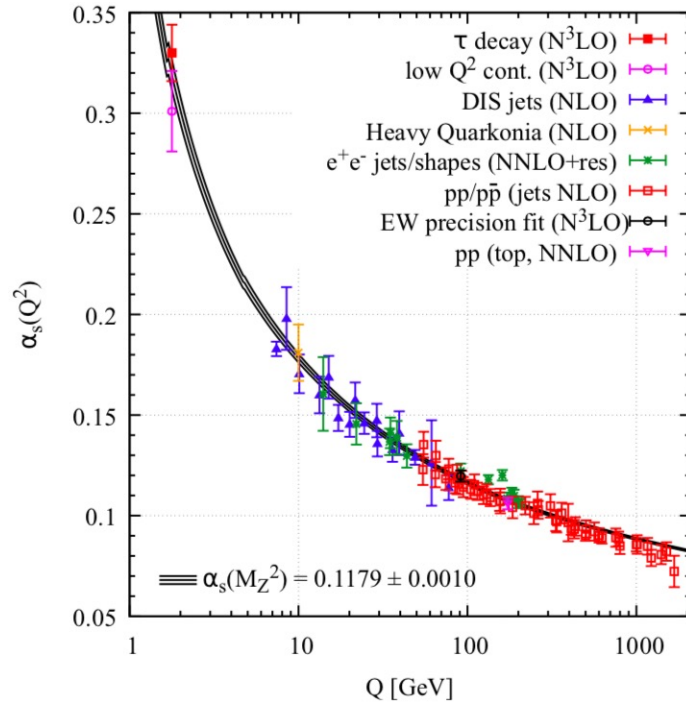
$$\alpha_s(M_Z) = 0,1179 \pm 0,0010 \quad (\text{X.16})$$

beträgt.

<sup>(49)</sup>... und wegen der Selbstwechselwirkung der Gluonen, die zur Existenz von viel mehr Feynman-Diagrammen zu einer gegebenen Ordnung in  $g_s$  führt.

<sup>(ay)</sup>H. D. POLITZER, 1949– <sup>(az)</sup>F. WILCZEK, 1951–





**Abbildung X.9** – Experimentell ermittelter Verlauf der starken Kopplungsstärke. Genommen aus dem 2019 update der Review of Particle Physics, Abb. 9.5.

Asymptotische Freiheit liefert eine natürliche Erklärung für das in § X.2.1 b diskutierte Bjorken-Skalenverhalten: für Prozesse mit großem  $Q_E^2$  ist die Kopplungskonstante klein, so dass sich Quarks und Gluonen tatsächlich wie freie Teilchen verhalten, wie im Partonmodell. Bei endlichem  $Q_E^2$  treten Korrekturen auf, die sich im Rahmen der QCD berechnen lassen, und zu einer entsprechenden Abhängigkeit der Partondichtefunktionen führen:  $f_i(x, Q_E^2)$ .

#### Bemerkungen:

\* Definiert man eine neue Energieskala  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , die oft als *QCD-Skala* bezeichnet wird, durch

$$\alpha_s(\mu^2) \equiv \frac{1}{4\pi b_0 \ln(\mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)},$$

so findet man nach Einsetzen in Gl. (X.15) unter der Annahme, dass  $N_f$  und daher  $b_0$  konstant zwischen  $\Lambda_{\text{QCD}}$ ,  $\mu$  und  $Q_E$  bleibt,

$$\alpha_s(Q_E^2) = \frac{1}{4\pi b_0 \ln(Q_E^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}. \quad (\text{X.17})$$

Dies bedeutet, dass die Kopplungsstärke divergiert, wenn  $Q_E \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}}^+$ .

\* Dem Heisenberg'schen Prinzip nach entspricht eine hohe Impulsskala einer kleinen Längenskala, und umgekehrt. Daher bedeutet asymptotische Freiheit, dass je näher zwei farbgeladene Teilchen benachbart sind, desto kleiner ist die Stärke deren Wechselwirkung.

\* Mathematisch tritt asymptotische Freiheit nicht nur in QCD auf, sondern in allen nicht-abelschen Eichtheorien. Somit nimmt die Kopplungskonstante  $g$  der  $SU(2)_L$ -Gruppe des elektroschwachen Standardmodells (Kap. XII) mit der Energieskala ab.

#### X.3.2b Quarkeinschluss

Für kleine Werte von  $Q_E^2$  wird die Kopplungsstärke  $\alpha_s(Q_E^2)$  groß, d.h. die Wechselwirkungen zwischen farbgeladenen Teilchen sind sehr stark. Diese Tatsache erklärt qualitativ die Existenz



von farbneutralen gebundenen Zuständen, den Hadronen, sowie das *Confinement* der Quarks und Gluonen innerhalb der Letzteren.

Versucht man, zwei farbgeladene Teilchen voneinander zu entfernen, dann bilden sich aus der hinzugefügten Energie Quark–Antiquark-Paare. Daraus resultieren, statt zweier getrennter Farbladungen, zwei oder mehr Hadronen.

**Bemerkung:** Genau gesagt existiert noch kein formeller Beweis, dass die Quantenchromodynamik tatsächlich zum Confinement führt. Das Letztere wird aber in numerischen QCD-Simulationen auf einer diskretisierten Raumzeit, d.h. in sog. Gitter-QCD, nachgewiesen.

### X.3.3 Symmetrien der QED und der QCD

Die Lagrange-Dichten der Quantenchromodynamik, die zu den Vertices der Abb. X.8 führt, und der Quantenelektrodynamik, Gl. (IX.4), sind invariant unter verschiedenen Symmetrien, d.h. unter der Wirkung von Gruppen von Transformationen. Dabei unterscheidet man, je nach der Gruppe, zwischen kontinuierlichen und diskreten Symmetrien.

Laut dem Noether<sup>(ba)</sup>-Theorem liefert jede kontinuierliche Symmetrie der Lagrange-Dichte eine Erhaltungsgröße. Beispielsweise sind Lagrange-Dichten konstruktionsgemäß Lorentz-invariant, was insbesondere die Erhaltung der Energie, des Impulses sowie des Drehimpulses zur Folge hat.

In diesem Paragraph werden ein paar solche Symmetrien mit den zugehörigen Erhaltungsgrößen diskutiert. Diese schränken die möglichen Prozesse ein, die durch die Wechselwirkungen erlaubt werden. Dazu kommen einige diskrete Symmetrien, die ebenfalls die Dynamik einschränken.

#### X.3.3a Kontinuierliche innere Symmetrien

Neben den Lorentz-Transformationen in der Raumzeit findet man noch Transformationen auf „inneren“ Vektorräumen, z.B. auf dem Hilbert-Raum der Zustände, die ein bzw. mehrere Teilchen beschreiben. Hiernach werden nur solche Transformationen betrachtet, unter denen die Zustände in jedem Punkt der Raumzeit identisch transformiert werden, d.h. sog. *globale Transformationen* der Zustände. Es existieren auch lokale Transformationen — die Eichtransformationen —, die hier nicht weiter diskutiert werden.

#### Leptonen- und Baryonenzahl

Eine erste Symmetrie der bisher betrachteten Wechselwirkungen ist die Invarianz der Lagrange-Dichte (IX.4) der QED unter den gleichzeitigen Transformationen

$$\hat{\psi}_j \rightarrow \hat{\psi}'_j = e^{i\alpha} \hat{\psi}_j, \quad \hat{\bar{\psi}}_j \rightarrow \hat{\bar{\psi}}'_j = e^{-i\alpha} \hat{\bar{\psi}}_j, \quad \hat{A}_\mu \rightarrow \hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu \quad (\text{X.18})$$

mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , wobei  $\hat{\psi}_j$  den Feldoperator für ein beliebiges Fermion  $j$  (Lepton oder Quark) bezeichnet. Diese Symmetrie funktioniert, weil es an jedem Vertex (IX.3) so viele ein- als auslaufende Fermionlinien gibt, entsprechend der gleichen Anzahl von  $\hat{\psi}_j$  und  $\hat{\bar{\psi}}_j$ -Operatoren im Wechselwirkungsterm.

Infolge dieser Symmetrie ist die Nettoanzahl der Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen der Art  $j$ , d.h. die Anzahl der Teilchen minus der Anzahl ihrer Antiteilchen, in einem quantenelektrodynamischen Prozess erhalten. Summiert man über alle Leptonenpezies bzw. über alle Quark-Flavours und -Farben, so gibt diese Symmetrie die Erhaltung der Leptonenzahl  $\mathcal{L}$  bzw. der Baryonenzahl  $\mathcal{B}$ .

Ähnlich dieser globalen Symmetrie der QED ist die Lagrange-Dichte der QCD invariant unter den ortsunabhängigen Transformationen

$$\hat{q}_f \rightarrow e^{i\alpha} \hat{q}_f, \quad \hat{\bar{q}}_f \rightarrow e^{-i\alpha} \hat{\bar{q}}_f \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{X.19})$$

für einen Quark-Flavour  $q_f$ , während die Feldoperatoren für alle anderen Flavours und für die Gluonen unverändert bleiben. Diese Invarianz der Lagrange-Dichte spiegelt sich in der Tatsache

<sup>(ba)</sup>E. NOETHER, 1882–1935

wider, dass der Quark-Flavour an einem  $q\bar{q}g$ -Vertex (Abb. X.8 links) unverändert ist. Assoziiert mit diesen Symmetrien existieren verschiedene erhaltene Quantenzahlen, die jetzt diskutiert werden.

### Strangeness, Charm, Beauty

Aus der Invarianz der Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik unter der Multiplikation des Feldoperators für  $s$ -Quarks durch eine beliebige Phase folgt die Erhaltung der Strangeness. Anders gesagt ist die Nettoanzahl der strange Quarks, d.h. die Anzahl der  $s$ -Quarks minus der Anzahl der  $\bar{s}$ -Antiquarks, erhalten.<sup>(50)</sup>

Daraus folgt, dass Mesonen wie  $K^+ = u\bar{s}$  und  $K^- = s\bar{u}$  in der QCD nicht zerfallen können, weil es kein leichteres Hadron mit Strangeness gibt.

In ähnlicher Weise sind Charm  $C$ , Beauty (oder „Bottomness“)  $B$  und Truth (oder „Topness“)  $T$  ebenfalls in der QCD erhalten, wobei  $C$  als die Nettoanzahl der  $c$ -Quarks,  $B$  als Minus der Nettoanzahl der  $b$ -Quarks, und  $T$  als die Nettoanzahl der  $t$ -Quarks definiert wird.

**Bemerkung:**  $S$ ,  $C$ ,  $B$  und  $T$  werden auch in der QED erhalten, entsprechend der schon oben diskutierten Symmetrie (X.18).

### Starker Isospin

Man könnte noch auch „Upness“ bzw. „Downness“ definieren, um die Nettoanzahl der an einem Prozess beteiligten  $u$ - bzw.  $d$ -Quarks zu beschreiben. Diese sind wieder in der QCD erhalten dank der Invarianz der Lagrange-Dichte unter den Transformationen (X.19) für  $\hat{\psi}_u$ - oder  $\hat{\psi}_d$ -Feldoperatoren.

In der Praxis betrachtet man eine größere Symmetrie, die exakt wird, falls elektromagnetische Effekte sowie die Massendifferenz zwischen  $u$ - und  $d$ -Quarks vernachlässigt werden. Unter solchen Umständen ist die Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik tatsächlich invariant unter Transformationen der Art

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_u \\ \hat{\psi}_d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\psi}'_u \\ \hat{\psi}'_d \end{pmatrix} \equiv \mathcal{U} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_u \\ \hat{\psi}_d \end{pmatrix}, \quad (\text{X.20})$$

wobei  $\mathcal{U}$  eine beliebige spezielle unitäre  $2 \times 2$ -Matrix ist,  $\mathcal{U} \in \text{SU}(2)$ . Die entsprechende Symmetrie der QCD wird *Isospin-Symmetrie* genannt, oder auch *starker Isospin*.<sup>(51)</sup> Die zugehörige Symmetriegruppe wird als *SU(2)-Flavour-Gruppe* bezeichnet.<sup>(52)</sup>

Jede Isospin-Transformation  $\mathcal{U}$  lässt sich als Exponential einer Linearkombination der Pauli-Matrizen  $\sigma_j$  schreiben:

$$\mathcal{U} = e^{-i\alpha \vec{\sigma} \cdot \vec{e}}$$

mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  und einem dreidimensionalen Einheitsvektor  $\vec{e}$  [vgl. Gl. (A.20)]. Solche SU(2)-Matrizen beschreiben auch die Drehungen im Spin-Vektorraum von nicht-relativistischen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen — woraus die Bezeichnung Isospin tatsächlich folgt.<sup>(53)</sup>

Die Invarianz der Lagrange-Dichte der QCD unter Transformationen (X.20) bedeutet, dass der zugehörige Hamilton-Operator mit jeder Matrix  $\sigma_j$  kommutiert, wobei  $\sigma_j$  auf dem zweidimensionalen Vektorraum wirkt, der durch die zwei leichten Flavours aufgespannt wird. Somit können der Hamilton-Operator,  $\hat{I}^2 \equiv \frac{1}{4}\vec{\sigma}^2$  und  $\hat{I}_3 \equiv \frac{1}{2}\sigma_3$  gleichzeitig diagonalisiert werden. Infolgedessen lassen sich die stark-wechselwirkenden Teilchen, d.h. die Eigenzustände zum QCD-Hamilton-Operator,

<sup>(50)</sup> Da die Strangeness des  $s$ -Quarks als  $S = -1$  definiert ist, ist die Strangeness tatsächlich gleich dem Negativen der Nettoanzahl der  $s$ -Quarks.

<sup>(51)</sup> Da die  $u$ - und  $d$ -Quarks unterschiedliche elektrische Ladungen haben, ist der Isospin keine Symmetrie der QED. Dagegen sind Upness und Downness in der QED erhalten.

<sup>(52)</sup> Diese Flavour-Gruppe ist eine Untergruppe der SU(3)<sub>f</sub>-Flavour-Gruppe von Gell-Mann und Ne'eman. Die Letztere lässt sich wiederfinden, indem man die Massendifferenz des  $s$ -Quarks und der zwei leichteren Quarks vernachlässigt, was schon eine stärkere Näherung darstellt.

<sup>(53)</sup> Ursprünglich wurde der Isospin nicht als Symmetrie der  $u$  und  $d$ -Quarks, sondern als Symmetrie zwischen Proton und Neutron durch Heisenberg eingeführt [34], vgl. auch Gl. (X.25).

durch deren Werte von  $I$  und  $I_3$  klassifizieren, wobei  $I(I+1)$  bzw.  $I_3$  der zugehörige Eigenwert zu  $\hat{I}^2$  bzw.  $\hat{I}_3$  ist. Solche Eigenzustände können dann mit  $|I, I_3\rangle$  bezeichnet werden.

Zum Beispiel gelten für das  $u$ -Quark, entsprechend dem ersten Basisvektor im Flavour-Raum,  $I = \frac{1}{2}$  und  $I_3 = \frac{1}{2}$ , während das  $d$ -Quark  $I = \frac{1}{2}$  und  $I_3 = -\frac{1}{2}$  hat:<sup>(54)</sup>

$$u \equiv |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad d \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \quad (\text{X.21})$$

Zusammen bilden die  $u$ - und  $d$ -Quarks ein Isospin-Dublett („Iso-Dublett“).

Bei den Antiquarks nimmt  $I_3$  den entgegengesetzten Wert zum entsprechenden Quark an, d.h.  $I_3 = -\frac{1}{2}$  für das  $\bar{u}$ -Antiquark,  $I_3 = \frac{1}{2}$  für das  $\bar{d}$ : bezüglich des Isospins hat ein  $\bar{u}$ - bzw.  $\bar{d}$ -Antiquark die gleichen Quantenzahlen wie ein  $d$ - bzw.  $u$ -Quark. Genauer gilt im Flavour-Raum<sup>(54)</sup>

$$\bar{u} \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \quad \bar{d} \equiv |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \quad (\text{X.22})$$

Schließlich tragen alle anderen Quarks und Antiquarks keinen Isospin, d.h. entsprechen dem  $|0, 0\rangle$ -Isospin-Zustand.

Das Minus-Vorzeichen beim  $\bar{d}$  in Gl. (X.22) lässt sich wie folgt erklären.

Sei  $\psi = \alpha u + \beta d$  mit  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  ein Isospinor im Flavour-Raum und  $\psi^c$  der ladungskonjugierte Isospinor, der das Antiteilchen zu  $\psi$  beschreibt. Wenn  $\psi$  unter einer Isospin-Transformation (X.20) zu  $\mathcal{U}\psi$  wird, soll  $\psi^c$  mit der komplex konjugierten Matrix  $\mathcal{U}^*$  transformiert werden:<sup>(55)</sup>  $\psi^c \rightarrow \mathcal{U}^*\psi^c$ . Zum anderen soll der transformierte Isospinor  $\mathcal{U}^*\psi^c$  weiter ladungskonjugiert zu  $\mathcal{U}\psi$  sein, d.h.

$$\mathcal{U}^*\psi^c = (\mathcal{U}\psi)^c.$$

Diese Forderung kann mit  $\psi^c = i\sigma_2\psi$  — und ähnlich  $(\mathcal{U}\psi)^c = i\sigma_2(\mathcal{U}\psi)$  — erfüllt werden,<sup>(56)</sup> wobei  $\sigma_2$  die zweite Pauli-Matrix bezeichnet. Insbesondere findet man (für die Flavour-Raum-Komponenten)  $u^c = d$  und  $d^c = -u$ , was genau Gl. (X.22) ist.

**Bemerkung:** Der Wert der Isospin-Komponenten  $I_3$  ist einfach mit der elektrischen Ladung  $Q$  verknüpft. Für die  $u$ ,  $d$  und  $s$ -Quarks und deren Antiquarks gilt die *Gell-Mann-Nishijima*<sup>(bb)</sup>-Formel

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(\mathcal{B} + S), \quad (\text{X.23a})$$

mit der Baryonenzahl  $\mathcal{B}$  und der Strangeness  $S$ . Verallgemeinert man auf  $b$ ,  $c$  und  $t$  Quarks, so erhält man

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(\mathcal{B} + S + C + B + T). \quad (\text{X.23b})$$

Diese Beziehung gilt noch für die Hadronen.

Die Isospin-Quantenzahlen von Hadronen lassen sich dann aus denen der Quarks erhalten, indem man die Isospins wie übliche Drehimpulse koppelt. Beispielsweise gilt für die Pionen<sup>(54)(57)</sup>

$$\pi^+ = u\bar{d} = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |1, 1\rangle, \quad \pi^- = d\bar{u} = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |1, -1\rangle, \quad (\text{X.24a})$$

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle) = |1, 0\rangle. \quad (\text{X.24b})$$

Die drei Pionen bilden somit das Isospin-Triplett, kurz „Iso-Triplett“, mit  $I = 1$ . Sie sollten dann dieselbe Masse haben, weil sie miteinander über die Operatoren  $\hat{I}_1 \pm i\hat{I}_2$  verknüpft sind, die mit dem Hamilton-Operator vertauschen.

<sup>(54)</sup>In Gl. (X.21), (X.22) und (X.24)–(X.27) werden nur die „Isospin-Anteile“ der Zustände gezeigt.

<sup>(55)</sup>Gruppentheoretisch ist  $\psi$  in der Fundamentaldarstellung  $\mathbf{2}$  der Flavour-Gruppe  $SU(2)$  und  $\psi^c$  in der komplex konjugierten  $\bar{\mathbf{2}}$  — die im Spezialfall von  $SU(2)$  äquivalent zur  $\mathbf{2}$  ist.

<sup>(56)</sup>Für jede  $SU(2)$ -Matrix  $\mathcal{U}$  gilt nämlich  $\mathcal{U}^* = i\sigma_2\mathcal{U}(i\sigma_2)^{-1}$ .

<sup>(57)</sup>Beim  $\pi^+$  wurde das Minus-Vorzeichen des  $\bar{d}$ -Antiquarks weggelassen; dagegen spielt es beim  $\pi^0$  eine wichtige Rolle.

<sup>(bb)</sup>K. NISHIJIMA, 1926–2009

Koppelt man jetzt drei  $u$  oder  $d$  Quarks, so findet man unter anderen mit  $I = \frac{1}{2}$  das Iso-Dublett bestehend aus Proton und Neutron<sup>(54)</sup>

$$p = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad n = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (\text{X.25})$$

Dieses Dublett wird kollektiv als *Nukleon* bezeichnet. Die Kopplung führt auch zum Quadruplett der vier  $\Delta$ -Baryonen mit  $I = \frac{3}{2}$ , vgl. Tab. X.4.

Allgemeiner wird einem Mehrteilchenzustand aus Hadronen ein Isospin zugeordnet: beispielsweise gilt für die 2-Teilchen-Zustände aus Protonen und Neutronen<sup>(54)</sup>

$$p + p = |1, 1\rangle \quad , \quad n + n = |1, -1\rangle \quad , \quad p + n = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + |0, 0\rangle) \quad (\text{X.26})$$

und für die Zustände mit einem Nukleon und einem positiv geladenen Pion<sup>(54)</sup>

$$\pi^+ + p = \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \quad , \quad \pi^+ + n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (\text{X.27})$$

wobei geeignete Clebsch<sup>(bc)</sup>-Gordan<sup>(bd)</sup>-Koeffizienten<sup>(58)</sup> benutzt wurden.

**Bemerkung:** Der gebundene Zustand aus einem Proton und einem Neutron — das sog. Deuteron, hiernach mit  $d$  bezeichnet — hat den Isospin  $I = 0$ :  $d = |0, 0\rangle$ . Die Isospin-Komponente des  $p + n$ -Systems entlang des  $|1, 0\rangle$ -Zustands spielt nur bei Streuzuständen eine Rolle.

Der starke Isospin ist nicht nur für Klassifizierungszwecke nützlich, sondern kann auch benutzt werden, um Vorhersagen über die Dynamik zu machen. Somit führt die Erhaltung des Isospins in starken Prozessen zur Existenz von einfachen Verhältnissen zwischen den Amplituden bzw. Wirkungsquerschnitten für unterschiedliche Endzustände einer Streuung, oder auch zwischen den Amplituden für Prozesse mit Anfangszuständen, die über Isospin-Transformationen verknüpft sind.

Als Beispiel kann man die zwei Streuprozesse ( $d$  bezeichnet das Deuteron)

$$(a) \quad p + p \rightarrow d + \pi^+ \quad , \quad (b) \quad p + n \rightarrow d + \pi^0$$

betrachten: bei Streuung (a) gilt  $I_3 = 1$ , während  $I_3 = 0$  im Prozess (b). In beiden Fällen hat der Endzustand immer den Isospin  $I = 1$  — resultierend aus der Kopplung eines Isospins  $I = 0$  mit einem Isospin  $I = 1$ . Somit ist nur die Projektion des Hamilton-Operators auf dem Unterraum mit  $I = 1$  relevant für die zwei Prozesse. Laut Gl. (X.26) besteht der Anfangszustand von (a) aus einem reinen  $I = 1$ -Zustand, während der Anfangszustand von (b) halb und halb  $I = 1$  und  $I = 0$  ist: dabei trägt der Anteil mit  $I = 0$  nicht zum Streumatrixelement bei. Dann kommt

$$S_{\text{fi}}(b) = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{\text{fi}}(a),$$

wobei  $S_{\text{fi}}(x)$  das Streumatrixelement [Gl. (VI.2)] für den Prozess (x) bezeichnet. Daraus folgt das Verhältnis  $\sigma(b)/\sigma(a) = 1/2$  für die zugehörigen Wirkungsquerschnitte.

### X.3.3 b Diskrete Symmetrien

Die im vorigen Unterabschnitt diskutierten kontinuierlichen inneren Symmetrien führen zur Existenz von additiven Quantenzahlen. Jetzt werden ein paar diskrete Symmetrien der QED und der starken Wechselwirkung behandelt, und die zugehörigen multiplikativen Quantenzahlen eingeführt.

#### Parität

Bei der Raumspiegelung handelt es sich um die Transformation, die den Ortsvektor  $\vec{r}$  in  $-\vec{r}$  transformiert. In der Raumzeit lässt sich die Wirkung der Raumspiegelung auf den Koordinaten-Vierervektor durch eine schon in Gl. (A.28) eingeführte uneigentliche Lorentz-Transformation  $\Lambda_P$ .

<sup>(58)</sup>Einige dieser Koeffizienten können z.B. in der Review of Particle Physics [1], Kap. 44 gefunden werden.

<sup>(bc)</sup>A. CLEBSCH, 1833–1872    <sup>(bd)</sup>P. GORDAN, 1837–1912

Allgemeiner lässt sich die Operation dieser Transformation auf eine beliebige physikalische Größe  $\mathcal{G}(x)$  durch einen *Paritätsoperator*, auch *Raumspiegelungsoperator* genannt,  $\hat{P}$  beschreiben, und zwar gemäß

$$\hat{P}\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}(\Lambda_P x). \quad (\text{X.28})$$

Dieser Operator hängt von der Natur von  $\mathcal{G}(x)$  ab — je nachdem, ob es sich um eine skalare, spinorielle, vektorielle, oder tensorielle Größe handelt. In allen Fällen ist  $\hat{P}$  eine Involution, d.h.

$$\hat{P}^2 = \mathbf{1}.$$

Infolge dieser Eigenschaft sind die möglichen Eigenwerte des Paritätsoperators  $P = \pm 1$ . Ist eine Größe ein Eigenvektor zu  $\hat{P}$ , so wird der entsprechende Eigenwert  $P$  als seine *Parität* bezeichnet.

Je nach dem Verhalten unter der Parität unterscheidet man

- für skalare Größen, zwischen Skalaren —  $\hat{P}s = s$ , d.h.  $P = +1$  — und Pseudoskalaren —  $\hat{P}ps = -ps$ , d.h.  $P = -1$ ;
- für vektorielle Größen, zwischen Vektoren —  $\hat{P}\vec{v} = -\vec{v}$ , d.h.  $P = -1$  — und *axialen Vektoren* (oder *Pseudovektoren*) —  $\hat{P}\vec{a} = \vec{a}$ , d.h.  $P = +1$ .

Ein Beispiel für eine pseudoskalare Größe ist die Helizität, Produkt von einem Vektor (dem Impuls) und einem axialen Vektor (dem Spin).

Teilchen, insbesondere Elementarteilchen, können Eigenzustände zum Paritätsoperator sein, und somit eine feste Parität haben. Das ist der Fall der Teilchen, die entweder der QED oder der QCD unterliegen, weil die Lagrange-Dichten jener Wechselwirkungen invariant unter Raumspiegelung sind. Somit haben die Quarks und die geladenen Leptonen ( $e^-$ ,  $\mu^-$ ,  $\tau^-$ ) die Parität  $+1$ , während ihre Antiteilchen die Parität  $-1$  haben. Dazu haben Photonen und Gluonen, die durch Vierervektoren beschrieben werden, die Parität  $-1$ .

Bei nicht-elementaren Teilchen hängt die Parität von denen der Bestandteile ab, sowie vom Bahndrehimpuls, der einen Beitrag  $(-1)^\ell$  gibt, mit  $\ell$  der Bahndrehimpulsquantenzahl, wobei die Beiträge multipliziert werden sollen. Somit haben Pionen ( $\ell = 0$ ) die Parität  $-1$ .

### Ladungskonjugation

Eine weitere diskrete Transformation ist die Ladungskonjugation, die ein Teilchen in dessen Antiteilchen und umgekehrt bei unveränderter Raumzeit-Position transformiert. Man kann zeigen, dass die Lagrange-Dichten der QED und der QCD invariant unter dieser Transformation sind.

Für ein gegebenes Teilchen–Antiteilchen System wird die Ladungskonjugation durch einen Operator  $\hat{C}$  darstellt. Da  $\hat{C}^2 = \mathbf{1}$  ist, sind die möglichen Eigenwerte dieses Ladungskonjugationsoperators  $C = \pm 1$ . Die entsprechenden Eigenzustände stellen definitionsgemäß Teilchen dar, die gleich ihrer Antiteilchen sind. Dies betrifft nur wenige Teilchen wie das Photon  $\gamma$ , das neutrale Pion  $\pi^0$ , oder die in Abb. X.1 vorkommenden  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\rho^0$ ,  $\omega$  und  $\phi$  Mesonen, die alle aus  $u$ ,  $d$  und  $s$  Quarks und deren Antiquarks bestehen. Dazu kommen noch die sog. *Charmonia* und *Bottomonia*, d.h. die gebundenen  $c\bar{c}$ - und  $b\bar{b}$ -Zustände.

Als Beispiel hat das Photon die *C-Parität*  $C = -1$ , während für das neutrale Pion  $C = +1$  ist:

$$\hat{C}|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle, \quad \hat{C}|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle. \quad (\text{X.29a})$$

Dagegen gilt für die geladenen Pionen

$$\hat{C}|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle, \quad \hat{C}|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle. \quad (\text{X.29b})$$

Wegen der Erhaltung der Ladungskonjugation in der QED und der QCD, sollen die Zerfallsprodukte von  $\hat{C}$ -Eigenzustände, die über die QED oder die QCD zerfallen, ebenfalls Eigenzustände zur Ladungskonjugation sein, und zwar mit dem gleichen Eigenwert. Infolgedessen kann das neutrale Pion in 2 oder 4 Photonen zerfallen,<sup>(59)</sup> nicht aber in 3 Photonen.

<sup>(59)</sup>Dabei wird die Parität auch erhalten, vorausgesetzt die Photonen mit einem relativen Bahndrehimpuls  $\ell = 1$  emittiert werden.

**Bemerkungen:**

\* Der Ladungskonjugationsoperator  $\hat{C}$  ist ein seltenes Beispiel für einen antiunitären Operator.<sup>(60)</sup> Dies ist eine nötige Eigenschaft, um einen normierten Zustand in den dazu komplexen konjugierten Zustand zu transformieren (vgl. die Teilchen-Interpretation der Lösungen zu den Klein–Gordon- oder Dirac-Gleichungen).

\* Eine verwandte multiplikative Quantenzahl, die in der starken Wechselwirkung erhalten bleibt, ist die sog. *G-Parität*, entsprechend dem Eigenwert des Operators  $\hat{G} \equiv \hat{C} e^{i\pi \hat{I}_2}$ , wobei  $\hat{I}_2$  die 2-Komponente des Isospins bezeichnet. Das Interesse an dieser G-Parität liegt daran, dass zusätzliche Teilchen wie z.B. die geladenen Pionen Eigenzustände dazu sind,<sup>(61)</sup> die nicht Eigenzustand zum Ladungskonjugationsoperator sind.

**Zeitumkehr**

Eine weitere Transformation, unter welcher die QED und — nach heutigem Wissen — die QCD invariant sind, ist die Zeitumkehr, die die Zeit  $t$  in  $-t$  bei unveränderten Raumkoordinaten transformiert. Die Wirkung dieser Operation auf Vierervektoren erfolgt durch die Lorentz-Transformation  $\Lambda_T$ , Gl. (A.29).

Allgemeiner wird ein (antiunitärer) Zeitumkehroperator  $\hat{T}$  eingeführt, um die Operation auf Zustände mit bestimmtem Spin durchzuführen. Die möglichen Eigenwerte von  $\hat{T}$  sind  $\mathbb{T} = \pm 1$ .

Laut dem *CPT-Theorem* ist jede lokale Lorentz-invariante Quantenfeldtheorie invariant unter dem Produkt von Ladungskonjugation ( $\hat{C}$ ), Raumspiegelung ( $\hat{P}$ ) und Zeitumkehr ( $\hat{T}$ ), so dass  $\hat{T}$  äquivalent zu  $\hat{C}\hat{P}$  ist, d.h. zur Transformation, die ein Teilchen mit bestimmter Helizität bzw. Polarisation in das zugehörige Antiteilchen mit entgegengesetzter Helizität bzw. Polarisation überführt. Gleichzeitige Eigenzustände zu  $\hat{C}$  und  $\hat{P}$ , wie z.B. alle oben erwähnten Teilchen mit bestimmter C-Parität, sind natürlich Eigenzustände zu  $\hat{C}\hat{P}$ , d.h. automatisch zur Zeitumkehr.

**Literatur zum Kapitel X**

- Berger, *Elementarteilchenphysik* [21], Kap. 5.1 & 5.3.
- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 4.3–4.4, 8.1–8.3 & 8.6.
- Halzen & Martin, *Quarks and Leptons* [22], Kap. 2.5–2.11, 8, 9, 10.1 & 11.1.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [6], Kap. 17–18.

<sup>(60)</sup> Dies bedeutet, dass  $\hat{C}$  einerseits *antilinear* ist: für alle Zustände  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  und komplexe Zahlen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gilt  $\hat{C}(\lambda_1|1\rangle + \lambda_2|2\rangle) = \lambda_1^* \hat{C}|1\rangle + \lambda_2^* \hat{C}|2\rangle$ ; andererseits ist  $\hat{C}\hat{C}^\dagger = \hat{C}^\dagger\hat{C} = \mathbb{1}$ , wobei  $\hat{C}^\dagger$  der adjungierte Operator ist.

<sup>(61)</sup> Dies folgt aus  $e^{i\pi \hat{I}_2} |\pi^\pm\rangle = |\pi^\mp\rangle$  und daher  $\hat{G} |\pi^\pm\rangle = |\pi^\pm\rangle$ .

# KAPITEL XI

## Schwache Wechselwirkung

- 
- XI.1 Symmetrieverletzungen 105
    - XI.1.1 Verletzung der Erhaltung der Flavour-Quantenzahlen 106
    - XI.1.2 Paritätsverletzung 106
    - XI.1.3 Verletzung der Ladungskonjugation 108
    - XI.1.4 CP-Verletzung 108
    - XI.1.5 Zeitumkehrverletzung 108
  - XI.2 Phänomenologische Modelle 108
    - XI.2.1 Fermi-Modell 108
    - XI.2.2  $V - A$ -Modell 110
    - XI.2.3 Flavour-Mischung im  $V - A$ -Modell 110
    - XI.2.4 Neutrale Ströme 113
  - XI.3 Vektorbosonen der schwachen Wechselwirkung 114
    - XI.3.1 Unitaritätsgrenze 114
    - XI.3.2 Schwache Bosonen 115
- 

Die dritte Wechselwirkung der Elementarteilchen, neben den elektromagnetischen und starken Kräften, ist die schwache Wechselwirkung. Wie durch deren Bezeichnung angedeutet wird, ist diese Wechselwirkung in niederenergetischen Phänomenen üblicherweise (viel) schwächer als die zwei anderen. Sie darf aber nicht einfach vernachlässigt werden, weil sie oft Prozesse erlaubt, die in der QED und der QCD nicht stattfinden können. Dies geht mit der Verletzung verschiedener Symmetrien der elektromagnetischen und starken Wechselwirkungen (Abschn. XI.1) zusammen. Zur Beschreibung der entsprechenden Prozesse wurden mehrere Modelle eingeführt, je nach der Entdeckung neuer erlaubter Prozesse (Abschn. XI.2).

Trotz der sukzessiven Verbesserungen bleibt das resultierende Modell unbefriedigend, jetzt aber aus theoretischen Gründen. Eine weitere Änderung des Modells ist möglich, auf Kosten der Einführung von ein paar neuen (Austausch-)Teilchen mit Spin 1 (Abschn. XI.3). Die Letzteren sollen aber eine Masse haben, was wieder zu Probleme führt. . . , die sich nur in einer Theorie lösen lassen, in der die schwache Wechselwirkung mit der QED kombiniert wird, was im nächsten Kapitel behandelt wird.

### XI.1 Symmetrieverletzungen

Ein Merkmal der schwachen Wechselwirkung ist die Tatsache, dass sie viele globale Symmetrien der QED und der QCD verletzt. Somit können Prozesse stattfinden, die im Rahmen der elektromagnetischen und starken Wechselwirkungen verboten sind.

In diesem Abschnitt werden mehrere Beispiele solcher experimentell beobachteten Symmetrieverletzenden Prozesse diskutiert.



### XI.1.1 Verletzung der Erhaltung der Flavour-Quantenzahlen

In der QED und der QCD sind die leichtesten Hadronen, die eine gegebene Flavour-Quantenzahl (Strangeness, Charm, Beauty) tragen, stabil. Dies gilt auch für die geladenen Pionen — die „Upness“ oder „Downness“ tragen.

In der Natur können alle diese Teilchen aber eigentlich zerfallen:

$$\begin{aligned}\pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ K^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ &\quad \pi^+ + \pi^0 \\ D^0 &\rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^0 \\ &\quad \vdots\end{aligned}$$

Dabei werden Upness and Downness — sowie natürlich Isospin — in den ersten zwei Prozessen nicht erhalten. Die zwei Zerfallskanäle des  $K^+ = u\bar{s}$  verletzen die Erhaltung der Strangeness. Schließlich verletzt der Zerfall des  $D^0 = c\bar{u}$  die Erhaltung des Charms — dazu wird in dem angegebenen Zerfallskanal Strangeness erzeugt.

Eine Besonderheit dieser Zerfälle ist die relativ lange Lebensdauer des zerfallenden Hadrons, etwa  $10^{-8}$  s für die geladenen Pionen,  $10^{-10}$ – $10^{-8}$  s für die Kaonen oder ca.  $10^{-12}$  s für die Mesonen mit Charm oder Beauty. Diese Lebensdauern sind mit denen des neutralen Pions ( $8 \times 10^{-17}$  s) oder der durch die starke Wechselwirkung zerfallenden Teilchen ( $10^{-23}$ – $10^{-21}$  s) zu vergleichen.

### XI.1.2 Paritätsverletzung

Die Flavour-Quantenzahlen könnten als „zufällige“ Erhaltungsgrößen betrachtet werden, die zwar interessante aber nicht tiefgreifende Symmetrien der QED und QCD widerspiegeln, und somit ohne weiteres verletzt werden können. Die schwache Wechselwirkung verletzt aber noch weitere Symmetrien, anfangend mit der Symmetrie der Raumzeit unter Raumspiegelung.

#### XI.1.2a Das „theta-tau Puzzle“

Was sich später als das positiv geladene Kaon  $K^+$  erwiesen hat, wurde Mitte der 1950er Jahre als zwei unterschiedliche Teilchen identifiziert, und zwar einerseits als das „ $\theta^+$ “ — mit dem Zerfallskanal  $\theta^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ , entsprechend der Parität  $+1$  im Endzustand —, andererseits als das „ $\tau^+$ “, <sup>(62)</sup> das in drei Pionen zerfallen kann — z.B.  $\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$  oder  $\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ , entsprechend einem Endzustand mit Parität  $-1$  —, obwohl es die gleiche Masse und den gleichen Spin wie das  $\theta^+$  hat.

Heutzutage ist klar geworden, dass es sich dabei um verschiedene Zerfallskanäle eines einzelnen Teilchens mit negativer Parität handelt. Dabei ist die Parität aber in den Zerfällen in den 2-Pionen-Kanal nicht erhalten, was in der QED oder der starken Wechselwirkung verboten ist.

Diese Identifikation des  $\theta^+$  mit dem  $\tau^+$  wurde 1956 durch T.D.Lee<sup>(be)</sup> and C.N.Yang<sup>(bf)</sup> vorgeschlagen, nachdem sie gefunden hatten, dass keines der damals existierenden experimentellen Ergebnisse die Erhaltung der Parität in schwachen Prozessen testete [35].

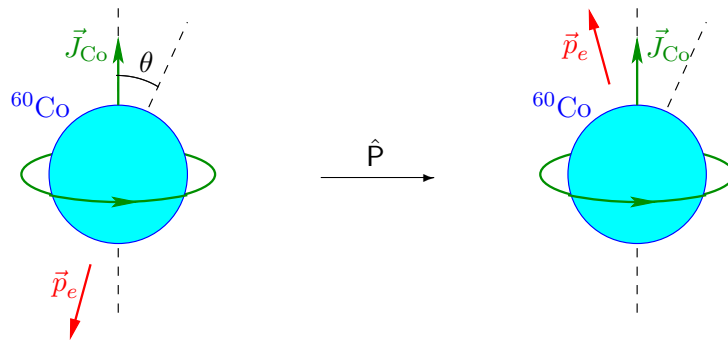
#### XI.1.2b Das Wu-Experiment

Kurz nach dem Vorschlag von Lee & Yang, dass die Erhaltung der Parität in schwachen Prozessen systematisch experimentell geprüft werden sollte, hat C.S.Wu<sup>(bg)</sup> den Zerfall von polarisierten

<sup>(62)</sup> Dieses historische  $\tau^+$ -Meson sollte nicht mit dem Antiteilchen zum  $\tau$ -Lepton verwechselt werden.

<sup>(be)</sup> T. D. LEE, 1926– <sup>(bf)</sup> C. N. YANG, 1922– <sup>(bg)</sup> C. S. WU, 1912–1997



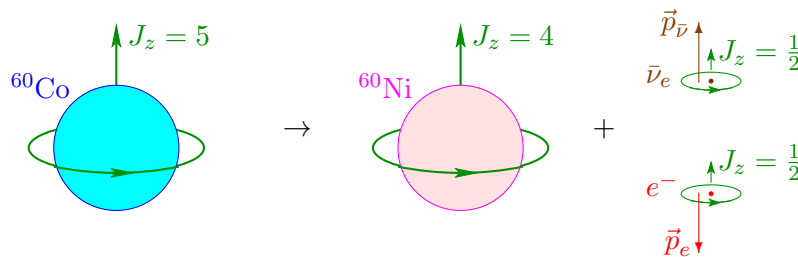


**Abbildung XI.1** – Emissionsrichtung des Elektrons im Wu-Experiment (links) und im raumgespiegelten Prozess (rechts).

Kobalt-60 Atomkernen untersucht [36].<sup>(63)</sup> Dabei wurde gefunden, dass die Elektronen bevorzugt entgegen der Richtung des Kernspins  $\vec{J}_{Co}$  emittiert werden, d.h. mit einem Polarwinkel  $\theta > 90^\circ$ , wie in Abb. XI.1 dargestellt wird. Wenn  $\vec{p}_e$  den Impuls des Elektrons im Ruhesystem des  $^{60}Co$ -Kerns bezeichnet, dann nimmt der Erwartungswert des Skalarprodukts  $\vec{p}_e \cdot \vec{J}_{Co}$  über viele Zerfälle einen negativen Wert an.

Betrachtet man den raumgespiegelten Prozess, so werden die Richtungen der Impulse der emittierten Elektronen invertiert — Impulse sind Vektoren —, während die Richtung des Kernspins ungeändert bleibt — der Spin ist ein axialer Vektor. In diesem raumgespiegelten Experiment wären die Elektronen also vorzugsweise parallel zum Kernspin (Polarwinkel  $\theta < 90^\circ$ ) emittiert, im Gegensatz zum echten Experiment. In der Natur wird diese Möglichkeit aber nicht realisiert! Die eigentlichen Zerfallsraten für die links und rechts dargestellten Zerfälle — d.h. für einen Prozess und den raumgespiegelten — sind unterschiedlich, was eine Verletzung der Parität darstellt.

Abbildung XI.2 gibt eine alternative schematische Darstellung dieses Experiments, in der die Spins der Teilchen präzisiert werden. Im Ruhesystem des  $^{60}Co$ -Kerns bleibt der Tochter- $^{60}Ni$ -Kern auch fast in Ruhe, während das Elektron und das Antineutrino in entgegengesetzte Richtungen emittiert werden. Dabei sieht man, dass das Antineutrino  $\bar{\nu}_e$  wegen der Erhaltung des Drehimpulses eine positive Helizität  $h = +1$  hat.



**Abbildung XI.2** – Schematische Darstellung der Spinorientierungen im Wu-Experiment.

Betrachtet man dann das (Anti)Neutrino als masselos — was in diesem Experiment eine ausgezeichnete Näherung ist —, so ist die positive Helizität des Antineutrinos äquivalent zu dessen Rechtshändigkeit (§ IV.3.3 c).

Falls die CP-Symmetrie gilt, sollen (Elektron-)Neutrinos wiederum linkshändig sein, was durch Goldhaber<sup>(bh)</sup> und Mitarbeiter in einem Elektroneneinfang-Experiment bestätigt wurde [38].<sup>(64)</sup>

<sup>(63)</sup>Weitere experimentelle Details können z.B. in [37], Experiment 45, gefunden werden.

<sup>(64)</sup>Vgl. auch Experiment 49 in [37].

<sup>(bh)</sup>M. GOLDHABER, 1911–2011

### XI.1.2c Pionzerfall

In ihrem Artikel schlugen Lee & Yang noch vor, dass eine mögliche Verletzung der Parität durch die schwache Wechselwirkung im Zerfall des positiven Pions in ein Antimyon und das zugehörige Neutrino beobachtet werden:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu. \quad (\text{XI.1})$$

Im Ruhesystem des Spin-0-Pions werden die Zerfallsprodukte nämlich in entgegengesetzte Richtungen emittiert. Um den Drehimpuls zu erhalten, sollen die Spins ebenfalls in entgegengesetzten Richtungen orientiert werden, so dass die beiden Teilchen die gleiche Helizität haben, entweder positiv oder negativ.

Experimentell wird das Antimyon immer mit  $h = -1$  beobachtet,<sup>(65)</sup> was wieder eine Verletzung der Parität signalisiert — wäre die Parität erhalten, so sollte das Antimyon in 50% der Fälle die Helizität  $+1$  haben.

Wiederum bedeutet die Helizität des  $\mu^+$ , dass das (Myon-)Neutrino ebenfalls eine negative Helizität hat.

### XI.1.3 Verletzung der Ladungskonjugation

Experimentell kann man auch den ladungskonjugierten Prozess zum Zerfall (XI.1) untersuchen, und zwar den Zerfall des negativ geladenen Pions

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu. \quad (\text{XI.2})$$

Wieder müssen das Myon und das Antineutrino dieselbe Helizität haben, um den Drehimpuls zu erhalten. Hier findet man, dass das Myon, und daher das  $\bar{\nu}_\mu$ , immer die Helizität  $+1$  hat. Dies bedeutet, dass die Endteilchen des Prozesses (XI.2) nicht den ladungskonjugierten Zustand zu denen des Zerfalls (XI.1) darstellen, weil  $\hat{C}$  die Helizität eines Teilchens unverändert lässt. In diesen Prozessen (XI.1)–(XI.2) wird (neben der Parität) die Ladungskonjugation also verletzt.

Dagegen findet man, dass die Pionzerfallsprozesse (XI.1) und (XI.2)  $\hat{C}\hat{P}$ -konjugiert zueinander sind.

### XI.1.4 CP-Verletzung

### XI.1.5 Zeitumkehrverletzung

} später

## **XI.2 Phänomenologische Modelle**

In diesem Abschnitt werden einige wichtigen Modelle dargestellt, die zur Beschreibung der schwachen Prozesse entwickelt wurden.

### XI.2.1 Fermi-Modell

Ursprünglich wurde die schwache Wechselwirkung eingeführt, um den  $\beta$ -Zerfall des Neutrons

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (\text{XI.3})$$

zu beschreiben. Zu diesem Zweck hat Fermi 1933 ein Modell entwickelt [41], das (in moderner Formulierung) auf der Lagrange-Dichte

$$\hat{\mathcal{L}}_I^{\text{Fermi}} = -G'_F \left( \hat{\psi}_p \gamma^\rho \hat{\psi}_n \hat{\psi}_e \gamma_\rho \hat{\psi}_{\nu_e} + \hat{\psi}_n \gamma^\rho \hat{\psi}_p \hat{\psi}_{\nu_e} \gamma_\rho \hat{\psi}_e \right) \quad (\text{XI.4})$$

<sup>(65)</sup>Genauer deutet die Winkelverteilung des im Zerfall des Antimyons erzeugten Positrons auf die Polarisation des Antimyons entlang dessen Flugrichtung hin [39, 40].

beruht. Dabei sind  $\hat{\psi}_n, \hat{\psi}_p, \hat{\psi}_e, \hat{\psi}_{\nu_e}$  Dirac-Spinorfeldoperatoren und  $\hat{\bar{\psi}}_n, \hat{\bar{\psi}}_p, \hat{\bar{\psi}}_e, \hat{\bar{\psi}}_{\nu_e}$  deren adjungierte Felder. Die Kopplungskonstante für die Stärke der Wechselwirkung zwischen diesen Feldoperatoren ist  $G'_F \simeq 0,974 G_F \approx G_F$ , wobei  $G_F \simeq 1,166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  *Fermi-Kopplungskonstante* heißt.<sup>(66)</sup>

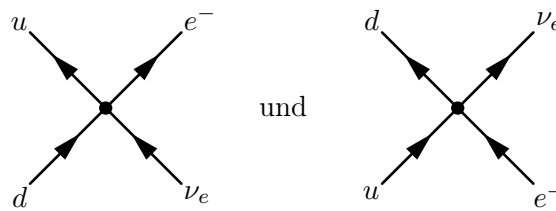
Wendet man dieses Modell auf Quarks an, statt auf Nukleonen, so schreibt man

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{\text{Fermi}} = -G'_F \left( \hat{\bar{\psi}}_u \gamma^\rho \hat{\psi}_d \hat{\bar{\psi}}_e \gamma_\rho \hat{\psi}_{\nu_e} + \hat{\bar{\psi}}_d \gamma^\rho \hat{\psi}_u \hat{\bar{\psi}}_{\nu_e} \gamma_\rho \hat{\psi}_e \right) \quad (\text{XI.5})$$

mit den Feldoperatoren  $\hat{\psi}_d, \hat{\psi}_u$  für  $d$  und  $u$  Quarks. Dementsprechend lautet der Prozess, der dem Zerfall (XI.3) auf der Quark-Ebene unterliegt

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (\text{XI.6})$$

Der Wechselwirkungsterm (XI.5) führt zu den zwei Vier-Fermionen-Vertices der Abb. XI.3. Dabei sieht man, dass die elektrische Ladung an den Vertices erhalten ist.



**Abbildung XI.3** – Vertices im Fermi-Modell (XI.5).

Dieses Modell war revolutionär, weil es auf der Idee beruhte, dass das Elektron und das Antineutrino „entstehen“ können, statt vor dem Zerfall schon im Neutron vorhanden zu sein.<sup>(67)</sup> Dazu sagte das Fermi-Modell zwei neue Prozesse vorher, und zwar den  $\beta^+$ -Zerfall ( $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ , wobei  $p$  ein in einem Atomkern gebundenes Proton ist) und den Elektroneneinfang ( $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ ), die kurz darauf entdeckt wurden.

### Bemerkungen:

\* Dieses Modell wird oft als eine Theorie *geladener vektorieller Ströme* bezeichnet. Es beschreibt nämlich die Kopplung von Viererströmen der Art  $\hat{j}_{ki}^\rho \equiv \hat{\bar{\psi}}_k \gamma^\rho \hat{\psi}_i$

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{\text{Fermi}} = -G'_F (\hat{j}_{ud}^\rho \eta_{\rho\sigma} \hat{j}_{e\nu_e}^\sigma + \hat{j}_{du}^\rho \eta_{\rho\sigma} \hat{j}_{\nu_e e}^\sigma),$$

wobei jeder Strom ein Lorentz-Vektor ist, der an einem Vertex seine elektrische Ladung ändert. Dagegen bleibt die durch den Strom getragene Baryonen- oder Leptonenzahl an jedem Vertex erhalten.

Im Gegensatz zum Strom  $\hat{j}_{ki}^\rho$  transportiert der vektorielle Viererstrom  $\hat{\bar{\psi}}_i \gamma^\rho \hat{\psi}_i$ , der in der QED mit dem Photon wechselwirkt [Gl. (IX.4)], das gleiche Teilchen vor und nach einem Vertex, so dass dessen elektrische Ladung unverändert bleibt: dabei spricht man von einem *neutralen Strom*.

\* In den Lagrange-Dichten (XI.4) oder (XI.5) ist der zweite Term hermitesch konjugiert zum ersten.

Im Fermi-Modell bleibt die Parität erhalten. Daher ist eine neue Beschreibung der schwachen Wechselwirkung nötig, um die Phänomene des § XI.1.2 beschreiben zu können.

<sup>(66)</sup> Der Unterschied zwischen der eigentlichen Fermi-Konstanten  $G_F$  und der Kopplungskonstanten  $G'_F$  in Gl. (XI.4), (XI.5) und (XI.7) wird in § XI.2.3 weiter diskutiert.

<sup>(67)</sup> Dabei betrachtete Fermi das zerfallende Neutron und das emittierte Proton als die zwei „inneren Quantenzustände“ des Nukleons.

## XI.2.2 $V - A$ -Modell

Kurz nach der Entdeckung der Paritätsverletzung haben Sudarshan<sup>(bi)</sup> & Marshak<sup>(bj)</sup> einerseits und Feynman & Gell-Mann andererseits das Fermi-Modell modifiziert gemäß [42, 43]<sup>(68)</sup>

$$\hat{\mathcal{L}}_I^{V-A} = -\frac{G'_F}{\sqrt{2}} \left[ \hat{\psi}_u \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \hat{\psi}_d \hat{\psi}_e \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \hat{\psi}_{\nu_e} + \hat{\psi}_d \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \hat{\psi}_u \hat{\psi}_{\nu_e} \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \hat{\psi}_e \right]. \quad (\text{XI.7a})$$

Wie im Fermi-Modell gibt diese Lagrange-Dichte vier-Fermionen-Vertices, wobei der Beitrag eines gegebenen Vertex zu einer Amplitude natürlich unterschiedlich von dem aus Gl. (XI.5) folgenden Beitrag ist.

**Bemerkung:** Bei diesem Modell handelt es sich wieder um eine Theorie geladener Ströme. Dabei hat man aber zwei Arten von Viererströmen, und zwar zum einen vektorielle Ströme  $\hat{\psi}_k \gamma^\rho \hat{\psi}_i$  und zum anderen pseudovektorielle Ströme  $\hat{\psi}_k \gamma^\rho \gamma_5 \hat{\psi}_i$ , was die Bezeichnung  $V - A$  (Vektor – Axialvektor) des Modells erklärt.

Definiert man (vgl. § IV.3.3 b) linkshändige Spinoren durch  $\hat{\psi}_{i,L} \equiv \mathcal{P}_L \hat{\psi}_i$ , so kann die Lagrange-Dichte des  $V - A$ -Modells noch nur durch diese Spinoren ausgedrückt werden

$$\hat{\mathcal{L}}_I^{V-A} = -2\sqrt{2} G'_F (\hat{\psi}_{u,L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{d,L} \hat{\psi}_{e,L} \gamma_\rho \hat{\psi}_{\nu_e,L} + \hat{\psi}_{d,L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{u,L} \hat{\psi}_{\nu_e,L} \gamma_\rho \hat{\psi}_{e,L}). \quad (\text{XI.7b})$$

Diese Form des Wechselwirkungsterms wird oft interpretiert, als ob die schwache Wechselwirkung nur die linkshändigen Anteile der Teilchen bzw. die rechtshändigen Anteile der Antiteilchen (kurz: „linkshändige Teilchen“ bzw. „rechtshändige Antiteilchen“) miteinander koppelte.

Da die Neutrinos nur über die schwache Wechselwirkung wechselwirken, spielen nur linkshändige Neutrinos bzw. rechtshändige Antineutrinos eine physikalische Rolle in Wechselwirkungen. Daher sagt man, dass Neutrinos immer linkshändig und Antineutrinos immer rechtshändig sind.

In der Bewegung eines freien Teilchens ist seine Chiralität nur dann erhalten, wenn das Teilchen masselos ist — die Chiralität stimmt dann mit der Helizität überein, die bei freien Teilchen erhalten bleibt. Sind Neutrinos masselos, so kommen sie wirklich nur mit immer derselben Chiralität vor. Haben sie aber eine Masse, dann existieren auch „rechtshändige Neutrinos“, die aber nicht an den bekannten Wechselwirkungen — außerhalb der Gravitation — teilnehmen.

## XI.2.3 Flavour-Mischung im $V - A$ -Modell

Bisher wurden nur die Terme im Wechselwirkungsterm der Lagrange-Dichte geschrieben, die den  $u/d$ -Quark-Viererstrom mit dem  $e^-/\nu_e$ -Viererstrom koppeln. Dadurch können nur die wenigen Prozesse zwischen den entsprechenden Teilchen beschrieben werden.

Um weitere Prozesse zu beschreiben — insbesondere solche, die zur Verletzung der Strangeness, des Charms oder der Beauty führen —, sollen zuerst geeignete Terme in die Lagrange-Dichte des  $V - A$ -Modells eingeführt werden. Beispielsweise erfordert das Modellieren der Zerfälle  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ ,  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$  und  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  die Einführung einerseits von zwei zusätzlichen Strömen  $\hat{\psi}_{\nu_\mu,L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\mu,L}$  und  $\hat{\psi}_{e,L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{s,L}$ , und andererseits von drei Termen, die den  $\mu^-/\nu_\mu$ -Viererstrom mit dem  $e^-/\nu_e$ -Viererstrom, dem  $u/d$ -Quark-Viererstrom oder dem  $u/s$ -Quark-Viererstrom koppeln, wie z.B.

$$\hat{\mathcal{L}}_I^{V-A} = -2\sqrt{2} G'_F (\hat{\psi}_{\nu_\mu,L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\mu,L} \hat{\psi}_{e,L} \gamma_\rho \hat{\psi}_{\nu_e,L} + \hat{\psi}_{\mu,L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\nu_\mu,L} \hat{\psi}_{\nu_e,L} \gamma_\rho \hat{\psi}_{e,L}) \quad (\text{XI.8})$$

für den Myon-Zerfall. Dabei weicht aber die Kopplungskonstante von derjenigen im Wechselwirkungsterm (XI.7b) ab.

Somit stellt sich die Frage der Stärke der Kopplung zwischen den neu eingeführten Strömen. Ist diese Kopplung universell, bis auf vielleicht die Einführung von für jeden Strom spezifischen

<sup>(68)</sup>In diesen Artikeln weicht die Definition von  $\gamma_5$  von Gl. (IV.13) ab.

<sup>(bi)</sup>E. C. G. SUDARSHAN, 1931–2018    <sup>(bj)</sup>R. MARSHAK, 1916–1992

„Ladungen“, ähnlich den elektrischen Ladungen  $Q_i$  in der QED [Gl. (IX.4)]? In diesem Fall weist der Vergleich der Wechselwirkungsterme (XI.7b) und (XI.8) z.B. darauf hin, dass der Quark-Strom  $\hat{\psi}_{u,L}\gamma^\rho\hat{\psi}_{d,L}$  mit einer Ladung kommt, die 0,974 mal der Ladung des leptonischen Stroms  $\hat{\psi}_{\nu_\mu,L}\gamma^\rho\hat{\psi}_{\mu,L}$  beträgt. Oder soll für jeden Wechselwirkungsterm zwischen zwei Strömen eine neue Kopplungskonstante eingeführt werden? Im letzteren Fall würde die Anzahl der Kopplungskonstanten, die freie Parameter des Modells sind, quadratisch mit der Anzahl der Ströme wachsen, während im ersteren Fall die Anzahl der freien Parameter maximal linear in der Anzahl der Ströme wäre, was schon ein viel einfacheres Modell ergeben würde.

Experimentell hat sich erwiesen, dass die Kopplung und somit die schwache Wechselwirkung zwischen geladenen Strömen universell ist. Dabei tragen die geladenen  $\ell^-/\nu_\ell$ -Ströme der Leptonen ( $\ell^- = e^-, \mu^-$  oder  $\tau^-$ ) alle die gleiche Ladung, die als 1 angenommen werden kann. Dagegen sind die Ladungen, die durch die geladenen  $q_{f_1}/q_{f_2}$ -Ströme der Quarks — mit  $q_{f_1} = u, c$  oder  $t$  und  $q_{f_2} = d, s$  oder  $b$  — getragen werden, nicht so einfach. Betrachtet man aber geladene Ströme, die der Umwandlung von positiv elektrisch geladenen Quarks (Typ  $q_{f_1}$ ) in passende Linearkombinationen  $q'_{f_2}$  der negativ geladenen Quarks (Typ  $q_{f_2}$ ) entsprechen, so erhält man geladene Ströme, die ebenfalls eine Ladung 1 bezüglich der schwachen Wechselwirkung tragen.

Diese Idee wird hiernach mehr detailliert dargestellt. Der Einfachheit halber werden in diesem Paragraph nur die  $u, d, s$  und  $c$  Quarks einerseits und nur die zwei leichtesten geladenen Leptonen  $e^-$  und  $\mu^-$  mit den zugehörigen Neutrinos andererseits berücksichtigt — mit Ausnahme von den Definitionen (XI.9) und (XI.12) der Lepton- und Quark-Dubletts. Die Verallgemeinerung auf alle Quark-Flavours bzw. Arten von Leptonen wird in späteren Kapiteln diskutiert.

### XI.2.3 a Fermionen-Generationen

Die bekannten elementaren Fermionen werden traditionell drei *Generations* zugeordnet, wobei jede Generation aus zwei Leptonen und zwei Quark-Flavours besteht. Darüber hinaus wird es sich als günstig erweisen, die Leptonen einer Generation — und zwar ein elektrisch geladenes Lepton und das zugehörige Neutrino — als ein Lepton-Dublett zu schreiben:

$$L_1 \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad L_2 \equiv \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad L_3 \equiv \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}, \quad (\text{XI.9a})$$

wobei die elektrisch neutralen in der ersten Komponente und die geladenen (mit  $Q = -1$ ) in der zweiten Komponente vorkommen. In ähnlicher Weise bilden die Quarks einer Generation — eines des „ $u$ -Typs“, d.h. mit elektrischer Ladung  $+\frac{2}{3}$ , und eines des „ $d$ -Typs“ mit elektrischer Ladung  $-\frac{1}{3}$  entsprechende Quark-Dubletts

$$Q_1 \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad Q_2 \equiv \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad Q_3 \equiv \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \quad (\text{XI.9b})$$

mit den positiv bzw. negativ geladenen Quarks in der ersten bzw. zweiten Komponente.

Es seien  $\hat{L}_i, \hat{Q}_i$  die entsprechenden Feldoperatoren und  $\hat{L}_{i,L}, \hat{Q}_{i,L}$  die zugehörigen linkshändigen Anteile, wie z.B.

$$\hat{L}_{1,L} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{\nu_e,L} \\ \hat{\psi}_{e,L} \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_{1,L} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{u,L} \\ \hat{\psi}_{d,L} \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung dieser Dubletts lässt sich die Lagrange-Dichte (XI.8) des  $V-A$ -Modells für die schwachen Prozesse zwischen den leptonischen  $\mu^-/\nu_\mu$ - und  $e^-/\nu_e$ -Viererströmen in der Form

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{V-A} = -2\sqrt{2}G_F \left[ \hat{L}_{2,L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{2,L} \hat{L}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{1,L} + \hat{L}_{2,L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{2,L} \hat{L}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{1,L} \right] \quad (\text{XI.10})$$

schreiben. Wiederum ist die Lagrange-Dichte (XI.7b) für schwache Prozesse zwischen Quarks und Leptonen der ersten Generation äquivalent zu

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{V-A} = -2\sqrt{2}G'_F \left[ \hat{Q}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{Q}_{1,L} \hat{L}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{1,L} + \hat{Q}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{Q}_{1,L} \hat{L}_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{1,L} \right], \quad (\text{XI.11})$$

wie sich einfach nachprüfen lässt.

Die Frage ist jetzt, wie diese Lagrange-Dichten verallgemeinert werden sollen, wenn zusätzliche Kopplungen zwischen Dubletts eingeführt werden.

### XI.2.3b Cabibbo-Winkel

Eine überraschende experimentelle Entdeckung ist, dass die anscheinend „natürlichen“ Quark-Dubletts (XI.9b) — bestehend je aus zwei Teilchen mit bestimmten Massen — bezüglich der schwachen Wechselwirkung nicht optimal sind. Um geladene Quark-Viererströme zu bilden, die einfach miteinander oder mit den geladenen Leptonen-Strömen wechselwirken, sollte man die unteren Komponenten der Dubletts, d.h. Quarks des  $d$ -Typs, durch Linearkombinationen davon ersetzen

$$Q'_1 \equiv \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \quad Q'_2 \equiv \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \quad Q'_3 \equiv \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}. \quad (\text{XI.12})$$

Betrachtet man momentan nur zwei Generationen,<sup>(69)</sup> so können  $d'$  und  $s'$  durch die  $d$  und  $s$  Quarks mithilfe einer Mischungsmatrix ausgedrückt werden:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}. \quad (\text{XI.13})$$

Dabei wird  $\theta_C$  *Cabibbo*<sup>(bk)</sup>-*Winkel* genannt.

**Bemerkung:** In Gl. (XI.12) und (XI.13) wurde die gewöhnliche Schreibweise benutzt, die die Mischung auf der Ebene der Teilchen darstellt. Tatsächlich handelt es sich um eine Mischung deren Feldoperatoren: die Freiheitsgrade  $d'$ ,  $s'$ ,  $b'$  stehen für Operatoren  $\hat{\psi}_{d'}$ ,  $\hat{\psi}_{s'}$ ,  $\hat{\psi}_{b'}$ , die Linearkombinationen der Operatoren  $\hat{\psi}_d$ ,  $\hat{\psi}_s$ ,  $\hat{\psi}_b$  sind.

Mit diesen neuen Dubletts, und ohne Änderung der Lepton-Dubletts, lässt sich die Lagrange-Dichte (XI.11) verallgemeinern auf

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{V-A} = -2\sqrt{2}G'_F \sum_{D_L, D'_L} \hat{D}_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L \hat{D}'_L \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}'_L, \quad (\text{XI.14})$$

wobei die Summe über alle Dubletts  $D, D' \in \{Q'_1, Q'_2, L_1, L_2\}$  läuft. Somit koppeln alle Dubletts mit der gleichen Stärke zueinander — vergleicht man diese Lagrange-Dichte mit der der QED, Gl. (IX.4), so tritt kein Analogon der elektrischen Ladungen auf.

Experimentell beträgt der gemessene Wert des Cabibbo-Winkels etwa  $\theta_C \approx 13^\circ$ , entsprechend  $|V_{us}| = 0,2252 \pm 0,0009$ .

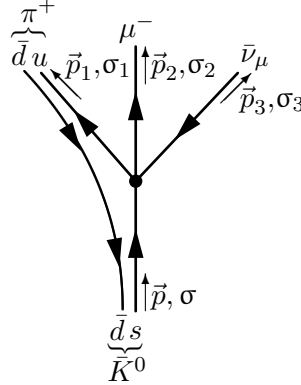
### Beispiele

Sei zunächst bemerkt das rein leptonische Prozesse, wie der Zerfall  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ , nur die Lepton-Dubletts  $L_1$  und  $L_2$  in Gl. (XI.14) hineinziehen, so dass der Cabibbo-Winkel dabei keine Rolle spielt.

<sup>(69)</sup>Die Verallgemeinerung auf drei Generationen wird in § XII.5.3 unten diskutiert.

<sup>(bk)</sup>N. CABIBBO, 1935–2010

Als erstes nicht-triviales Anwendungsbeispiel der verallgemeinerten Lagrange-Dichte (XI.14) kann man den Term für die Kopplung zwischen den  $u$ - und  $d$ -Quarks, dem Elektron  $e^-$  und dessen Neutrino  $\nu_e$  in der Lagrange-Dichte (XI.14) explizit schreiben. Der zugehörige Koeffizient ist  $-2\sqrt{2}G_F \cos \theta_C$ , der mit  $-2\sqrt{2}G'_F$  in Gl. (XI.7b) zu vergleichen ist. Dank dem Wert von  $\theta_C$ , der  $\cos \theta_C \approx 0,974$  gibt, findet man eigentlich das gleiche Ergebnis wieder.



**Abbildung XI.4** – Darstellung des Zerfalls  $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ .

Ein zweites Beispiel ist der Zerfall  $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$  (Abb. XI.4). Dieser Prozess wird durch den Term in der Summe von Gl. (XI.14) beschrieben, der den Strom für ein einlaufendes  $s$ -Quark ( $\hat{\psi}_s$ ) und ein auslaufendes  $u$ -Quark ( $\hat{\psi}_u$ ) mit dem Strom für ein auslaufendes Myon ( $\hat{\psi}_\mu$ ) und ein auslaufendes Antineutrino ( $\hat{\psi}_{\nu_\mu}$ ) koppelt. Der fermionische Strom entspricht trivial dem Dublett  $L_2$  der zweiten Generation. Für die Quarks tritt das  $u$ -Quark nur im Dublett  $Q'_1$  auf. Somit wird der Zerfall beschrieben durch den Term

$$\begin{aligned} -2\sqrt{2}G_F \hat{L}_{2,L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\rho & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{2,L} \hat{Q}'_{1,L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{Q}'_{1,L} &= -2\sqrt{2}G_F \hat{\psi}_{\mu,L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\nu_\mu,L} \hat{\psi}_{u,L} \gamma_\rho \hat{\psi}_{d',L} \\ &= -2\sqrt{2}G_F \sin \theta_C \hat{\psi}_{\mu,L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\nu_\mu,L} \hat{\psi}_{u,L} \gamma_\rho \hat{\psi}_{s,L}. \end{aligned}$$

Die Kopplung ist hier multipliziert mit  $\sin \theta_C \approx 0,225$ .

Nach Anwendungen der Feynman-Regeln des Kapitels VIII liefert dieser Term die Amplitude

$$\mathcal{M} = -\frac{i}{\sqrt{2}} G_F \sin \theta_C \bar{u}(\vec{p}_1, \sigma_1) \gamma^\rho (1 - \gamma_5) u(\vec{p}, \sigma) \bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) v(\vec{p}_2, \sigma_2),$$

wobei  $\vec{p}, \sigma$  der Impuls und die Helizität des einlaufenden  $s$ -Quarks sind, während sich die Indices 1, 2, 3 jeweils auf die auslaufenden  $u$ -Quark, Myon und  $\bar{\nu}_\mu$  beziehen. Unabhängig von den Werten der Impulse wird das Betragsquadrat jener Amplitude proportional zu  $\sin^2 \theta_C \approx 0,05$  sein.

### XI.2.4 Neutrale Ströme

Die Lagrange-Dichte (XI.14) beschreibt nur Wechselwirkungen zwischen geladenen Strömen der Art  $\hat{\psi}_k \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \hat{\psi}_i$  mit  $k \neq i$ , wobei die Teilchen  $i$  und  $k$  unterschiedliche elektrische Ladungen tragen. Theoretische Überlegungen, die unten in § XI.3.2 kurz erläutert werden, haben zur Vorhersage geführt, dass die schwache Wechselwirkung noch weitere Prozesse zwischen *neutralen Strömen* — und zwar Linearkombinationen von  $\hat{\psi}_i \gamma^\rho \hat{\psi}_i$  und  $\hat{\psi}_i \gamma^\rho \gamma_5 \hat{\psi}_i$  — enthält.

Diese schwachen neutralen Ströme besitzen aber nicht die einfache  $V-A$ -Struktur der geladenen Ströme. Sie sind nämlich der Form

$$\hat{\psi}_i (c_V \gamma^\rho - c_A \gamma^\rho \gamma_5) \hat{\psi}_i,$$

wobei die zwei Koeffizienten  $c_V, c_A$  im Allgemeinen ungleich sind und von der Teilchenspezies  $i$  abhängen — genauer findet man experimentell, dass sie nur von der elektrischen Ladung des Teilchens



abhängen. Bezeichnet man als  $c_V^u$  und  $c_A^u$  bzw.  $c_V^d$  und  $c_A^d$  die Koeffizienten für die obere bzw. untere Komponente eines Dubletts  $D \in \{Q'_1, Q'_2, L_1, L_2\}$ , so kann man einen neutralen Strom<sup>(70)</sup>

$$(\hat{j}^{\text{NC}})^\rho \equiv \sum_D \hat{D} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma^\rho(c_V^u - c_A^u\gamma_5) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma^\rho(c_V^d - c_A^d\gamma_5) \end{pmatrix} \hat{D} \quad (\text{XI.15a})$$

bilden. Dann lautet der Beitrag der neutralen Ströme zur Lagrange-Dichte der schwachen Wechselwirkung

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{\text{NC}} = -2\sqrt{2} G_F (\hat{j}^{\text{NC}})^\rho (\hat{j}^{\text{NC}})_\rho. \quad (\text{XI.15b})$$

Zum Vergleich lässt sich der Anteil (XI.14) der geladenen Ströme als

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{\text{CC}} = -2\sqrt{2} G_F (\hat{j}^{\text{CC}})^\rho (\hat{j}^{\text{CC}})_\rho^\dagger \quad (\text{XI.16a})$$

mit dem geladenen Strom<sup>(70)</sup>

$$(\hat{j}^{\text{CC}})^\rho \equiv \sum_D \hat{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma^\rho(\mathbb{1}_4 - \gamma_5) & 0 \end{pmatrix} \hat{D}, \quad (\hat{j}^{\text{CC}})_\rho^\dagger = \sum_D \hat{D} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma_\rho(\mathbb{1}_4 - \gamma_5) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}. \quad (\text{XI.16b})$$

umschreiben.

Die schwache Wechselwirkung neutraler Ströme wurde 1973 am CERN entdeckt, und zwar in der Untersuchung elastischer Streuprozesse  $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$ , in den weder geladene Ströme noch die elektromagnetische oder starke Wechselwirkungen eine Rolle spielen.

#### Bemerkungen:

\* Für Neutrinos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  und  $\nu_\tau$  gilt  $c_V = c_A$ . Somit spielen auch bei neutralen Strömen nur die linkshändigen Anteile von Neutrinos eine Rolle.

\* Der neutrale Strom (XI.15a) ist eine Summe von Termen, die jeweils nur ein einziges Dublett involvieren, statt unterschiedliche Dubletts miteinander zu mischen. Dementsprechend kann der Wechselwirkungsterm (XI.15b) den Flavour eines Quarks bzw. die Art eines Leptons nicht ändern. Diese bisher experimentell bestätigte Tatsache wird als die Abwesenheit von *Flavour-ändernden neutralen Strömen* bezeichnet.<sup>(71)</sup>

## XI.3 Vektorbosonen der schwachen Wechselwirkung

Trotz seiner Erfolge leidet das Modell bestehend aus der Summe der Lagrange-Dichten (XI.15) und (XI.16) — d.h. umfassend einerseits das  $V - A$ -Modell für geladene Ströme und andererseits die neutralen Ströme — unter einigen gravierenden theoretischen Problemen. In diesem Abschnitt wird eines dieser Probleme dargestellt, sowie eine mögliche zugehörige Lösung.

### XI.3.1 Unitaritätsgrenze

In allen bisher eingeführten phänomenologischen Modellen der schwachen Wechselwirkung wird die Fermi-Konstante  $G_F$  hineingezogen. Im Gegensatz zu den Kopplungskonstanten der QED und der QCD ist diese Konstante nicht dimensionslos. Dementsprechend ist das Verhalten von Wirkungsquerschnitten bei hoher Energie unterschiedlich, wie sich mithilfe dimensionaler Analyse argumentieren lässt.

Beispielsweise kann man zunächst die elastische Streuung eines Elektrons und eines Myons in der QED, oder äquivalent die elastische Streuung von zwei Quarks in der QCD betrachten. Der totale Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{tot}}$  für den Prozess hat die dimension einer Fläche, d.h. in natürlichen Einheiten  $[\sigma_{\text{tot}}] = [\text{E}^{-2}]$ .

<sup>(70)</sup>NC und CC stehen jeweils für *neutral current* und *charged current*.

<sup>(71)</sup>Auf Englisch spricht man von „flavor-changing neutral currents“, kurz FCNC.



Ist die Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  eines solchen Prozesses viel größer als die Massen der beteiligten Teilchen, so spielen die Letzteren keine Rolle: dann ist  $\sqrt{s}$  die einzige relevante Energieskala für den Prozess. In diesem Limes lässt sich  $\sigma_{\text{tot}}$  durch  $\sqrt{s}$ , die geeignete Kopplungskonstante  $e$  bzw.  $g_s$  — zur vierten Potenz, da die Amplitude zur niedrigsten Ordnung schon zwei Vertices enthält — und ein paar hier unwesentliche numerische Faktoren ausdrücken. Um die passende Dimension zu erhalten, ist eine einzige Kombination möglich, und zwar z.B.

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-) \underset{\sqrt{s} \gg m_\mu}{\propto} \frac{e^4}{(\sqrt{s})^2} \propto \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{s}, \quad (\text{XI.17})$$

entsprechend dem Verhalten der Rutherford-Formel (IX.14) oder des Wirkungsquerschnitts (IX.16).

Betrachtet man jetzt den totalen Wirkungsquerschnitt für einen schwachen Prozess wie die elastische Streuung  $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-$ , so sollen für  $\sqrt{s} \gg m_\mu$  die Massen der Teilchen nicht im Ausdruck für  $\sigma_{\text{tot}}$  auftauchen. Zur niedrigsten Ordnung in Störungsrechnung ist die Amplitude für den Prozess proportional zu  $G_F$ , so dass der Wirkungsquerschnitt proportional zu  $G_F^2$  ist. Damit  $\sigma_{\text{tot}}$  die passende Dimension hat, soll  $G_F^2$  — Dimension  $[\text{E}^{-4}]$  — noch mit dem Quadrat einer Energie multipliziert werden, d.h.

$$\sigma_{\text{tot}}(\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-) \underset{\sqrt{s} \gg m_\mu}{\propto} G_F^2 (\sqrt{s})^2. \quad (\text{XI.18})$$

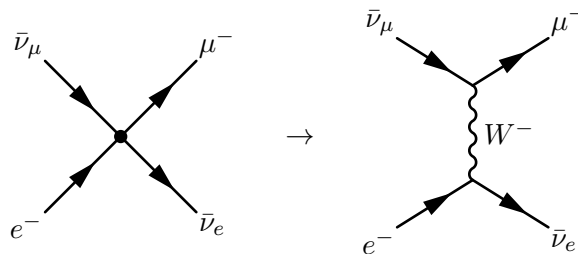
Ein solches Verhalten kann aber nicht realisiert werden — der Wirkungsquerschnitt darf nicht unendlich groß im Limes hoher Energien werden. Der Wirkungsquerschnitt ist nämlich mit der Streuamplitude verknüpft, und die Letztere ist proportional zu einem Streumatrixelement  $S_{\text{fi}}$ , das beschränkt bleiben soll, weil die Streumatrix unitär ist. Somit würde das Wachstum (XI.18) die Unitarität der Theorie verletzen — d.h. würde zu Wahrscheinlichkeiten größer als 1 führen —, was offensichtlich nicht richtig ist.

### XI.3.2 Schwache Bosonen

Eine sehr elegante Lösung zum Problem des Wachstums der Wirkungsquerschnitte in Modellen mit 4-Fermionen-Vertices beruht auf der Einführung von neuen, massiven Vektorteilchen, und zwar die sog.  $W^+$ -,  $W^-$ , und  $Z^0$ -Bosonen. Mit deren Hilfe kann ein 4-Fermionen-Vertex durch zwei Vertices mit je zwei Fermionen und einem (Vektor-)Boson ersetzt werden. Somit entspricht der Streuprozess  $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-$  den zwei sukzessiven Schritten

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow W^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-,$$

wie in Abb. XI.5 dargestellt wird. Die geladenen Ströme  $\hat{\psi}_{\nu_e, L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{e, L}$  und  $\hat{\psi}_{\nu_\mu, L} \gamma^\sigma \hat{\psi}_{\mu, L}$  wechselwirken also nicht direkt miteinander, sondern über den Austausch eines  $W^-$ -Bosons, wobei das Lorentz-Quadrat des Viererimpulses  $q$  des  $W^-$  gleich  $(\sqrt{s})^2$  ist.



**Abbildung XI.5** – Einführung des  $W^-$ -Bosons.

Sei  $m_W$  die Masse des  $W^\pm$ -Bosons und  $g_w$  die mit dem neuen Vertex assoziierte Kopplungskonstante. Dazu wird angenommen, dass die zwei Vertices des rechten Diagramms in Abb. XI.5 einen Faktor  $\frac{1}{2}$  liefern.<sup>(72)</sup> Unter Nutzung des Propagators (VIII.2c) für das massive Vektorboson, wobei

<sup>(72)</sup>Dieser Faktor wird im nächsten Kapitel genauer eingeführt.

hier  $q^2 = s$  gilt, lautet die Amplitude für das Diagramm

$$\frac{i}{2} \bar{v}_L(\bar{\nu}_e)(ig_w \gamma^\rho) u_L(e^-) \frac{-i\eta_{\rho\sigma}}{s - m_W^2} \bar{u}_L(\mu^-)(ig_w \gamma^\sigma) v_L(\bar{\nu}_\mu) = \frac{-g_w^2}{2(s - m_W^2)} \bar{v}_L(\bar{\nu}_e) \gamma^\rho u_L(e^-) \bar{u}_L(\mu^-) \gamma_\rho v_L(\bar{\nu}_\mu).$$

Für Schwerpunktsenergien  $\sqrt{s} \ll m_W$  reduziert sich die rechte Seite auf

$$\frac{g_w^2}{2m_W^2} \bar{v}_L(\bar{\nu}_e) \gamma^\rho u_L(e^-) \bar{u}_L(\mu^-) \gamma_\rho v_L(\bar{\nu}_\mu),$$

entsprechend der aus Gl. (XI.16) folgenden Amplitude für das linke Diagramm in Abb. XI.5, vorausgesetzt das Verhältnis  $g_w^2/2m_W^2$  mit  $2\sqrt{2}G_F$  identifiziert wird.

Diese Beobachtung deutet darauf hin, dass das  $V-A$ -Modell tatsächlich den niederenergetischen Limes eines Modells mit den  $W^-$ - und  $W^+$ -Bosonen darstellt, das nur für Energien kleiner als die Masse  $m_W$  gilt. Wiederum ist die durch Gl. (XI.15) beschriebene schwache Wechselwirkung zwischen neutralen Strömen in der Tat der niederenergetische Limes eines Modells, in dem die Wechselwirkung durch das elektrisch neutrale  $Z^0$ -Boson vermittelt wird.

Dank der Beziehung  $g_w^2 = 4\sqrt{2}G_F m_W^2$  ist die Kopplungskonstante  $g_w$  jetzt dimensionslos. Bei hohen Energien  $\sqrt{s} \gg m_W$  wird der Wirkungsquerschnitt für den Prozess  $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-$  somit proportional zu  $g_w^4/s^2$ , ähnlich wie in Gl. (XI.17), und daher fallend mit  $\sqrt{s}$ , statt wachsend wie im Fall eines 4-Fermionen-Vertex. Daher ist die Unitarität im neuen Modell mit Vektorbosonen auf erster Sicht nicht mehr verletzt

## Literatur zum Kapitel XI

- Cottingham & Greenwood, *An introduction to the Standard Model of particle physics* [44], Kap. 9.
- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 9.
- Halzen & Martin, *Quarks and Leptons* [22], Kap. 12.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [6], Kap. 21.

# KAPITEL XII

## Elektroschwaches Standardmodell

---

|         |                                                |     |
|---------|------------------------------------------------|-----|
| XII.1   | Eichtheorien                                   | 117 |
| XII.1.1 | Notwendigkeit nach Renormierbarkeit            | 117 |
| XII.1.2 | Eichinvarianz                                  | 119 |
| XII.2   | Lagrange-Dichte des Standardmodells            | 120 |
| XII.2.1 | Bausteine des Standardmodells                  | 120 |
| XII.2.2 | Lagrange-Dichte des elektroschwachen Sektors   | 122 |
| XII.3   | Spontane Symmetriebrechung. Higgs-Boson        | 124 |
| XII.3.1 | Spontane Symmetriebrechung                     | 124 |
| XII.3.2 | Higgs-Boson                                    | 125 |
| XII.4   | Vektorbosonen im Standardmodell                | 127 |
| XII.5   | Fermionen im Standardmodell                    | 129 |
| XII.5.1 | Wechselwirkung der Leptonen mit dem Higgs-Feld | 129 |
| XII.5.2 | Quark-Massen                                   | 130 |
| XII.5.3 | CKM-Matrix und CP-Verletzung                   | 131 |

---

Im vorigen Kapitel wurden unterschiedliche Modelle der Schwachen Wechselwirkung diskutiert, entsprechend sukzessiven Verfeinerungen, um experimentelle Daten zu beschreiben. Trotz deren Nützlichkeit besitzen diese phänomenologischen Modelle aber viele unerklärten Parameter und beruhen nicht auf einem einfachen Prinzip wie die QED und die QCD.

In Abschn. XII.1 wird argumentiert, dass ein solches grundlegendes Prinzip — die Invarianz der Theorie unter lokalen Symmetrien — tatsächlich notwendig ist, damit die Theorie wohldefiniert ist. Diese Forderung fungiert somit als Auswahlkriterium für mögliche Theorien. In Abschn. XII.2 wird dann ein passendes Modell eingeführt, das sowohl die schwache Wechselwirkung als auch die QED und die QCD umfasst, wobei die zwei Ersteren zu einer *elektroschwachen Wechselwirkung* vereinheitlicht werden. Die folgenden Abschnitte befassen sich dann mit Vorhersagen im Rahmen dieses Modells, und zwar im Higgs-Sektor (Abschn. XII.3), im Eichbosonen-Sektor (Abschn. XII.4) und schließlich im Fermionen-Sektor (Abschn. XII.5).

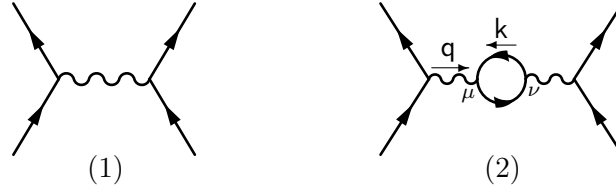
### XII.1 Eichtheorien

Die Wechselwirkungen des Standardmodells sind Theorien mit Invarianz unter lokalen Symmetrietransformationen der Felder, sog. Eichtransformationen. Dies gewährleistet die Renormierbarkeit der Theorie, schränkt aber die möglichen Terme ein, die in der Theorie auftreten dürfen.

#### XII.1.1 Notwendigkeit nach Renormierbarkeit

Die in Teil B eingeführte Berechnung der Zerfallsraten oder Wirkungsquerschnitte beruht auf Störungsrechnung, wobei bisher nur der Beitrag der niedrigsten Ordnung, entsprechend den einfachsten Feynman-Diagrammen, berücksichtigt wurde. Eine wichtige Frage ist dann natürlich, ob die höheren Ordnungen der Störungstheorie klein gegen die niedrigste Ordnung sind, damit der störungsrechnerische Ansatz überhaupt Sinn macht.

Um diese Frage zu beantworten, kann man als Beispiel einen zwei-nach-zwei-Streuprozess in der QED betrachten, mit zwei Fermionen im Anfangs- und zwei Fermionen im Endzustand. Das Feynman-Diagramm für die niedrigste Ordnung in Störungsrechnung — das sog. „Baum-Niveau“, entsprechend der baumartigen Topologie des Diagramms — und eines der Diagramme für die nächste Ordnung — hier mit einer einzigen Fermionen-Schleife — werden in Abb. XII.1 dargestellt.



**Abbildung XII.1** – „Baum-Niveau“ (1) und 1-Schleifen-Niveau (2) für einen 2-nach-2-Streuprozess.

Im Vergleich zur Amplitude für das Baum-Niveau (1) lautet die Größenordnung der Amplitude entsprechend dem Feynman-Diagramm (2):

$$\mathcal{M}(2) \sim \mathcal{M}(1) * \text{Diagram (2)}$$

Die Anwendung der Feynman-Regeln (Kap. VIII) gibt

$$\mathcal{M}(2) \sim \mathcal{M}(1) * \frac{i e^2}{q^2} \int \text{Tr} \left[ i \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} i \gamma^\nu \frac{i(\not{q} + \not{k} + m)}{(q+k)^2 - m^2} \right] \frac{d^4 k}{(2\pi)^4},$$

wobei  $m$  die Masse des Fermions in der Schleife bezeichnet. Der globale Faktor  $i$  (Regel ⑦) wurde nicht explizit eingeführt, weil er schon in der Amplitude  $\mathcal{M}(1)$  auftritt. Die Formeln (IV.8)–(IV.10) zusammen mit  $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma) = 4(\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu})$  liefern

$$\mathcal{M}(2) \sim \mathcal{M}(1) * \frac{-4i e^2}{q^2} \int \frac{k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu + 2k^\mu k^\nu - \eta^{\mu\nu} (k \cdot q + k^2 - m^2)}{(k^2 - m^2)[(q+k)^2 - m^2]} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

Das Integral im rechten Glied ist aber divergent, und zwar auf zwei Weisen:

- „Auf der Massenschale“: für  $k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$  und  $k_0 = -q_0 \pm \sqrt{(\vec{q} + \vec{k})^2 + m^2}$  verschwindet der Nenner.

Diese Divergenz lässt sich aber unter Verwendung einer genaueren Definition der Propagatoren vermeiden: fügt man einen Term  $i\varepsilon$  im Nenner hinzu, wobei  $\varepsilon = 0^+$  ein infinitesimal kleiner positiver Parameter ist, so findet man, wie es mit diesen Polen umgegangen wird.

- „Ultraviolett-Divergenz“: für große Werte von  $|\vec{k}|$  ist das Integral ebenfalls divergent.

Der letzte Teil des Zählers im Integranden lässt sich in der Tat wie folgt umformen:

$$k \cdot q + k^2 - m^2 = k^2 + \frac{1}{2}[(q+k)^2 - q^2 - k^2] - m^2 = \frac{1}{2}(k^2 - m^2) + \frac{1}{2}[(q+k)^2 - m^2] - \frac{1}{2}q^2.$$

Daher enthält das Integral einen Anteil

$$-\eta^{\mu\nu} \left\{ \int \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} - \frac{q^2}{2} \int \frac{1}{(k^2 - m^2)[(q+k)^2 - m^2]} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \right\},$$

wobei ein Summand mithilfe der Substitution  $q+k \rightarrow k$  umgeschrieben wurde. Das erste Integral ist quadratisch divergent — d.h.  $\propto \Lambda^2$ , wobei  $\Lambda$  die obere Grenze des Integrals über  $|\vec{k}|$  bezeichnet, die dann gegen unendlich gehen soll —, das zweite logarithmisch divergent (d.h.  $\propto \ln \Lambda$ ).

Die durch die höheren Ordnungen bedingten Korrekturen scheinen also im Allgemeinen nicht klein, sondern gar unendlich zu sein, was katastrophal aussieht. In diesem Fall wäre Störungsrechnung tatsächlich ganz unbrauchbar.

Eigentlich existieren Klassen von sog. *renormierbaren* Theorien, in denen sich alle solche Divergenzen kürzen — Ordnung für Ordnung in Störungsrechnung —, wenn man Beziehungen zwischen physikalisch messbaren Größen betrachtet. In solchen Theorien kann man also sinnvoll Störungsrechnung durchführen und dabei endliche Ergebnisse erhalten.

Somit kann man die Argumentation herumdrehen, und vom Anfang an erfordern, dass die Theorie renormierbar — und damit wohldefiniert — sein soll.

### XII.1.2 Eichinvarianz

In der Quantenfeldtheorie zeigt man, dass die folgenden Bedingungen hinreichend sind, damit eine Theorie renormierbar ist

- die Lagrange-Dichten für die Vektorfelder — in der uns bekannten Elementarteilchenphysik handelt es sich um die Photonen, Gluonen,  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen — sollen *eichinvariant* sein;
- die Lagrange-Dichte enthält nur Wechselwirkungsterme zwischen drei (fermionischen oder bosonischen) oder vier (bosonischen) Feldern.<sup>(73)</sup>

Dabei bedeutet „Eichinvarianz“, dass die Theorie invariant unter bestimmten *lokalen* Transformationen der Felder sein soll, ähnlich den Transformationen der Spinoren in Gl. (X.18) mit  $x$ -abhängigen Phasen  $\alpha(x)$  und mit einer gleichzeitigen Transformation der Vektorfelder wie in Gl. (III.6) für das Vektorpotential des Elektromagnetismus.

Betrachtet man z.B. den Fall der QED, so ist es wohl bekannt, dass die Maxwell-Gleichungen invariant sind unter den lokalen Transformationen [vgl. Gl. (III.6)]

$$\hat{A}^\mu(x) \rightarrow \hat{A}'^\mu(x) = \hat{A}^\mu(x) + \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha(x) \quad (\text{XII.1})$$

wobei  $\alpha(x)$  eine skalare Funktion und  $e$  die Kopplungskonstante sind. Wie in der Bemerkung unter Gl. (III.9) schon erwähnt wurde, verhindert diese Eichinvarianz das Einführen eines Massenterms für das Vektorfeld  $\hat{A}^\mu$ .

Solche Massenterme sind — unabhängig, ob das Feld skalar, spinoriell, oder vektoriell ist — quadratische Terme in der Lagrange-Dichte. Damit die Letztere Lorentz-invariant bleibt, ist der einzige mögliche Beitrag für ein Vektorfeld der Art  $\frac{1}{2}m^2 \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu$ .<sup>(74)</sup> Unter einer Eichtransformation (XII.1) wird aber ein solcher Term zu

$$\frac{1}{2}m^2 \hat{A}'_\mu \hat{A}'^\mu = \frac{1}{2}m^2 \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu + \frac{m^2}{e} \hat{A}^\mu \partial_\mu \alpha + \frac{m^2}{e^2} \partial^\mu \alpha \partial_\mu \alpha \neq \frac{1}{2}m^2 \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu,$$

d.h. der Term verletzt die Invarianz und darf daher nicht auftreten. Somit dürfen in eichinvarianten Theorien die Vektorfelder keinen Massenterm in der Lagrange-Dichte haben. Das ist ja kein Problem für die zwei eichinvarianten Wechselwirkungen, die bisher in dieser Vorlesung behandelt wurden, und zwar die QED und die QCD, weil die Photonen und die Gluonen masselos sind. Will man aber eine eichinvariante Theorie für die schwache Wechselwirkung finden, so werden die Massen der  $W^\pm$  und  $Z^0$ -Bosonen problematisch.

Für ein zu  $\hat{A}^\mu$  gekoppeltes skalares Teilchen lautet die Eichtransformation, die gleichzeitig zur Transformation (XII.1) des Vektorfeldes stattfinden soll

$$\hat{\phi}(x) \rightarrow \hat{\phi}'(x) = e^{-i\alpha(x)} \hat{\phi}(x), \quad \hat{\phi}^\dagger(x) \rightarrow \hat{\phi}'^\dagger(x) = e^{i\alpha(x)} \hat{\phi}^\dagger(x). \quad (\text{XII.2})$$

Dann kann ein Massenterm  $m^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}$  problemlos in der Lagrange-Dichte auftreten, da er Lorentz- und eichinvariant ist. Somit können Spin-0-Teilchen in einer eichinvarianten Theorie eine Masse haben.

<sup>(73)</sup>Dabei können die Fermionen bzw. die Bosonen nur den Spin  $\frac{1}{2}$  bzw. den Spin 0 oder 1 haben, was alle bisher betrachteten Elementarteilchen umfasst.

<sup>(74)</sup>Der Faktor  $\frac{1}{2}m^2$  liefert die gute Bewegungsgleichung, und zwar die Proca-Gleichung, wenn man die Euler-Lagrange-Gleichung für die Lagrange-Dichte betrachtet.

Im Fall eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens verhalten sich die links- und rechtshändigen Anteile von Dirac-Spinoren manchmal unterschiedlich unter Wechselwirkungen — insbesondere unter der schwachen Wechselwirkung —, so dass jedem Anteil eine Masse zugeordnet sollte. Dabei lautet aber ein solcher Massenterm z.B.

$$m\hat{\psi}_L\hat{\psi}_L = m\hat{\psi}\mathcal{P}_R\mathcal{P}_L\hat{\psi} = 0$$

[vgl. Gl. (IV.43b)], d.h. das Teilchen soll masselos sein. Hier auch stellt also die Masse der fermionischen Elementarteilchen ein Problem dar, um eine konsistente Theorie zu bilden.

Die Aufgabe einer zufriedenstellenden Theorie für die schwache Wechselwirkung wird also vielfach sein. Einerseits soll sie eichinvariant sein, um deren Renormierbarkeit zu gewährleisten. Dazu soll sie noch erklären, wieso die schwachen Bosonen ( $W^\pm$ ,  $Z^0$ ) und die Fermionen (Leptonen und Quarks) eine Masse erhalten können. Eigentlich wird das Letztere möglich sein, indem die Theorie ein neues Feld enthält, und zwar ein Skalarfeld, das mit den anderen Feldern wechselwirkt, und ihnen somit unter Umständen eine Masse geben kann.

## XII.2 Lagrange-Dichte des Standardmodells

In diesem Abschnitt wird das durch Glashow<sup>(bl)</sup>, Salam<sup>(bm)</sup>, Weinberg<sup>(bn)</sup> und andere konstruierte Standardmodell der Elementarteilchenphysik dargestellt.

### XII.2.1 Bausteine des Standardmodells

#### XII.2.1 a Lokale Symmetriegruppen

Am Herzen des Standardmodells der Elementarteilchenphysik liegt die *Eichgruppe*, unter dessen Transformationen die Theorie invariant bleibt. Somit ist die Symmetriegruppe des Standardmodells die Produktgruppe

$$\text{SU}(3)_c \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y. \quad (\text{XII.3})$$

- Die  $\text{SU}(3)_c$ -Gruppe stellt die Symmetriegruppe für die starke Wechselwirkung dar, wobei der tiefgestellte Index  $c$  daran erinnert, dass die Gluonen an die Farbe („color“) koppeln.
- $\text{SU}(2)_L$  ist die Eichgruppe der schwachen Wechselwirkung, insbesondere für deren linkshändigen Anteil. Die dazu zugehörigen Vektorbosonen  $\hat{W}_1^\rho$ ,  $\hat{W}_2^\rho$ ,  $\hat{W}_3^\rho$ , die später die massiven  $W^\pm$  und  $Z^0$ -Bosonen liefern werden, bilden ein  $\text{SU}(2)$ -Triplet. Die Ladung, an die die  $\hat{W}_i^\rho$ -Bosonen koppeln, wird *elektroschwacher* oder kurz *schwacher Isospin* genannt und als  $I^W$  bezeichnet.
- $\text{U}(1)_Y$  ist eine Eichgruppe, die teilweise zur elektromagnetischen Wechselwirkung und teilweise zur schwachen Wechselwirkung zwischen neutralen Strömen führt. Die entsprechende Ladung ist die sog. *Hyperladung*, bezeichnet als  $Y_W$  oder manchmal  $Y$ . Das Vektorboson, das an die Hyperladung koppelt, wird als  $\hat{B}^\rho$  geschrieben. Später wird es (teilweise) das Photon liefern, sowie zum  $Z^0$ -Boson beitragen.

Der  $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ -Anteil wird als *elektroschwache Wechselwirkung* bezeichnet.

#### XII.2.1 b Materie-Teilchen

Die „Materie“-Teilchen, die diesen Wechselwirkungen unterliegen, sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen, die zwei Arten gehören:

##### Leptonen

Erstens kommen drei  $\text{SU}(2)_L$ -Dubletts von linkshändigen Dirac-Teilchen, die der starken Wechselwirkungen nicht unterliegen

<sup>(bl)</sup>S. L. GLASHOW, 1932–    <sup>(bm)</sup>A. SALAM, 1926–1996    <sup>(bn)</sup>S. WEINBERG, 1933–

$$L_{1,L} = \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad L_{2,L} = \begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad L_{3,L} = \begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix}. \quad (\text{XII.4a})$$

Dazu hat man die rechtshändigen Anteile der Teilchen, die die unteren Komponenten dieser Dubletts darstellen

$$e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R. \quad (\text{XII.4b})$$

Dagegen gibt es keine linkshändigen Neutrinos.

### Quarks

Zweitens enthält das Standardmodell sechs  $SU(3)_c$ -Triplets von Quarks, deren linkshändige Anteile sich in  $SU(2)_L$ -Dubletts austeilen lassen

$$Q'_{1,L} = \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \quad Q'_{2,L} = \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \quad Q'_{3,L} = \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}, \quad (\text{XII.4c})$$

während die rechtshändigen Anteile  $SU(2)_L$ -Singulets sind

$$u_R, \quad c_R, \quad t_R, \quad (\text{XII.4d})$$

$$d_R, \quad s_R, \quad b_R. \quad (\text{XII.4e})$$

Im Folgenden werden die Dirac-Felder, die diese Leptonen und Quarks beschreiben, als  $\hat{\psi}_{\ell,L/R}$ ,  $\hat{\psi}_{q,L}$ ,  $\hat{\psi}_{q,L/R}$  mit  $\ell = e, \mu$  oder  $\tau$  und  $q = u, d, s, c, b$  oder  $t$  geschrieben. Gestrichene Teilchen/Felder ( $d'_L, s'_L, b'_L$ ) stellen Linearkombinationen der entsprechenden nicht-gestrichenen Felder dar.

Neben den Vektorbosonen (§ XII.2.1 a) und diesen Fermionen gibt es im Standardmodell noch ein Skalarfeld  $\hat{\Phi}$ , das sog. *Higgs<sup>(bo)</sup>-Feld*.

### XII.2.1 c Quantenzahlen

Eine weitere Zutat des Standardmodells besteht aus den Werten der verschiedenen Ladungen der im vorigen Paragraph eingeführten Felder. Diese Quantenzahlen bestimmen, wie sich die Felder unter den Eichsymmetrien des Modells transformieren.

Erstens tragen alle links- und rechtshändigen Leptonen und das Higgs-Feld keine Farbladung, während jeder Quark-Flavour in jeder Farbe vorkommt. Hiernach wird die Farbladung der Quarks nicht weiter spezifiziert, und es wird nicht mehr auf den  $SU(3)_c$ -Sektor der Theorie eingegangen.

Der elektroschwache Isospin der Fermionen lässt sich direkt auf der Dublett-Struktur lesen: die Dubletts haben  $I^W = \frac{1}{2}$ , wobei die obere bzw. untere Komponente die Projektion  $I_3^W = +\frac{1}{2}$  bzw.  $I_3^W = -\frac{1}{2}$  hat, während für die  $SU(2)_L$ -Singulets — die rechtshändigen Teilchen — natürlich  $I^W = 0$  gilt.

Dazu kommt das Higgs-Feld tatsächlich auch als ein  $SU(2)_L$ -Dublett vor, vgl. Gl. (XII.8a) unten.

Dann lauten die Hyperladungen der unterschiedlichen Fermionen wie folgt<sup>(75)</sup>

|          |                |                      |                |                 |                 |         |
|----------|----------------|----------------------|----------------|-----------------|-----------------|---------|
| Teilchen | $L_{i,L}$      | $e_R, \mu_R, \tau_R$ | $Q'_{i,L}$     | $u_R, c_R, t_R$ | $d_R, s_R, b_R$ |         |
| $Y_W$    | $-\frac{1}{2}$ | $-1$                 | $+\frac{1}{6}$ | $+\frac{2}{3}$  | $-\frac{1}{3}$  | (XII.5) |

während das Higgs-Feld  $\hat{\Phi}$  die Hyperladung  $Y_W = +\frac{1}{2}$  trägt.

<sup>(75)</sup> Statt dieser Werte kann ist die Beziehung (XII.29) zwischen Hyperladung, schwachem Isospin und der mehr bekannten elektrischen Ladung einfacher zu merken — insbesondere, weil die Konvention für die Hyperladung nicht universell ist.

<sup>(bo)</sup>P. HIGGS, 1929–

Schließlich ist jedes Vektorboson, das mit einer der Gruppe  $SU(3)_c$ ,  $SU(2)_L$  oder  $U(1)_Y$  assoziiert ist, ungeladen unter den zwei anderen Eichsymmetrien: die Gluonen tragen nur eine Farbladung, die  $\hat{W}_i^\rho$ -Felder nur einen schwachen Isospin und das  $\hat{B}^\rho$ -Feld nur eine Hyperladung.

**Bemerkung:** Dagegen sollen die physikalischen  $W^+$ - und  $W^-$ -Bosonen der QED und der schwachen Wechselwirkung unterliegen, was schon zeigt, dass es keine genaue Äquivalenz zwischen der Letzteren und der  $SU(2)_L$  gibt.

### XII.2.1 d Renormierbarkeit

Wie schon am Anfang des § XII.1.2 erwähnt wurde, sollen die in der Theorie erlaubten Wechselwirkungsterme einerseits Lorentz-invariant sein, andererseits entweder drei fermionischen und bosonischen Felder oder vier bosonischen Felder miteinander koppeln, damit die Theorie renormierbar ist.

### XII.2.1 e Kopplungskonstanten

Schreibt man die allgemeinst mögliche Lagrange-Dichte für die in § XII.2.1 a und XII.2.1 b eingeführten Felder, so sind noch etliche freie Parameter nötig, und zwar Kopplungskonstanten für alle erlaubten Vertices der Theorie.<sup>(76)</sup>

### XII.2.1 f Offene Fragen

Das aus den oben dargestellten Bausteinen bestehende Standardmodell ist ziemlich einfach, doch lässt Raum für viele Fragen, die sich im Rahmen des Modells nicht beantworten lassen:

- Warum besitzt die Theorie die Symmetriegruppe (XII.3)?
- Warum findet man diese Felder und nicht andere?
- Warum besitzen jene Felder gerade die in § XII.2.1 c gegebenen Quantenzahlen?
- Warum nehmen die Kopplungskonstanten bestimmte Werte und nicht andere an?

Im Rahmen des Standardmodells sind die Quantenzahlen und die Kopplungskonstanten Parameter, die experimentell mehr oder weniger gut bekannt sind.

## XII.2.2 Lagrange-Dichte des elektroschwachen Sektors

Die Lagrange-Dichte  $\hat{\mathcal{L}}_{SM}$  des Standardmodells ist ein Funktional der in § XII.2.1 eingeführten Feldoperatoren und deren Vierergradienten. Hiernach werden die unterschiedlichen Terme für den elektroschwachen  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Sektor der Theorie erläutert.

### XII.2.2 a Eichkovariante Ableitung

Um die Eichinvarianz der Theorie zu gewährleisten, sollen in der Lagrange-Dichte die Vierergradienten  $\partial_\rho$  in den „kinetischen Termen“<sup>(77)</sup> der verschiedenen Fermionen und des Higgs-Feldes durch sog. *eichkovariante Ableitungen* ersetzt werden. Für ein  $SU(2)_L$ -Dublett mit Hyperladung  $Y_W$  lautet diese Ableitung<sup>(78)</sup>

$$\hat{D}_\rho \equiv \partial_\rho + ig\vec{T} \cdot \hat{W}_\rho + iY_W g' \hat{B}_\rho. \quad (\text{XII.6})$$

Dabei sind  $g$ ,  $g'$  die jeweiligen Kopplungskonstanten der Gruppen  $SU(2)_L$ ,  $U(1)_Y$ , und  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  drei  $2 \times 2$ -Matrizen, und zwar  $T_j \equiv \frac{1}{2}\sigma_j$ , wobei die  $\sigma_j$  die Pauli-Matrizen sind.

Für ein  $SU(2)_L$ -Singulett fällt natürlich der zweite Term in Gl. (XII.6) weg.

<sup>(76)</sup> 3 Kopplungskonstanten ( $g_s$ ,  $g$ ,  $g'$ ) für die Vertices zwischen jedem Vektorfeld (Gluon,  $\hat{W}^\rho$ ,  $\hat{B}^\rho$ ) und den Fermionen; 9 „Yukawa<sup>(bp)</sup>-Kopplungen“ ( $h_i$ ) für die Vertices zwischen dem Higgs-Feld und den Fermionen; 2 Parameter ( $\lambda$ ,  $\mu$ ) für das Potential des Higgs-Feldes.

<sup>(77)</sup> Solche Terme entsprechen der kinetischen Energie des Feldes.

<sup>(78)</sup> In diesem Fall ist  $\hat{D}_\rho$  tatsächlich eine auf Dubletts wirkende  $2 \times 2$ -Matrix, und man sollte den ersten und den dritten Term auf der rechten Seite der Gl. (XII.6) mit der  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix  $\mathbb{1}_2$  multiplizieren.

<sup>(bp)</sup> H. YUKAWA, 1907–1981



Für ein  $SU(2)_L$ -Dublett  $\hat{\Psi}(x)$  mit Hyperladung  $Y_W$  lautet eine Eichtransformation

$$\hat{\Psi}(x) \rightarrow \hat{\Psi}'(x) = e^{-iY_W\alpha(x)} e^{-i\beta_j(x)T_j} \hat{\Psi}(x), \quad (\text{XII.7a})$$

mit vier beliebigen reellen Funktionen  $\alpha(x)$  und  $\beta_j(x)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Gleichzeitig transformieren sich die Eichfelder gemäß

$$\vec{T} \cdot \hat{W}_\rho(x) \rightarrow \vec{T} \cdot \hat{W}'_\rho(x) = \mathcal{U}(x) \vec{T} \cdot \hat{W}_\rho(x) \mathcal{U}(x)^{-1} + \frac{i}{g} [\partial_\rho \mathcal{U}(x)] \mathcal{U}(x)^{-1}, \quad (\text{XII.7b})$$

mit  $\mathcal{U}(x) \equiv e^{-i\beta_j(x)T_j} = e^{-i\vec{\beta}(x) \cdot \vec{T}}$ , und

$$\hat{B}_\rho(x) \rightarrow \hat{B}'_\rho(x) = \hat{B}_\rho(x) + \frac{1}{g'} \partial_\rho \alpha(x), \quad (\text{XII.7c})$$

vgl. Gl. (XII.1).

**Bemerkung:** Die kinetischen Terme für die Eichfelder in der Lagrange-Dichte lauten

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{kin}}^{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} \hat{F}_i^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} \hat{B}^{\mu\nu} \hat{B}_{\mu\nu}$$

wobei  $\hat{F}_{\mu\nu}^i \equiv \partial_\mu \hat{W}_\nu^i - \partial_\nu \hat{W}_\mu^i - g \varepsilon_{ijk} \hat{W}_\mu^j \hat{W}_\nu^k$  für  $i = 1, 2, 3$  bzw.  $\hat{B}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \hat{B}_\nu - \partial_\nu \hat{B}_\mu$  der  $SU(2)_L$ - bzw.  $U(1)_Y$ -Feldstärketensor ist.

### XII.2.2 b Higgs-Sektor

Wie oben schon erwähnt wurde transformiert das skalare Higgs-Feld  $\hat{\Phi}$  wie ein Dublett

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\Phi}^+ \\ \hat{\Phi}^0 \end{pmatrix}, \quad (\text{XII.8a})$$

unter  $SU(2)_L$ -Transformationen, wobei die Skalarfelder  $\hat{\Phi}^+$  und  $\hat{\Phi}^0$  komplexwertig sind. Dies entspricht also insgesamt 4 Freiheitsgraden.

Für das Folgende lohnt es sich, das ladungskonjugierte Dublett

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} (\hat{\Phi}^0)^* \\ -(\hat{\Phi}^+)^* \end{pmatrix} = i\sigma_2 \hat{\Phi}^* \quad (\text{XII.8b})$$

einzuführen.

### Kinetischer Term und Wechselwirkung des Higgs-Feldes mit den Eichfeldern

Ein erster Beitrag zur Lagrange-Dichte des Standardmodells im Higgs-Sektor besteht aus der Summe des kinetischen Terms für das Higgs-Feld und dessen Wechselwirkungsterm mit den  $SU(2)_L$ - und  $U(1)_L$ -Eichfeldern. Das ganze lässt sich einfach mithilfe der eichkovarianten Ableitung (XII.6) schreiben

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{kin}}^\Phi + \hat{\mathcal{L}}^{\Phi/\text{gauge}} = (\hat{D}_\rho \hat{\Phi})^\dagger (\hat{D}^\rho \hat{\Phi}), \quad (\text{XII.9})$$

mit hier  $Y_W = \frac{1}{2}$ . Diese Terme werden mehr detailliert in Abschn. XII.4 hiernach untersucht.

### Selbstwechselwirkung

In der Lagrange-Dichte können noch Terme auftreten, die nur das Higgs-Feld enthalten, und zwar der Art  $\hat{\mathcal{L}}^{\Phi\Phi} = -V(\hat{\Phi})$  mit einem „Potential“  $V$  für das Feld. Die einzige Möglichkeit, die Lorentz- und Eichinvarianz berücksichtigt und zu Vertices mit maximal vier Feldern führt, ist

$$V(\hat{\Phi}) = \kappa \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} + \lambda (\hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi})^2, \quad (\text{XII.10})$$

mit freien reellen Parametern  $\kappa$  und  $\lambda$ .

Die Rolle dieses Terms im Standardmodell wird in Abschn. XII.3 erläutert.

### Wechselwirkung des Higgs-Feldes mit den Fermionen

Schließlich kann das Higgs-Feld noch mit den Fermionen wechselwirken. Um der Eichinvarianz unter  $SU(2)_L$  zu genügen, soll das Higgs-Dublett einerseits an die Dubletts  $Q'_{i,L}$ ,  $L_{i,L}$  koppeln. Dazu

soll noch ein zweites, rechtshändiges Fermion — gleicher Natur (Quark oder Lepton), wegen der  $SU(3)_c$  Symmetrie — im Term vorkommen, um die Lorentz-Invarianz zu gewährleisten. Hiernach wird der Allgemeinheit halber angenommen, dass jenes Fermion nicht genau eines der rechtshändigen Fermionen des § XII.2.1 b ist, sondern nur eine Linearkombination davon, die mit zwei Strichen geschrieben wird:  $\hat{\psi}_{q'',R}$ .

Insgesamt lautet also der Wechselwirkungsterm zwischen dem Higgs-Feld und den Quarks

$$\hat{\mathcal{L}}^{\Phi q} = -h_u(\hat{Q}'_{1,L}\hat{\Phi}\hat{\psi}_{u'',R} + \hat{\psi}_{u'',R}\hat{\Phi}^\dagger\hat{Q}'_{1,L}) - h_d(\hat{Q}'_{1,L}\hat{\Phi}\hat{\psi}_{d'',R} + \hat{\psi}_{d'',R}\hat{\Phi}^\dagger\hat{Q}'_{1,L}) \\ + \text{ähnliche Terme für die 2. und 3. Generationen,} \quad (\text{XII.11})$$

mit sog. *Yukawa-Kopplungskonstanten*  $h_u$ ,  $h_d$ , usw., die hiernach reelle Zahlen sein werden.

Für den Wechselwirkungsterm zwischen dem Higgs-Feld und den Leptonen kann man schon berücksichtigen, dass es im Standardmodell keine „Leptonen-Mischung“ gibt, im Gegensatz zur Quark-Mischung in der schwachen Wechselwirkung. Somit wird auf die Einführung von Feldern  $\hat{\psi}_{\ell'',R}$  verzichtet. Der Wechselwirkungsterm lautet dann

$$\hat{\mathcal{L}}^{\Phi \ell} = -h_e(\hat{L}_{1,L}\hat{\Phi}\hat{\psi}_{e,R} + \hat{\psi}_{e,R}\hat{\Phi}^\dagger\hat{L}_{1,L}) + \text{ähnliche Terme für die 2. und 3. Generationen,} \quad (\text{XII.12})$$

mit drei reellen Yukawa-Kopplungskonstanten  $h_e$ ,  $h_\mu$ ,  $h_\tau$ .

Die Wechselwirkungsterm (XII.11) und (XII.12) werden in Abschn. XII.5 weiter diskutiert.

**Bemerkung:** Vom Anfang an wurden keine rechtshändige Neutrinos eingeführt. Somit können Neutrinos nicht mit dem Higgs-Feld wechselwirken, so dass sie keine Masse kriegen werden.

### XII.2.2 c Fermionischer Sektor

Die Lagrange-Dichte enthält noch Terme, die die kinetischen Energien der Fermionen und ihre Wechselwirkungen mit den Eichfeldern beschreiben, und zwar der Art

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{kin}}^{q,\ell} + \hat{\mathcal{L}}^{q,\ell/\text{gauge}} = \sum_{\psi_L} \hat{\psi}_L i\hat{\mathcal{D}}\hat{\psi}_L + \sum_{\psi_R} \hat{\psi}_R i\hat{\mathcal{D}}\hat{\psi}_R, \quad (\text{XII.13})$$

wobei die Summen über alle links- bzw. rechtshändigen Fermionen laufen, während  $\hat{\mathcal{D}} \equiv \gamma^\rho \hat{D}_\rho$  ist.

## XII.3 Spontane Symmetriebrechung. Higgs-Boson

Im vorigen Abschnitt wurde das Potential  $V(\hat{\Phi})$  des Higgs-Feldes eingeführt, um seine „Selbstwechselwirkung“ zu beschreiben. Dieser Abschnitt befasst sich genauer mit den Folgerungen dieses Terms für die Dynamik des Higgs-Feldes. Wenn das Potential die geeignete Form hat, dann wird die  $U(1)_Y \times SU(2)_L$  Eichinvarianz der Lagrange-Dichte im physikalischen realisierten Zustand spontan gebrochen (§ XII.3.1). Infolge dieser Symmetriebrechung entspricht das Higgs-Dublett nicht vier, sondern nur einem Teilchen, dessen Masse und Selbstwechselwirkungen durch die Parameter des Potentials  $V(\hat{\Phi})$  bestimmt werden (§ XII.3.2).

### XII.3.1 Spontane Symmetriebrechung

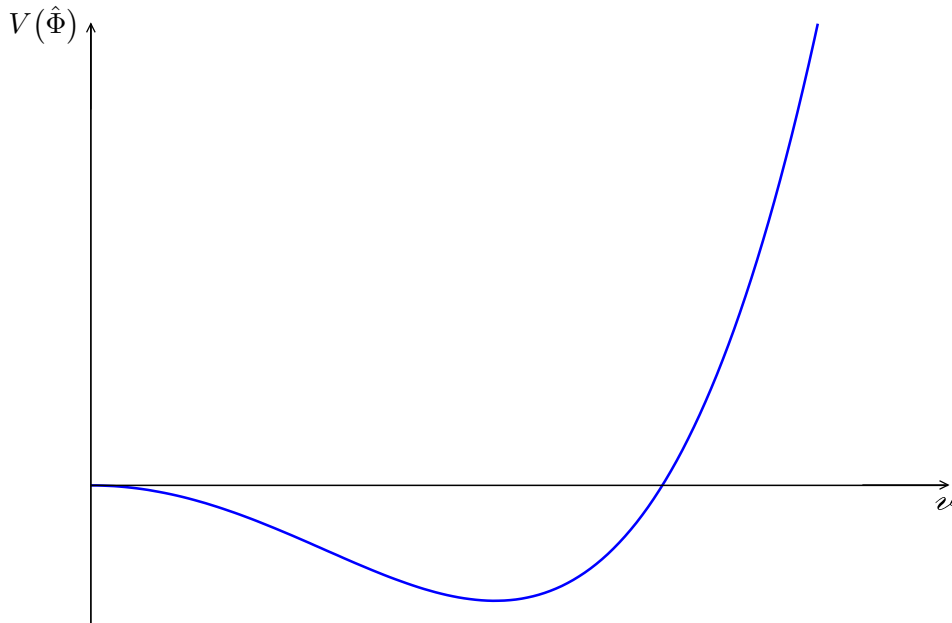
Zur Untersuchung des Einflusses des Potentials  $V(\hat{\Phi})$  lohnt es sich zunächst, das Verhalten in Abhängigkeit von  $\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}$  zu betrachten. Zu diesem Zweck macht man den Ansatz

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{XII.14a})$$

mit einer von  $x$  unabhängigen positiven reellen Zahl  $v$ . Dies gibt für das Potential

$$V(\hat{\Phi}) = \frac{1}{2}\kappa v^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4. \quad (\text{XII.14b})$$

Sind  $\kappa$  negativ und  $\lambda$  positiv, so hat  $V(\hat{\Phi})$  ein Minimum für einen endlichen Wert von  $\varrho$ , wie sich auf Abb. XII.2 erkennen lässt.



**Abbildung XII.2** – Verlauf des Potentials (XII.14b) für  $\kappa < 0$ ,  $\lambda > 0$ .

Dank der  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichsymmetrie des Standardmodells ist die Konfiguration (XII.14a) ziemlich allgemein, weil sie sich aus jeder anderen Feldkonfiguration mit  $\hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} = \varrho^2/2$  durch eine geeignete Eichtransformation erhalten lässt. Beispielsweise gelten für jeden reellen Parameter  $\theta$

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \varrho \end{pmatrix}\right) = V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\theta}\varrho \end{pmatrix}\right) = V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\theta}\varrho \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Wenn sich das Higgs-Feld in einer Konfiguration wie (XII.14a) mit  $\varrho \neq 0$  befindet, dann ist die resultierende Theorie nicht mehr eichinvariant — z.B. weil die Vektorbosonen eine Masse kriegen, vgl. Abschn. XII.4 —, d.h. die Eichsymmetrie ist *gebrochen*. Da dies nicht durch einen Term in der Lagrange-Dichte, sondern durch die zufällige Wahl<sup>(79)</sup> einer besonderen Konfiguration verursacht wird, spricht man von *spontaner Symmetriebrechung*.

Um mit positiven Parametern zu arbeiten, wird das Potential des Higgs-Feldes im Folgenden als

$$V(\hat{\Phi}) = -\mu^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} + \lambda (\hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi})^2 \quad (\text{XII.15})$$

mit  $\mu^2 > 0$  und  $\lambda > 0$  geschrieben. Dann gilt für die Feldkonfiguration (XII.14a)

$$V(\hat{\Phi}) = -\frac{1}{2}\mu^2\varrho^2 + \frac{1}{4}\lambda\varrho^4, \quad (\text{XII.16})$$

was minimal für den Wert

$$\varrho = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (\text{XII.17})$$

ist.

### XII.3.2 Higgs-Boson

Aus quantenmechanischen Gründen kann das Higgs-Feld nicht genau konstant sein, sondern soll noch in jedem Punkt kleine Schwankungen um den Wert (XII.14a) haben. Diese lassen sich

<sup>(79)</sup>nicht nur des Autors, sondern der Natur!

allgemeinen schreiben als

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(x) + i\hat{\phi}_2(x) \\ \varrho + \hat{\phi}_0(x) + i\hat{\phi}_3(x) \end{pmatrix},$$

mit vier reellen Skalarfeldoperatoren  $\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$ .

Dank der Invarianz unter der Eichgruppe  $U(1)_Y \times SU(2)_L$  können aber die Felder  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$  weggedreht werden, so dass man einfach das Dublett

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho + \hat{\phi}_0(x) \end{pmatrix} \quad (\text{XII.18})$$

betrachten kann. Jetzt hängt das Higgs-Feld  $\hat{\Phi}(x)$  von nur einem reellen Skalarfeld ab, entsprechend einem einzigen Teilchen, dem *Higgs-Boson*.

Mithilfe der  $SU(2)$ -Matrix

$$U(x) = \exp \left[ -\frac{i}{\varrho} (\hat{\phi}_2(x)\sigma_1 + \hat{\phi}_1(x)\sigma_2 + \hat{\phi}_3(x)\sigma_3) \right] \approx \mathbb{1}_2 - \frac{i}{\varrho} (\hat{\phi}_2(x)\sigma_1 + \hat{\phi}_1(x)\sigma_2 + \hat{\phi}_3(x)\sigma_3)$$

gilt in jedem Raumzeitpunkt  $x$  (der Kurze halber wird die  $x$ -Abhängigkeit der Felder nicht geschrieben)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} U \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho + \hat{\phi}_0 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - i\hat{\phi}_3/\varrho & \phi_1/\varrho + i\hat{\phi}_2/\varrho \\ \phi_1/\varrho - i\hat{\phi}_2/\varrho & 1 + i\hat{\phi}_3/\varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho + \hat{\phi}_0 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 + i\hat{\phi}_2 \\ \varrho + \hat{\phi}_0 + i\hat{\phi}_3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Dublett im rechten Glied äquivalent unter einer Eichtransformation zum Dublett (XII.18).

Für das Feld (XII.18) lautet das Potential

$$\begin{aligned} V(\hat{\Phi}) &= -\frac{\mu^2}{2} (\varrho^2 + 2\varrho\hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_0^2) + \frac{\lambda^4}{4} (\varrho^4 + 4\varrho^3\hat{\phi}_0 + 6\varrho^2\hat{\phi}_0^2 + 4\varrho\hat{\phi}_0^3 + \hat{\phi}_0^4) \\ &= -\frac{\mu^2}{2} \varrho^2 + \frac{\lambda^4}{4} \varrho^4 + (-\mu^2 + \lambda\varrho^2) \varrho\hat{\phi}_0 + \frac{1}{2} (-\mu^2 + 3\lambda\varrho^2) \hat{\phi}_0^2 + \lambda\varrho\hat{\phi}_0^3 + \frac{\lambda}{4} \hat{\phi}_0^4. \end{aligned}$$

Die zwei ersten Terme stellen einfach das schon bekannte Minimum (XII.16) des Potentials dar. Der nächste, lineare Term in  $\hat{\phi}_0$  verschwindet dank der Beziehung (XII.17). Der quadratische Term in  $\hat{\phi}_0$  mit dem Vorfaktor

$$\frac{1}{2} (-\mu^2 + 3\lambda\varrho^2) = \lambda\varrho^2 = \mu^2 \equiv \frac{m_H^2}{2} \quad (\text{XII.19})$$

entspricht dem Massenterm des Higgs-Bosons, wobei  $m_H$  die Bosonenmasse ist. Schließlich stellen die zwei letzten Terme die Selbstwechselwirkung des Higgs-Bosons dar. Dabei treten Vertices mit entweder drei oder vier Higgs-Bosonen auf



mit jeweiligen Kopplungskonstanten  $\lambda\varrho = \sqrt{\lambda\mu^2}$  und  $\frac{\lambda}{4}$ .

Im Rahmen des Standardmodells sind  $\lambda$  und  $\mu^2$ , oder äquivalent  $\varrho$  und  $m_H$ , freie Parameter. Experimentell findet man<sup>(80)</sup>

$$\varrho \simeq 246, 22 \text{ GeV}, \quad m_H \approx 125 \text{ GeV} \quad (\text{XII.20})$$

wobei der zweite Wert die Masse des 2011-2012 am LHC entdeckten Teilchens, das sich sehr ähnlich einem Higgs-Boson verhält, ist.

<sup>(80)</sup>Unter der Annahme, dass die  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen ihre Masse über den in Abschn. XII.4 dargestellten Mechanismus kriegen.

## XII.4 Vektorbosonen im Standardmodell

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass falls das Potential (XII.10) des Higgs-Feldes die Form  $-\mu^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi} + \lambda(\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi})^2$  mit  $\mu^2 > 0$  und  $\lambda > 0$  hat, dann ist die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichinvarianz des Standardmodells spontan gebrochen im physikalisch realisierten Vakuum.

In diesem Abschnitt wird eine erste Folge dieser Symmetriebrechung untersucht, und zwar der sog. *Brout<sup>(bq)</sup>–Englert<sup>(br)</sup>–Higgs-Mechanismus*,<sup>(81)</sup> gemäß dem der endliche Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes den schwachen Bosonen eine Masse gibt.

Sei also angenommen, dass das Higgs-Feld den Wert (XII.18) annimmt, wobei  $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$  eine positive reelle Konstante ist. In diesem Fall vereinfacht sich der Anteil (XII.9) der Lagrange-Dichte nach Auslassen des kinetischen Terms für das  $\hat{\phi}_0$ -Feld zu

$$\begin{aligned} (\hat{D}_\rho\hat{\Phi})^\dagger(\hat{D}^\rho\hat{\Phi}) &\approx \hat{\mathcal{L}}_M^{W,Z} \equiv \frac{1}{2} \left[ \left( ig\vec{T} \cdot \hat{W}_\rho + \frac{i}{2}g'\hat{B}_\rho \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]^\dagger \left[ \left( ig\vec{T} \cdot \hat{W}^\rho + \frac{i}{2}g'\hat{B}^\rho \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{8} (0 \quad v) \begin{pmatrix} -ig\vec{\sigma} \cdot \hat{W}_\rho - ig'\hat{B}_\rho & \\ & ig\vec{\sigma} \cdot \hat{W}^\rho + ig'\hat{B}^\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{XII.21})$$

wobei die zweite Zeile die Hermizität der Pauli-Matrizen und die Reellwertigkeit der Vektorfelder benutzt. Das Ausmultiplizieren des Produkts im rechten Glied gibt dann

$$\hat{\mathcal{L}}_M^{W,Z} = \frac{v^2}{8} (0 \quad 1) \left[ g^2\sigma_i\sigma_j\hat{W}_\rho^i\hat{W}^{j\rho} + gg'\sigma_i(\hat{W}_\rho^i\hat{B}^\rho + \hat{B}_\rho\hat{W}^{i\rho}) + g'^2\hat{B}_\rho\hat{B}^\rho \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies kann noch als Summe von drei Termen geschrieben werden, die sich einfach berechnen lassen.

Unter Verwendung der Beziehung  $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1}_2 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$  und der Vertauschungsrelation der bosonischen Feldoperatoren  $\hat{W}_\rho^i$  und  $\hat{W}_\rho^j$  kommt zuerst für den ersten Term

$$\frac{g^2 v^2}{8} (0 \quad 1) \sigma_i\sigma_j \hat{W}_\rho^i \hat{W}^{j\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{g^2 v^2}{8} \hat{W}_\rho \cdot \hat{W}^\rho.$$

Im zweiten Term tragen die Pauli-Matrizen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , deren (2,2)-Element Null ist, nicht bei, so dass es nur

$$\frac{gg' v^2}{8} (0 \quad 1) \sigma_i (\hat{W}_\rho^i \hat{B}^\rho + \hat{B}_\rho \hat{W}^{i\rho}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{gg' v^2}{8} (\hat{W}_\rho^3 \hat{B}^\rho + \hat{B}_\rho \hat{W}^{3\rho})$$

übrig bleibt. Schließlich ist der dritte Beitrag zu  $\hat{\mathcal{L}}_M^{W,Z}$  einfach gleich  $g'^2 v^2 \hat{B}_\rho \hat{B}^\rho / 8$ . Insgesamt findet man also

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_M^{W,Z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{g v}{2} \right)^2 (\hat{W}_\rho^1 \hat{W}^{1\rho} + \hat{W}_\rho^2 \hat{W}^{2\rho}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{2} \right)^2 \left[ g^2 \hat{W}_\rho^3 \hat{W}^{3\rho} - gg' (\hat{W}_\rho^3 \hat{B}^\rho + \hat{B}_\rho \hat{W}^{3\rho}) + g'^2 \hat{B}_\rho \hat{B}^\rho \right]. \end{aligned} \quad (\text{XII.22})$$

Führt man jetzt die komplexwertigen Vektorfeldoperatoren

$$\hat{W}_\rho^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{W}_\rho^1 - i\hat{W}_\rho^2) \quad \text{und} \quad \hat{W}_\rho^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{W}_\rho^1 + i\hat{W}_\rho^2) = \hat{W}_\rho^{+*} \quad (\text{XII.23})$$

ein, so lautet die erste Zeile in Gl. (XII.22) noch  $\frac{1}{2} \left( \frac{g v}{2} \right)^2 [\hat{W}_\rho^+ (\hat{W}^{+\rho})^* + \hat{W}_\rho^- (\hat{W}^{-\rho})^*]$ .

<sup>(81)</sup> ... auch kürzer *Higgs-* oder gar *Englert–Brout–Higgs–Guralnik<sup>(bs)</sup>–Hagen<sup>(bt)</sup>–Kibble<sup>(bu)</sup>–Mechanismus* genannt.

<sup>(bq)</sup>R. BROUT, 1928–2011    <sup>(br)</sup>F. ENGLERT, 1932–    <sup>(bs)</sup>G. S. GURALNIK, 1936–2014    <sup>(bt)</sup>C. R. HAGEN, 1937–

<sup>(bu)</sup>T. KIBBLE, 1932–2016

Wiederum lässt sich der Term in den eckigen Klammern in der zweiten Zeile umschreiben als

$$(g\hat{W}_\rho^3 - g'\hat{B}_\rho)(g\hat{W}^{3\rho} - g'\hat{B}^\rho) = (g^2 + g'^2) \left( \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \hat{W}_\rho^3 - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \hat{B}_\rho \right) \left( \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \hat{W}^{3\rho} - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \hat{B}^\rho \right).$$

Definiert man den *Weinberg-Winkel* — auch *elektroschwacher Mischungswinkel* genannt —  $\theta_W$  durch

$$\tan \theta_W \equiv \frac{g'}{g}, \quad (\text{XII.24})$$

entsprechend  $\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$  und  $\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$ , sowie neue reelle Vektorfeldoperatoren  $\hat{Z}_\rho, \hat{A}_\rho$  durch

$$\begin{pmatrix} \hat{Z}_\rho \\ \hat{A}_\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{W}_\rho^3 \\ \hat{B}_\rho \end{pmatrix}, \quad (\text{XII.25})$$

so ergibt sich  $(g\hat{W}_\rho^3 - g'\hat{B}_\rho)(g\hat{W}^{3\rho} - g'\hat{B}^\rho) = (g^2 + g'^2)\hat{Z}_\rho\hat{Z}^\rho$ .

Wenn man schließlich

$$m_W \equiv \frac{g' e}{2}, \quad m_Z \equiv \frac{\sqrt{g^2 + g'^2} e}{2} \quad (\text{XII.26})$$

sowie  $m_\gamma \equiv 0(!)$  schreibt, dann wird Gl. (XII.22) zu

$$\hat{\mathcal{L}}_M^{W,Z} = \frac{1}{2} m_W^2 \hat{W}_\rho^+ (\hat{W}^{+\rho})^* + \frac{1}{2} m_W^2 \hat{W}_\rho^- (\hat{W}^{-\rho})^* + \frac{1}{2} m_Z^2 \hat{Z}_\rho \hat{Z}^\rho + \frac{1}{2} m_\gamma^2 \hat{A}_\rho \hat{A}^\rho, \quad (\text{XII.27})$$

wobei der letzte Term natürlich gleich Null ist. Das ist gerade die Summe der Massenterme für vier Vektorfeldern, und zwar zwei Spin-1-Teilchen mit der Masse  $m_W$  — die  $W^\pm$ -Bosonen —, ein Spin-1-Teilchen mit der Masse  $m_Z$  — das  $Z^0$ -Boson —, und ein masseloses Spin-1-Teilchen — das Photon. Dazu geben die Relationen (XII.24) und (XII.26) sofort  $m_W = m_Z \cos \theta_W$ , d.h.  $m_Z > m_W$ .

Somit kriegen die schwachen Vektorbosonen  $W^\pm$  und  $Z^0$  eine Masse, obwohl Eichinvarianz die Anwesenheit von Massentermen für Vektorfelder in der Lagrange-Dichte verbietet.

Die eichkovariante Ableitung  $D_\rho$ , Gl. (XII.6), kann in der neuen Basis bestehend aus den Feldoperatoren  $\{\hat{W}_\rho^+, \hat{W}_\rho^-, \hat{Z}_\rho, \hat{A}_\rho\}$  geschrieben werden. Im Allgemeinen gilt zunächst

$$\begin{aligned} \hat{D}_\rho &\equiv \partial_\rho + ig \vec{T} \cdot \hat{W}_\rho + iY_W g' \hat{B}_\rho \\ &= \partial_\rho + i \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 & \hat{W}_\rho^1 - i\hat{W}_\rho^2 \\ \hat{W}_\rho^1 + i\hat{W}_\rho^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + i \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta_W \hat{W}_\rho^3 + 2Y_W \sin \theta_W \hat{B}_\rho & 0 \\ 0 & -\cos \theta_W \hat{W}_\rho^3 + 2Y_W \sin \theta_W \hat{B}_\rho \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im zweiten Term auf der rechten Seite von  $\hat{D}_\rho$  erkennt man  $\hat{W}_\rho^\pm = \hat{W}_\rho^1 \mp i\hat{W}_\rho^2$ . Ersetzt man im dritten Term  $\hat{W}_\rho^3$  und  $\hat{B}_\rho$  durch die geeigneten Linearkombinationen von  $\hat{Z}_\rho$  und  $\hat{A}_\rho$  — entsprechend einer Drehung um einen Winkel  $-\theta_W$ , vgl. Gl. (XII.25) —, so erhält man für  $\hat{D}_\rho$  nach einiger einfachen Algebra

$$\partial_\rho + i \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \hat{W}_\rho^+ \\ \hat{W}_\rho^- & 0 \end{pmatrix} + i \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \begin{pmatrix} (\cos^2 \theta_W - 2Y_W \sin^2 \theta_W) \hat{Z}_\rho & 0 \\ +2 \cos \theta_W \sin \theta_W (Y_W + \frac{1}{2}) \hat{A}_\rho & 0 \\ 0 & (-\cos^2 \theta_W - 2Y_W \sin^2 \theta_W) \hat{Z}_\rho \\ & +2 \cos \theta_W \sin \theta_W (Y_W - \frac{1}{2}) \hat{A}_\rho \end{pmatrix}.$$

Dabei stellt der Term proportional zur Kopplungskonstanten  $g$  die Kopplung der  $W^\pm$ -Bosonen zu den geladenen schwachen Strömen dar — da die Matrix mit den Vektorfeldern antidiagonal

ist, koppelt sie die obere Komponente eines  $SU(2)_L$ -Dubletts mit der unteren Komponente eines anderen Dubletts, d.h. mit einem Teilchen mit einer unterschiedlichen elektrischen Ladung. Somit ist  $g$  gleich der Kopplungskonstanten  $g_w$  des § XI.3.2 — bis auf eine multiplikative Konstante, die als 1 angenommen wird.

Dagegen liefert der Term proportional zu  $\sqrt{g^2 + g'^2}$ , mit der diagonalen Matrix, die Wechselwirkungen zwischen neutralen Strömen und den elektrisch neutralen  $Z^0$ -Bosonen oder Photonen. Insbesondere ist die Kopplung zum Photon-Feldoperator  $\hat{A}_\mu$  proportional zu  $\sqrt{g^2 + g'^2} \cos \theta_W \sin \theta_W$ . Somit wird dieses Produkt mit der Kopplungskonstanten  $e$  der Elektrodynamik identifiziert

$$e \equiv \sqrt{g^2 + g'^2} \cos \theta_W \sin \theta_W = g \sin \theta_W. \tag{XII.28}$$

Dementsprechend lässt sich die elektrische Ladung  $Q$  für die obere bzw. untere Komponente eines Dubletts mit  $Y_W + \frac{1}{2}$  bzw.  $Y_W - \frac{1}{2}$  gleichsetzen. Da  $\frac{1}{2}$  bzw.  $-\frac{1}{2}$  gerade der schwache Isospin  $I_3^W$  des jeweiligen Teilchens ist, gilt allgemein die Beziehung<sup>(82)</sup>

$$Q = I_3^W + Y_W \tag{XII.29}$$

zwischen elektrischer Ladung, schwachem Isospin und elektroschwacher Hyperladung.

Beispielsweise ist die elektroschwache Hyperladung des Higgs-Feldes (XII.8a)  $Y_W = \frac{1}{2}$ . Dies gibt  $Q = 0$  für dessen untere Komponente  $\hat{\Phi}^0$ , d.h. das physikalische Higgs-Boson ist elektrisch neutral. Für die obere Komponente  $\hat{\Phi}^+$  kommt  $Q = +1$  — wie sich aus der Notation vermuten ließ.

**Bemerkung:** Kombiniert man die erste Definition in (XII.26) mit der Beziehung  $g_w^2 = 4\sqrt{2} G_F m_W^2$  (§ XI.3.2) und mit  $g_w = g$ , so kommt

$$e^2 = \frac{1}{\sqrt{2} G_F}, \tag{XII.30}$$

woraus sich der Wert (XII.20) aus jenem der Fermi-Konstanten ableiten lässt.

## XII.5 Fermionen im Standardmodell

Die nicht-triviale Konfiguration des Higgs-Feldes, die mit der spontanen Symmetriebrechung der  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichsymmetrie einhergeht, gibt nicht nur Massen zu den schwachen Vektorbosonen, sondern auch zu den Fermionen, die zum Higgs-Feld koppeln. Somit erhalten sowohl die elektrisch geladenen Leptonen (§ XII.5.1) als auch die Quarks (§ XII.5.2) eine Masse. Bei den Letzteren unterscheiden sich die Masseneigenzustände von den Zuständen, die einfach zu den schwachen  $W^\pm$ -Bosonen koppeln. Diese Tatsache erlaubt die Existenz im Standardmodell von Prozessen, die die CP-Symmetrie verletzen (§ XII.5.3), wie experimentell beobachtet wurde.

Hiernach wird für das Higgs-Feld die Form

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho + \hat{\phi}_0(x) \end{pmatrix}, \quad \text{entsprechend} \quad \hat{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varrho + \hat{\phi}_0(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

angenommen.

### XII.5.1 Wechselwirkung der Leptonen mit dem Higgs-Feld

Mit der obigen Feldkonfiguration für  $\hat{\Phi}$  lautet der erste Term in der Lagrange-Dichte (XII.12) für die Wechselwirkung zwischen Elektron- und Higgs-Feld

$$-h_e \left( \hat{L}_{1,L} \hat{\Phi} \hat{\psi}_{e,R} + \hat{\psi}_{e,R} \hat{\Phi}^\dagger \hat{L}_{1,L} \right) = -\frac{h_e \varrho}{\sqrt{2}} \left( \hat{\psi}_{e,L} \hat{\psi}_{e,R} + \hat{\psi}_{e,R} \hat{\psi}_{e,L} \right) - \frac{h_e}{\sqrt{2}} \left( \hat{\psi}_{e,L} \hat{\psi}_{e,R} + \hat{\psi}_{e,R} \hat{\psi}_{e,L} \right) \hat{\phi}_0.$$

<sup>(82)</sup>Verwendet man die Konvention, laut der die elektroschwache Hyperladung  $Y'_W = 2Y_W$  ist, so gilt natürlich  $Q = I_3^W + Y'_W/2$ , in Ähnlichkeit zur (verallgemeinerten) Gell-Mann–Nishijima-Formel (X.23b).

Für die zweite und dritte Generation, d.h. für das Myon und das Tau, gelten ähnliche Gleichungen. Schreibt man dann  $\hat{\psi}_L \hat{\psi}_R = \hat{\psi} \mathcal{P}_R \mathcal{P}_R \hat{\psi} = \hat{\psi} \mathcal{P}_R \hat{\psi}$  und ebenso  $\hat{\psi}_R \hat{\psi}_L = \hat{\psi} \mathcal{P}_L \hat{\psi}$ , so kommt unter Nutzung von  $\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L = \mathbb{1}_4$

$$\hat{\mathcal{L}}^{\Phi\ell} = -\frac{h_e \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \hat{\psi}_e \hat{\psi}_e - \frac{h_\mu \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \hat{\psi}_\mu \hat{\psi}_\mu - \frac{h_\tau \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \hat{\psi}_\tau \hat{\psi}_\tau - \frac{h_e}{\sqrt{2}} \hat{\psi}_e \hat{\psi}_e \hat{\phi}_0 - \frac{h_\mu}{\sqrt{2}} \hat{\psi}_\mu \hat{\psi}_\mu \hat{\phi}_0 - \frac{h_\tau}{\sqrt{2}} \hat{\psi}_\tau \hat{\psi}_\tau \hat{\phi}_0. \quad (\text{XII.31})$$

### XII.5.1 a Leptonen-Massen

Um die Eichinvarianz des Modells nicht zu verletzen, haben die Leptonen — und allgemeiner die Fermionen — ursprünglich keinen Massenterm in der Lagrange-Dichte: die Eichsymmetrie wird also nicht explizit gebrochen. Mit den Definitionen

$$m_e \equiv \frac{h_e \mathcal{L}}{\sqrt{2}}, \quad m_\mu \equiv \frac{h_\mu \mathcal{L}}{\sqrt{2}}, \quad m_\tau \equiv \frac{h_\tau \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \quad (\text{XII.32a})$$

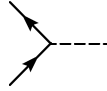
lassen sich die drei ersten Terme in  $\hat{\mathcal{L}}^{\Phi\ell}$  [Gl. (XII.31)] als Massenterme

$$\hat{\mathcal{L}}_M^\ell = -m_e \hat{\psi}_e \hat{\psi}_e - m_\mu \hat{\psi}_\mu \hat{\psi}_\mu - m_\tau \hat{\psi}_\tau \hat{\psi}_\tau \quad (\text{XII.32b})$$

für die elektrisch geladenen Leptonen identifizieren, wobei  $m_e$ ,  $m_\mu$ ,  $m_\tau$  die Leptonenmassen sind. Somit kriegen nach der spontanen Brechung der Eichsymmetrie die Fermionen eine Masse, ohne dabei die Renormierbarkeit der Theorie zu gefährden: eine zufällige Wahl der Natur zerstört nicht die mathematische Wohldefiniertheit des Standardmodells.

### XII.5.1 b Wechselwirkung der Leptonen mit dem Higgs-Boson

Die drei letzten Terme in Gl. (XII.31) stellen Wechselwirkungsterme zwischen einem der drei Leptonen und dem Higgs-Boson dar. Genauer handelt es sich um Dreiervertizes



wobei die Kopplungskonstante zwischen jeder Leptonart und dem Higgs-Boson jeweils gleich  $h_e/\sqrt{2}$ ,  $h_\mu/\sqrt{2}$  und  $h_\tau/\sqrt{2}$  ist.

Die Beziehungen (XII.32a) zeigen, dass die Yukawa-Kopplung  $h_i$  mit  $i = e, \mu$  oder  $\tau$  proportional zur entsprechenden Teilchenmasse  $m_i$  sein soll. Somit koppeln schwere Leptonen stärker zum Higgs-Boson als leichte Leptonen.

Diese Bemerkung gilt auch für die Kopplung zwischen dem Higgs-Boson und den Quarks im folgenden Paragraph.

### XII.5.2 Quark-Massen

Unter Vernachlässigung des skalaren Feldes  $\hat{\phi}_0$  des Higgs-Bosons gilt für die Wechselwirkung zwischen dem Higgs-Feld und den Feldern für die Quarks der ersten Generation

$$\begin{aligned} -h_u \left( \hat{Q}'_{1,L} \hat{\Phi} \hat{\psi}_{u',R} + \hat{\psi}_{u'',R} \hat{\Phi}^\dagger \hat{Q}'_{1,L} \right) - h_d \left( \hat{Q}'_{1,L} \hat{\Phi} \hat{\psi}_{d',R} + \hat{\psi}_{d'',R} \hat{\Phi}^\dagger \hat{Q}'_{1,L} \right) \simeq \\ -\frac{h_u \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \left( \hat{\psi}_{u,L} \hat{\psi}_{u',R} + \hat{\psi}_{u'',R} \hat{\psi}_{u,L} \right) - \frac{h_d \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \left( \hat{\psi}_{d',L} \hat{\psi}_{d',R} + \hat{\psi}_{d'',R} \hat{\psi}_{d',L} \right). \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann noch geschrieben werden als

$$-\frac{h_u \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \left( \hat{\psi}_u \mathcal{P}_R \hat{\psi}_{u''} + \hat{\psi}_{u''} \mathcal{P}_L \hat{\psi}_u \right) - \frac{h_d \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \left( \hat{\psi}_{d'} \mathcal{P}_R \hat{\psi}_{d''} + \hat{\psi}_{d''} \mathcal{P}_L \hat{\psi}_{d'} \right).$$

Für die zweite und dritte Generationen gelten ähnliche Gleichungen.



Dabei sollen die „nicht-gestrichenen Quarks“  $u, d, s, c, b$  und  $t$  die QCD-Eigenzustände sein, entsprechend z.B. den Valenz-Quarks in einem Hadron. Das Feld  $\hat{\psi}_{d'}$  (und in ähnlicher Weise  $\hat{\psi}_{s'}$  oder  $\hat{\psi}_{b'}$ ) stellt die unitäre Linearkombination der Quark-Felder  $\hat{\psi}_d, \hat{\psi}_s$  und  $\hat{\psi}_b$  dar, die mit  $\hat{\psi}_u$  (bzw.  $\hat{\psi}_c, \hat{\psi}_t$ ) über ein  $W^+$ -Boson wechselwirkt. Wiederum sind die Felder  $\hat{\psi}_{u''}, \hat{\psi}_{c''}$  und  $\hat{\psi}_{t''}$  unitäre Linearkombinationen von  $\hat{\psi}_u, \hat{\psi}_c$  und  $\hat{\psi}_t$ , die je einfach mit einem dieser Felder und mit dem Higgs-Feld wechselwirken. Schließlich sind  $\hat{\psi}_{d''}, \hat{\psi}_{s''}$  und  $\hat{\psi}_{b''}$  unitäre Linearkombinationen der Felder  $\hat{\psi}_d, \hat{\psi}_s$  und  $\hat{\psi}_b$ , die je einfach mit dem Higgs-Feld und entweder  $\hat{\psi}_{d'}, \hat{\psi}_{s'}$  oder  $\hat{\psi}_{b'}$  wechselwirken.

Experiment zeigt, dass  $\hat{\psi}_u, \hat{\psi}_c$  und  $\hat{\psi}_t$  eigentlich auch Masseneigenzustände sind. Damit die Theorie dies gibt, sollen  $\hat{\psi}_{u''} = \hat{\psi}_u, \hat{\psi}_{c''} = \hat{\psi}_c$  und  $\hat{\psi}_{t''} = \hat{\psi}_t$  gelten. Dann kommt tatsächlich in der Lagrange-Dichte

$$-\frac{h_u \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \left( \hat{\psi}_u \mathcal{P}_R \hat{\psi}_{u''} + \hat{\psi}_{u''} \mathcal{P}_L \hat{\psi}_u \right) = -\frac{h_u \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \left[ \hat{\psi}_u (\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L) \hat{\psi}_u \right] = -\frac{h_u \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \hat{\psi}_u \hat{\psi}_u \equiv -m_u \hat{\psi}_u \hat{\psi}_u,$$

wobei  $m_u$  die Masse des  $u$ -Quarks ist. Für die  $c$  und  $t$ -Quarks gelten ähnliche Ergebnisse.

Für die  $d, s$ - und  $b$ -Quarks sind die QCD-Eigenzustände  $\hat{\psi}_d, \hat{\psi}_s$  und  $\hat{\psi}_b$  auch Masseneigenzustände; sie sind aber nicht Eigenzustände zur Wechselwirkung mit den schwachen  $W^\pm$ -Bosonen, entsprechend der schon gesehenen Flavour-Mischung. Infolgedessen wechselwirken  $\hat{\psi}_d, \hat{\psi}_s, \hat{\psi}_b$  nicht direkt mit dem Higgs-Feld, sondern nur als Linearkombinationen. Sei  $\mathcal{V}_{\text{CKM}}$  die unitäre  $3 \times 3$ -Matrix, die die Felder  $\hat{\psi}_{d'}, \hat{\psi}_{s'}, \hat{\psi}_{b'}$  als Funktion der QCD-Eigenzustände gibt:

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_{d'} \\ \hat{\psi}_{s'} \\ \hat{\psi}_{b'} \end{pmatrix} = \mathcal{V}_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_d \\ \hat{\psi}_s \\ \hat{\psi}_b \end{pmatrix}. \quad (\text{XII.33})$$

Nimmt man für die Felder  $\hat{\psi}_{d''}, \hat{\psi}_{s''}$  und  $\hat{\psi}_{b''}$  die Linearkombinationen

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_{d''} \\ \hat{\psi}_{s''} \\ \hat{\psi}_{b''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_d^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & h_s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & h_b^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{V}_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} h_d & 0 & 0 \\ 0 & h_s & 0 \\ 0 & 0 & h_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_d \\ \hat{\psi}_s \\ \hat{\psi}_b \end{pmatrix}$$

an, so lässt sich die Summe

$$-\frac{h_d \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \left( \hat{\psi}_{d'} \mathcal{P}_R \hat{\psi}_{d''} + \hat{\psi}_{d''} \mathcal{P}_L \hat{\psi}_{d'} \right) - \frac{h_s \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \left( \hat{\psi}_{s'} \mathcal{P}_R \hat{\psi}_{s''} + \hat{\psi}_{s''} \mathcal{P}_L \hat{\psi}_{s'} \right) - \frac{h_b \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \left( \hat{\psi}_{b'} \mathcal{P}_R \hat{\psi}_{b''} + \hat{\psi}_{b''} \mathcal{P}_L \hat{\psi}_{b'} \right)$$

als

$$-\frac{h_d \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \hat{\psi}_d \hat{\psi}_d - \frac{h_s \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \hat{\psi}_s \hat{\psi}_s - \frac{h_b \mathcal{L}}{\sqrt{2}} \hat{\psi}_b \hat{\psi}_b \equiv -m_d \hat{\psi}_d \hat{\psi}_d - m_s \hat{\psi}_s \hat{\psi}_s - m_b \hat{\psi}_b \hat{\psi}_b$$

umschreiben, entsprechend Massentermen für die  $d, s$  und  $b$  Quarks.

In Zusammenfassung erhalten die Quarks, wie die Leptonen, durch ihre Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld eine Masse, die proportional zu der jeweiligen Yukawa-Kopplung  $h_i$  ist.

**Bemerkung:** Berücksichtigt man auch das Higgs-Boson-Feld  $\hat{\phi}_0$  in  $\hat{\mathcal{L}}^{\Phi q}$ , so findet man wie für die Leptonen in § XII.5.1 b, dass die Yukawa-Kopplungskonstante  $h_q$  ebenfalls die Stärke des Vertex  $\hat{\psi}_q \hat{\psi}_q \hat{\phi}_0$  für jeden Quark-Flavour  $q$  bestimmt.

### XII.5.3 CKM-Matrix und CP-Verletzung

Die in Gl. (XII.33) eingeführte unitäre Matrix  $\mathcal{V}_{\text{CKM}}$  ist die Verallgemeinerung auf drei Generationen der Mischungsmatrix (XI.13), und wird *Cabibbo–Kobayashi*<sup>(bv)</sup>–*Maskawa*<sup>(bw)</sup>-Matrix, oder

<sup>(bv)</sup>M. KOBAYASHI, 1944– <sup>(bw)</sup>T. MASKAWA, 1940–

kurz *CKM-Matrix* genannt. Deren Elemente werden als

$$\mathcal{V}_{\text{CKM}} \equiv \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (\text{XII.34})$$

geschrieben, wobei jedes  $V_{ij}$  eine komplexe Zahl ist. Im Rahmen des Standardmodells sind diese Zahlen freie Parameter, die aber experimentell gemessen werden können. Dabei findet man für die Beträge der Matrixelemente (vgl. Kap. 12 der Review of Particle Physics [1])

$$|\mathcal{V}_{\text{CKM}}| \approx \begin{pmatrix} 0,974 & 0,225 & 0,004 \\ 0,225 & 0,973 & 0,042 \\ 0,009 & 0,041 & 0,999 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Mischung zwischen der 3. Generation und den zwei ersten ziemlich klein.

Eine unitäre  $3 \times 3$ -Matrix wird allgemein durch  $3^2 = 9$  reelle Parameter bestimmt.<sup>(83)</sup> Aus diesen 9 Parametern können 6 als Phasen geschrieben werden — z.B. als die Phasen der Matrixelemente  $V_{ij}$  mit  $i \leq j$  —, während die 3 anderen Winkel sind.<sup>(84)</sup> 5 dieser Phasen können in den Definitionen der Quark-Felder  $\hat{\psi}_s, \hat{\psi}_b, \hat{\psi}_{d'}, \hat{\psi}_{s'}$  und  $\hat{\psi}_{b'}$  absorbiert werden, entsprechend einer Verschiebung ihrer relativen Phasen zur Phase des  $\hat{\psi}_d$ -Feldes. Es bleiben allgemein also 4 reelle Parameter, einschließlich einer Phase. Somit lautet eine übliche Parametrisierung der CKM-Matrix

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{CKM}} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13} e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13} e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13} e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13} e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (\text{XII.35}) \end{aligned}$$

wobei  $c_{ij} = \cos \vartheta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin \vartheta_{ij}$  mit drei Winkeln  $\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \vartheta_{23}$ .

Zur Illustration dieser Absorption der Phasen in einer Neudefinition der Felder kann man der Einfachheit halber ein Beispiel mit nur zwei Generationen betrachten. Es seien also zwei „Masseneigenzustände“  $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$  und dementsprechend „Wechselwirkungseigenzustände“  $\hat{\psi}_{1'}, \hat{\psi}_{2'}$ , wobei die Letzteren unitäre Linearkombinationen der Ersteren sind:

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_{1'} \\ \hat{\psi}_{2'} \end{pmatrix} = \mathcal{V}_2 \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c e^{i\delta_1} & s e^{i\delta_3} \\ -s e^{i\delta_2} & c e^{i(\delta_2 + \delta_3 - \delta_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

mit einer unitären Matrix  $\mathcal{V}_2$ , deren allgemeine Parametrisierung durch einen Winkel  $\vartheta$  (mit  $c \equiv \cos \vartheta$ ,  $s \equiv \sin \vartheta$ ) und drei Phasen  $\delta_i$  geschrieben wurde.  $\mathcal{V}_2$  lässt sich noch schreiben als

$$\mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} e^{i\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i(\delta_3 - \delta_1)} \end{pmatrix}.$$

Definiert man neue Felder  $\hat{\psi}'_1 \equiv \hat{\psi}_1$ ,  $\hat{\psi}'_2 \equiv e^{i(\delta_3 - \delta_1)} \hat{\psi}_2$ ,  $\hat{\psi}'_{1'} \equiv e^{-i\delta_1} \hat{\psi}_{1'}$  und  $\hat{\psi}'_{2'} \equiv e^{-i\delta_2} \hat{\psi}_{2'}$ , so gilt

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}'_{1'} \\ \hat{\psi}'_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}'_1 \\ \hat{\psi}'_2 \end{pmatrix},$$

<sup>(83)</sup> Eine unitäre  $n \times n$ -Matrix lässt sich als  $e^{iH}$  schreiben, wobei  $H$  eine hermitesche Matrix ist. Die Letztere wird durch  $n$  reelle diagonale Elemente und  $n(n-1)/2$  komplexe Elemente  $H_{ij}$  mit  $i < j$  charakterisiert, entsprechend insgesamt  $n + 2n(n-1)/2 = n^2$  reellen Parametern.

<sup>(84)</sup> In  $n = 3$  Dimensionen kann man  $n(n-1)/2 = 3$  paarweise orthogonale Ebenen finden; die  $n(n-1)/2$  Winkel entsprechen Drehungen in diesen Ebenen.

d.h. die Matrix  $\mathcal{V}_2$  und die ursprünglichen Felder werden durch eine Matrix  $\mathcal{V}'_2$  ohne Phase und durch neue Felder, die sich von den alten einfach um eine Phase unterscheiden, ersetzt. Man sieht noch, dass das Feld  $\hat{\psi}_1$  nicht mehr um eine Phase gedreht werden kann, ohne die Determinante von  $\mathcal{V}'_2$  zu ändern. Dementsprechend können nur  $2n - 1$  Phasen einer unitären  $n \times n$ -Matrix absorbiert werden.

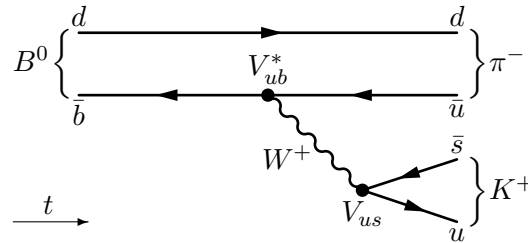
Die Phase  $\delta$  stellt ein wichtiges Merkmal der CKM-Matrix dar. Ist diese Phase nämlich nicht Null, so kann man keinen rein reellen Ausdruck der CKM-Matrix finden. Dies hat dann zur Folge, dass es im Standardmodell CP-verletzende Prozesse geben kann, wie jetzt an einem Beispiel gezeigt wird.

Betrachte man also den Zerfall  $B^0 \rightarrow K^+ + \pi^-$ , wobei im Quarkmodell  $B^0 = d\bar{b}$ ,  $K^+ = u\bar{s}$  und  $\pi^- = d\bar{u}$ , sowie den  $\hat{C}\hat{P}$ -konjugierten Prozess  $\bar{B}^0 \rightarrow K^- + \pi^+$ . Hiernach wird der erstere Prozess als (Z) und der Letztere als ( $\tilde{Z}$ ) bezeichnet.

Zur niedrigsten Ordnung in der schwachen Kopplungskonstanten  $g$  trägt der in Abb. XII.3 dargestellte „direkte“ Prozess

$$(ZD) \quad \bar{b} \rightarrow \bar{u} + W^+ \rightarrow \bar{u} + u + \bar{s}$$

zur Amplitude für den Zerfall (Z) bei. Das Diagramm zeigt sofort, dass die Amplitude für diesen Prozess proportional zum Produkt  $V_{ub}^* V_{us}$  von Matrixelementen der CKM-Matrix ist. Genauer findet



**Abbildung XII.3** – „Direkter“ Prozess für den Zerfall  $B^0 \rightarrow K^+ + \pi^-$ .

man eine Amplitude  $\mathcal{M}_D = |\mathcal{A}_D| e^{i\theta_D} e^{i\delta_D}$  mit  $\delta_D$  der Phase von  $V_{ub}^* V_{us}$  — und zwar  $\delta_D = \delta$ , obwohl das für das Folgende unwesentlich ist — und  $\theta_D$  einer „starken“ Phase, die aus der hadronischen Physik kommt.<sup>(85)</sup>

Ähnlich diesem Prozess (ZD) erhält die Amplitude für den Prozess ( $\tilde{Z}$ ) einen Beitrag aus dem Prozess ( $\tilde{ZD}$ ), der  $\hat{C}\hat{P}$ -konjugiert zu (ZD) ist, und sich mit dem gleichen Diagramm wie in Abb. XII.3 darstellen lässt, indem die Teilchen durch ihre Antiteilchen ersetzt werden. Die zugehörige Amplitude ist dann proportional zu  $V_{ub} V_{us}^*$ , und genauer beträgt  $\tilde{\mathcal{M}}_D = |\mathcal{A}_D| e^{i\theta_D} e^{-i\delta_D}$ : die starke Phase ist die gleiche wie in  $\mathcal{M}_D$  — weil die starke Wechselwirkung unter  $\hat{C}\hat{P}$  symmetrisch ist —, die schwache Phase ist aber das Negative von dieser des  $\hat{C}\hat{P}$ -konjugierten Prozesses. Somit führt die Anwesenheit einer nicht-verschwindenden Phase in der CKM-Matrix zu einem Unterschied zwischen den Amplituden für einen Prozess und dessen  $\hat{C}\hat{P}$ -konjugierten.

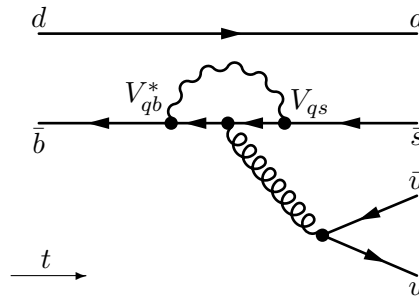
Wenn (ZD) bzw. ( $\tilde{ZD}$ ) der einzige Prozess wäre, der zur führenden Ordnung eine Rolle beim Zerfall (Z) bzw. ( $\tilde{Z}$ ) spielt, dann wären die Raten für (Z) und ( $\tilde{Z}$ ) gleich, da eine Rate nur vom Betragsquadrat der Amplitude abhängt, vgl. Fermis Goldene Regel. Die Phase der CKM-Matrix würde dann im Endeffekt keine Rolle spielen.

In der Tat ist (ZD) nicht der einzige Kanal für den Zerfall (Z) zur Ordnung  $g^2$ . Es gibt noch den durch das „Penguin-Diagramm“ der Abb. XII.4 dargestellte Prozess

$$(ZP) \quad \bar{b} \rightarrow \bar{q} + W^+ \rightarrow g + \bar{q} + W^+ \rightarrow u + \bar{u} + \bar{q} + W^+ \rightarrow \bar{u} + u + \bar{s} \quad \text{mit} \quad \bar{q} = \bar{u}, \bar{c}, \bar{t},$$

dessen Amplitude proportional zum Produkt  $V_{qb}^* V_{qs}$  ist. Genauer lautet die Teilamplitude für (ZP)  $\mathcal{M}_P = |\mathcal{A}_P| e^{i\theta_P} e^{i\delta_P}$  mit  $\delta_P$  der Phase von  $V_{qb}^* V_{qs}$ , die für  $q = c$  oder  $t$  ungleich  $\delta_D$  ist, und  $\theta_P$  einer „starken“ Phase, die wiederum ungleich  $\theta_D$  ist.

<sup>(85)</sup>Grob gesagt folgt diese Phase aus der Tatsache, dass das  $\bar{b}$ - bzw.  $\bar{u}$ -Antiquark nicht frei ist, sondern in einem  $B^0$ - bzw.  $\pi^-$ -Meson eingeschlossen.



**Abbildung XII.4** – „Penguin-Diagramm“ für den Zerfall  $B^0 \rightarrow K^+ + \pi^-$ .

Somit ist die gesamte Amplitude zur Ordnung  $g^2$  für den Zerfall (Z) durch

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_D + \mathcal{M}_P = |\mathcal{A}_D| e^{i\theta_D} e^{i\delta_D} + |\mathcal{A}_P| e^{i\theta_P} e^{i\delta_P}$$

mit  $\delta_D \neq \delta_P$  und  $\theta_D \neq \theta_P$  gegeben.

Die Amplitude für den zu (ZP)  $\hat{C}\hat{P}$ -konjugierten Prozess ( $\widetilde{ZP}$ ) ist dann  $\widetilde{\mathcal{M}}_P = |\mathcal{A}_P| e^{i\theta_P} e^{-i\delta_P}$ , entsprechend für den Zerfall ( $\widetilde{Z}$ ) der gesamten Amplitude

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_D + \widetilde{\mathcal{M}}_P = |\mathcal{A}_D| e^{i\theta_D} e^{-i\delta_D} + |\mathcal{A}_P| e^{i\theta_P} e^{-i\delta_P}.$$

Man prüft einfach nach, dass jetzt die Betragsquadrate von  $\mathcal{M}$  und  $\widetilde{\mathcal{M}}$  jetzt ungleich sind. Genauer gilt

$$|\widetilde{\mathcal{M}}|^2 - |\mathcal{M}|^2 = 4|\mathcal{A}_D||\mathcal{A}_P| \sin(\theta_D - \theta_P) \sin(\delta_D - \delta_P).$$

Daher ist die Zerfallsrate für den Zerfall  $B^0 \rightarrow K^+ + \pi^-$  ungleich der Zerfallsrate für den  $\hat{C}\hat{P}$ -konjugierten Prozess  $\bar{B}^0 \rightarrow K^- + \pi^+$ , was eine Verletzung der CP-Symmetrie darstellt. Eine nötige Voraussetzung für diese Verletzung ist  $\delta_D \neq \delta_P$ , was überhaupt nur dann möglich ist, wenn die CKM-Matrix komplexe Elemente enthält.

Tatsächlich haben die BABAR [45] und BELLE [46] Experimente einen Unterschied zwischen den Raten für die Zerfälle der  $B^0$ - und  $\bar{B}^0$ -Mesonen in geladene Pionen und Kaonen gemessen, und zwar eine Asymmetrie

$$\frac{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow K^- + \pi^+) - \Gamma(B^0 \rightarrow K^+ + \pi^-)}{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow K^- + \pi^+) + \Gamma(B^0 \rightarrow K^+ + \pi^-)} = -0,115 \pm 0,018,$$

deutlich ungleich Null.

**Bemerkung:** Eine zweite nötige Voraussetzung für die Verletzung der CP-Symmetrie ist natürlich auch ein Unterschied zwischen den starken Phasen  $\theta_D$  und  $\theta_P$ , die in Rahmen dieser Vorlesung schwer zu begründen ist — in der Praxis ist die Berechnung solcher Phasen hoch kompliziert.

## Literatur zum Kapitel XII

- Cottingham & Greenwood, *An introduction to the Standard Model of particle physics* [44], Kap. 10–14 & 18.
- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 9.
- Halzen & Martin, *Quarks and Leptons* [22], Kap. 14.4–14.9, 15.1–15.6.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [6], Kap. 22.

Teil D

# **Jenseits des Standardmodells**



blabla...

wie immer fehlt eine Einleitung...

# KAPITEL XIII

## Neutrinos

XIII.1 Neutrino-Mischung, -Oszillationen und -Massen 138

XIII.1.1 Neutrino-Mischung 138

XIII.1.2 Neutrino-Oszillationen 139

XIII.1.3 Neutrino-Massen 143

### XIII.1 Neutrino-Mischung, -Oszillationen und -Massen

Im (minimalen) Standardmodell des Kap. XII koppeln die Neutrinos nicht zum Higgs-Feld, so dass sie auch nach der spontanen Brechung der elektroschwachen Symmetrie masselos bleiben. Es hat sich aber experimentell aufgewiesen, dass die Neutrinos in der Tat eine Masse haben, und dass sich die entsprechenden Masseneigenzustände von den Wechselwirkungseigenzuständen unterscheiden. Diese Beobachtung lässt sich mithilfe einer nicht-diagonalen Mischungsmatrix beschreiben (§ XIII.1.1), die ähnlich der CKM-Matrix für die Quarks ist. Das aus der Existenz der Mischung entstehende Phänomen der Oszillationen von propagierenden Neutrinos zwischen den verschiedenen „Flavours“ — wobei die Bezeichnung in diesem Kapitel synonym für „Leptonenart“ ist — wird dann in § XIII.1.2 beschrieben, zusammen mit den Arten von Experimenten, in denen solche Oszillationen beobachtet wurden.

#### XIII.1.1 Neutrino-Mischung

Wenn die Neutrinos masselos sind, lassen sie sich nur durch ihre schwachen Wechselwirkungen unterscheiden: die unterschiedlichen Arten von Neutrinos werden durch das elektrisch geladene Lepton, mit dem sie ein  $SU(2)_L$ -Dublett bilden, gekennzeichnet:  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ .

Sind die Neutrinos dagegen massiv, dann existieren Masseneigenzustände  $\nu_i, i = 1, 2, 3$  mit jeweiliger Masse  $m_i$ . Wenn alle Massen nicht entartet sind, können im allgemeinsten Fall die Wechselwirkungseigenzustände  $\nu_\ell$  mit  $\ell = e, \mu, \tau$  nicht-triviale Linearkombinationen der Masseneigenzustände sein. Diese Möglichkeit lässt sich mithilfe einer  $3 \times 3$ -Matrix realisieren, der *Pontecorvo*<sup>(bx)</sup>-*Maki*<sup>(by)</sup>-*Nakagawa*<sup>(bz)</sup>-*Sakata*<sup>(ca)</sup>-Matrix oder kurz PMNS-Matrix:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\text{PMNS}} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{XIII.1})$$

Wie die CKM-Matrix ist die PMNS-Matrix unitär. Sie lässt sich daher durch drei Winkel sowie ein paar Phasen parametrisieren. Dabei hängt die Anzahl der nötigen Phasen von der Tatsache ab, ob die Neutrinos gleich ihren eigenen Antiteilchen sind oder nicht. Die erstere Möglichkeit — die für Quarks ausgeschlossen ist, weil sie eine Farb- und eine elektrische Ladung tragen — wird in Abschn. ?? weiter diskutiert [**noch nicht**]. Unterscheiden sich die Neutrinos von den Antineutrinos,

<sup>(bx)</sup>B. PONTECORVO, 1913–1993    <sup>(by)</sup>Z. MAKI, 1929–2005    <sup>(bz)</sup>M. NAKAGAWA, 1932–    <sup>(ca)</sup>S. SAKATA, 1911–1970



so kann  $\mathcal{U}_{\text{PMNS}}$  ähnlich der CKM-Matrix (XII.35) mit drei Winkeln  $\vartheta_{ij}$  und nur einer einzigen Phase  $\delta_{\text{CP}}$  parametrisiert werden:

$$\mathcal{U}_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{XIII.2})$$

mit  $c_{ij} = \cos \vartheta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin \vartheta_{ij}$ .

Falls die Phase ungleich Null ist, führt sie wie bei der Quark-Flavourmischung in § XII.5.3 zur Verletzung der CP-Symmetrie, und zwar in leptonischen Prozessen. Bisher (Anfang 2021) wurden keine solche CP-verletzenden leptonischen Prozesse experimentell beobachtet. Daher ist nichts<sup>(86)</sup> über die Phase bekannt.

Dagegen hat das hiernach beschriebene Phänomen der Neutrino-Oszillationen gezeigt, dass die Mischungswinkel  $\vartheta_{ij}$  nicht gering sind. D.h., die PMNS-Matrix unterscheidet sich stark von der Identitätsmatrix. Somit deuten Messungen auf die Werte

$$\vartheta_{12} \simeq 34^\circ, \quad \vartheta_{23} \simeq 48^\circ, \quad \vartheta_{13} \simeq 8,5^\circ \quad (\text{XIII.3})$$

hin.<sup>(87)</sup> Somit ist die Mischung zwischen  $\nu_2$  und  $\nu_3$  fast maximal, d.h.  $\vartheta_{23}$  beträgt fast  $45^\circ$ . Zum Vergleich gilt für den Cabibbo-Winkel  $\theta_C \approx 13^\circ$ , entsprechend einer kleineren Mischung zwischen  $d$  und  $s$  Quarks.

#### Bemerkungen:

\* Da die Masseneigenzustände  $\nu_i$  nicht direkt messbar sind — dafür sollte die Messung auf einem gravitationsverursachten Prozess beruhen, was mit der Schwäche der Gravitation und den geringen Neutrinomassen unrealistisch ist —, ist die Zuordnung der Labels 1,2,3 rein konventionell, und möglicherweise unabhängig von der tatsächlichen Anordnung der Massen (s. § XIII.1.3). Aus historischen Gründen ist der Masseneigenzustand  $\nu_3$  jener, der am wenigsten im  $\nu_e$  vorkommt, d.h.  $|U_{e3}| = |\sin \vartheta_{13}|$  ist der kleinste Eintrag in der ersten Zeile der PMNS-Matrix.

\* Allgemein könnte es mehr als  $n > 3$  Masseneigenzustände  $\nu_i$  geben. Dann soll die PMNS-Matrix durch eine  $3 \times n$ -Matrix  $\mathcal{U}$  ersetzt werden, die ähnlich der Gl. (XIII.1) die Wechselwirkungseigenzustände als Linearkombinationen der  $\nu_i$  ausdrückt. Dann enthält  $\mathcal{U}$  mehr reellen Parameter (Winkel und Phasen) als im Fall  $n = 3$ .

### XIII.1.2 Neutrino-Oszillationen

Bei seiner Erzeugung oder seinem Nachweis befindet sich ein Neutrino (oder Antineutrino) in einem Wechselwirkungseigenzustand  $\nu_\ell$ , weil beide Ereignisse auf schwachen Prozessen beruhen.<sup>(88)</sup> Zwischen den Ereignissen ist das Neutrino dagegen frei: dann propagiert jeder „ $\nu_i$ -Anteil“ in der Neutrino-Wellenfunktion gemäß einem einfachen Gesetz. Im Allgemeinen unterscheidet sich die Zusammensetzung der Masseneigenzustände zum Zeitpunkt der Messung von jener bei der Erzeugung. Dies führt zur Möglichkeit, dass ein in einem gegebenen Flavour erzeugtes Neutrino später als ein Neutrino eines anderen Flavours detektiert wird.

<sup>(86)</sup>Oder, genauer, wenig bekannt: im 2019 Update der Review of Particle Properties (Tab. 14.7) findet man z.B.  $140^\circ \lesssim \delta_{\text{CP}} \lesssim 370^\circ$  für den geschätzten Wert der Phase mit  $3\sigma$ -Fehlerbalken.

<sup>(87)</sup>Diese Werte sind dem 2019 Update der Review of Particle Properties, Kap. 14 entnommen.

<sup>(88)</sup>Typischerweise entsteht das (Anti)Neutrino in einem Prozess, der den geladenen Leptonenstrom  $\hat{\psi}_{\nu_\ell, L} \gamma^\rho \hat{\psi}_{\ell, L}$  oder dessen Ladungskonjugierte involviert, während die Detektion entweder über geladene Ströme oder über neutrale Ströme erfolgt.

Der entsprechende Formalismus wird erstens vereinfacht dargestellt. Dann werden einige Beispiele von experimentellen Beobachtungen des Phänomens diskutiert, und zwar für Neutrinos, die aus unterschiedlichen Quellen kommen.

### XIII.1.2a Formalismus

Der Einfachheit halber werden in der folgenden Herleitung nur zwei Neutrino-Flavours  $\nu_\ell$ ,  $\nu_{\ell'}$  und damit zwei Masseneigenzustände  $\nu_j$ ,  $\nu_k$  betrachtet

$$\begin{pmatrix} \nu_\ell \\ \nu_{\ell'} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_j \\ \nu_k \end{pmatrix}.$$

Dabei wird der Mischungswinkel als  $\alpha$  bezeichnet, um ihn von den Mischungswinkeln in einem Drei-Flavour-Szenario zu unterscheiden.

Die freien Masseneigenzustände  $\nu_j$ ,  $\nu_k$  propagieren gemäß<sup>(89)</sup>

$$|\nu_i(\mathbf{x})\rangle = e^{-i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}} |\nu_i\rangle = e^{-i(E_i t - \vec{p}_i \cdot \vec{x})} |\nu_i\rangle, \quad (\text{XIII.4})$$

wobei  $E_i$  bzw.  $\vec{p}_i$  die Energie bzw. den Impuls des Zustands bezeichnet. Nach einer Strecke der Länge  $L$ , die in einer Zeitspanne  $t_L$  zurückgelegt wird, gibt dies

$$|\nu_i(t_L)\rangle = e^{-i(E_i t_L - p_i L)} |\nu_i\rangle$$

mit  $p_i \equiv |\vec{p}_i|$ .

Ein Neutrino<sup>(90)</sup> mit Energie  $E$  sei zur Zeit  $t = 0$  als Flavour-Eigenzustand erzeugt, z.B. als  $\nu_\ell$ : sein Zustand lautet dann  $|\nu(0)\rangle = |\nu_\ell\rangle = \cos \alpha |\nu_j\rangle + \sin \alpha |\nu_k\rangle$ . Zum Zeitpunkt  $t_L$ , d.h. nachdem es eine Strecke der Länge  $L$  zurückgelegt hat, ist der Zustand gegeben durch

$$|\nu(t_L)\rangle = \cos \alpha e^{-i(E t_L - p_j L)} |\nu_j\rangle + \sin \alpha e^{-i(E t_L - p_k L)} |\nu_k\rangle,$$

wobei  $p_i = \sqrt{E^2 - m_i^2}$ .

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass das Neutrino dann als ein Neutrino des anderen Flavours  $\nu_{\ell'}$  beobachtet wird, wird gegeben durch die Projektion von dessen Zustand  $|\nu(t_L)\rangle$  auf  $\langle \nu_{\ell'} | = -\sin \alpha \langle \nu_j | + \cos \alpha \langle \nu_k |$ , und zwar

$$\langle \nu_{\ell'} | \nu(t_L, L) \rangle = \cos \alpha \sin \alpha e^{-i E t_L} (e^{i p_k L} - e^{i p_j L}) = i \sin(2\alpha) e^{-i E t_L} e^{i(p_j + p_k)L/2} \sin \frac{(p_k - p_j)L}{2}.$$

Diese Amplitude entspricht einer Wahrscheinlichkeit

$$\mathcal{P}(\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'}) = |\langle \nu_{\ell'} | \nu(t_L, L) \rangle|^2 = \sin^2(2\alpha) \sin^2 \frac{(p_k - p_j)L}{2} \quad (\text{XIII.5})$$

dafür, dass sich das Neutrino nach einer Strecke  $L$  von einem  $\nu_\ell$ - in ein  $\nu_{\ell'}$ -Neutrino umwandelt hat. Dabei sieht man, dass diese Wahrscheinlichkeit unabhängig von der Zeitspanne ist.

Nimmt man an, dass das Neutrino ultrarelativistisch ist, d.h.  $E \gg m_i$ , so gilt

$$p_i \sim E - \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{E},$$

und die Umwandlungswahrscheinlichkeit (XIII.5) wird zu

$$\mathcal{P}(\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'}) = \sin^2(2\alpha) \sin^2 \frac{\Delta m_{jk}^2 L}{4E} \quad \text{mit} \quad \Delta m_{jk}^2 \equiv m_j^2 - m_k^2. \quad (\text{XIII.6})$$

Bei fester Energie des Neutrinos ist diese Wahrscheinlichkeit eine periodische Funktion der zurückgelegten Strecke  $L$ , d.h. der Flavour des Neutrinos oszilliert entlang seiner Trajektorie: dieses Phänomen wird als *Neutrinooszillationen* bezeichnet. Die Amplitude dieser Schwingungen wird durch

<sup>(89)</sup>Die hier benutzten Zustände  $|\nu_i\rangle$  sind auf 1 normiert und orthogonal zueinander:  $\langle \nu_k | \nu_j \rangle = \delta_{jk}$ .

<sup>(90)</sup>Genauer, eine Menge von Neutrinos mit identischen kinematischen Eigenschaften.

den Mischungswinkel  $\alpha$  festgelegt: maximale Mischung gibt die größten Oszillationen, während es in Abwesenheit von Mischung keine Oszillation gibt.

Die Wellenlänge der Oszillationen wird bestimmt durch die Energie des Neutrinos und durch die Differenz der Massenquadrate der Eigenzustände, die propagieren. Experimentell findet man für diese Differenzen<sup>(87)</sup>

$$|\Delta m_{21}^2| \equiv |m_2^2 - m_1^2| \simeq 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad |\Delta m_{32}^2| \equiv |m_3^2 - m_2^2| \simeq 2,4\text{--}2,5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2. \quad (\text{XIII.7})$$

Aus diesen Werten folgert man sofort  $|\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2|$  für die dritte Differenz der Massenquadrate.

### Bemerkungen:

\* Die Oszillation bedeutet, dass die individuellen Leptonenflavour-Quantenzahlen nicht erhalten sind.

\* In einem realistischeren Drei-Flavour-Szenario ist der Ausdruck der Umwandlungswahrscheinlichkeit natürlich komplizierter, doch im Endeffekt hängt sie noch von den gleichen Parametern ab, und zwar von den Einträgen der Mischungsmatrix, die die Amplitude bestimmen, und von den  $\Delta m_{ij}^2$ , die eine Rolle in der Wellenlänge spielen. Somit findet man für die Wahrscheinlichkeit der Umwandlung von einem Neutrino  $\nu_\ell$  in  $\nu_{\ell'}$  nach einer Strecke  $L$

$$\mathcal{P}(\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'}) = \sum_{j=1}^3 |U_{\ell'j}|^2 |U_{\ell j}|^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^3 |U_{\ell'j} U_{\ell'k}^* U_{\ell j} U_{\ell k}| \cos\left(\frac{\Delta m_{jk}^2 L}{2E} - \varphi_{\ell' \ell; jk}\right), \quad (\text{XIII.8a})$$

wobei  $\varphi_{\ell' \ell; jk}$  das Argument der komplexen Zahl  $U_{\ell'j} U_{\ell'k}^* U_{\ell j} U_{\ell k}$  ist. Für Antineutrinos gilt ähnlich

$$\mathcal{P}(\bar{\nu}_\ell \rightarrow \bar{\nu}_{\ell'}) = \sum_{j=1}^3 |U_{\ell'j}|^2 |U_{\ell j}|^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^3 |U_{\ell'j} U_{\ell'k}^* U_{\ell j} U_{\ell k}| \cos\left(\frac{\Delta m_{jk}^2 L}{2E} + \varphi_{\ell' \ell; jk}\right). \quad (\text{XIII.8b})$$

Falls  $\varphi_{\ell' \ell; jk}$  nicht Null ist — was passieren kann, falls  $\delta_{\text{CP}} \neq 0$  in der PMNS-Matrix —, sind die Übergangswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}(\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'})$  und  $\mathcal{P}(\bar{\nu}_\ell \rightarrow \bar{\nu}_{\ell'})$  im Allgemeinen ungleich, entsprechend einer Verletzung der CP-Symmetrie.

\* Setzt man numerische Werte ein, so findet man, dass die Wellenlänge der Schwingung durch

$$\lambda [\text{km}] = 2,48 \frac{E [\text{GeV}]}{\Delta m^2 [\text{eV}^2]}$$

gegeben ist. Damit die Umwandlungswahrscheinlichkeit nicht klein ist, soll  $L$  der Ordnung dieser Wellenlänge bzw. eines Vielfachen davon sein: für eine typische Neutrinoenergie von etwa 1 GeV soll der Abstand zwischen Erzeugung- und Beobachtungspunkt des Neutrinos von etwa  $10^3$  km sein. Dies wird in den nächsten Paragraphen illustriert.

### XIII.1.2b Sonnen-Neutrinos

Eine erste Quelle von Neutrinos, deren Oszillation gemessen wurde, ist die Sonne. Gemäß dem Standard-Sonnenmodell werden im Kern der Sonne nur Elektron-Neutrinos  $\nu_e$  erzeugt, in den dort stattfindenden Kernreaktionen:

- pp I-Kette:  $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$ , wobei die Neutrinos aus  $\beta^+$ -Prozesse kommen;
- pp II-Kette:  $e^- + {}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow e^- + {}^7\text{Be} \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$ .
- pp III-Kette:  $p + {}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow p + {}^7\text{Be} \rightarrow {}^8\text{B} \rightarrow 2 {}^4\text{He} + e^+ + \nu_e$ .

Dabei haben die Neutrinos Energien von etwa 0.1–10 MeV.

Der auf der Erde gemessene Fluss von Elektron-Neutrinos aus den  $pp$  II- und  $pp$  III-Ketten,<sup>(91)</sup> entsprechend  $\nu_e$  die eine Strecke von etwa  $1,5 \cdot 10^8$  km zurückgelegt haben, beträgt nur ungefähr ein Drittel des erwarteten Flusses [47]

$$\frac{\text{gemessener } \nu_e\text{-Fluss}}{\text{erwarteter } \nu_e\text{-Fluss}} \approx 0,35. \quad (\text{XIII.9})$$

Das SNO Experiment<sup>(92)</sup> konnte den erwarteten Fluss, der im Nenner steht, experimentell bestätigen, und zwar durch die Messung des gesamten Flusses an allen Neutrinos ( $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  und  $\nu_\tau$ ).

Dabei wurden nicht nur inelastische Reaktionen, die auf geladenen Strömen — auf dem Prozess  $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$ , wobei das Neutron einem Atomkern gehört — beruhen, in der Messung benutzt, sondern auch Prozesse mit neutralen Strömen für die drei Neutrino-Flavours. Genauer wurden im SNO Experiment sowohl der Prozess  $\nu_e + d \rightarrow e^- + p + p$  als auch  $\nu_\ell + d \rightarrow \nu_\ell + p + n$  und  $\nu_\ell + e^- \rightarrow \nu_\ell + e^-$  für alle drei  $\nu_\ell$  gemessen, wobei  $d$  das Deuteron (gebundener Zustand aus einem Proton und einem Neutron) bezeichnet.

Die Deutung der Beobachtung des Verhältnisses (XIII.9) ist, dass sich die erzeugten Elektron-Neutrinos in die zwei anderen Flavours, die nicht separat gemessen werden, auf dem Weg zur Erde umwandeln. Genauer liefert die Messung Information über den Winkel  $\vartheta_{12}$  und die Differenz  $\Delta m_{21}^2$ .<sup>(93)</sup>

### XIII.1.2c Atmosphärische Neutrinos

Die Streuung von kosmischer Strahlung, insbesondere Protonen, an den Atomkernen der oberen Atmosphäre führt zur Entstehung von positiven Pionen. Jedes  $\pi^+$  zerfällt dann meistens in ein Antimyon  $\mu^+$  und ein Myon-Neutrino  $\nu_\mu$ . Wiederum zerfällt das Antimyon gemäß  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ . Die dabei entstehenden Neutrinos werden kollektiv als *atmosphärische Neutrinos* bezeichnet und haben eine Energie von etwa  $E = 1\text{--}10$  GeV.

Solche atmosphärischen Neutrinos werden dann durch einen Detektor, der sich nah an der Erdoberfläche befindet, nachgewiesen, und zwar durch die Reaktion  $\nu_\ell + A \rightarrow \ell + A'$ , wobei  $\ell = e^-$  oder  $\mu^-$ , während  $A$  und  $A'$  Atomkerne bezeichnen — somit werden die Antineutrinos aus dem  $\mu^+$ -Zerfall ignoriert. Die im Detektor reagierenden Neutrinos können entweder direkt aus der Atmosphäre oberhalb des Labors kommen, oder sie erreichen den Detektor, nachdem sie durch die Erde durchgeflogen sind, d.h. sie kommen „von unten“. Im ersteren Fall haben sie eine Strecke von einige 10 km zurückgelegt, während im letzteren Fall die Strecke etwa  $L \approx 10^4$  km beträgt.

Messungen der Flüsse von Myon-Neutrinos aus beiden Richtungen durch das Super-Kamiokande Experiment haben gezeigt, dass etwa die Hälfte der Myon-Neutrinos, die durch die Erde propagieren, den Detektor nicht als  $\nu_\mu$ , sondern als Neutrinos eines anderen Flavours erreichen [48]

$$\frac{\text{Fluss von } \nu_\mu \text{ von unten}}{\text{Fluss von } \nu_\mu \text{ von oben}} \approx 0,54.$$

Dieses Ergebnis wird meistens als die Oszillation von Myon- in  $\tau$ -Neutrinos interpretiert, d.h. die Messung liefert Einschränkungen über  $\vartheta_{23}$  und  $|\Delta m_{32}^2|$ .

**Bemerkung:** Bei der Interpretation muss man für die Neutrinos, die die Erde durchqueren, sog. Materie-Effekte — auch bekannt als *Mikheyev*<sup>(cc)</sup>–*Smirnov*<sup>(cd)</sup>–*Wolfenstein*<sup>(ce)</sup> (MSW) *Effekt* — berücksichtigen. In Materie werden die Massen  $m_i$  bzw. die Mischungswinkel  $\vartheta_{ij}$  durch effektive

<sup>(91)</sup>Die ersten Messungen der Sonnen-Neutrinos — anhand der Reaktion  $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}$  — und deren Defizit wurden durch R. Davis Jr.<sup>(cb)</sup> in der Homestake-Goldmine durchgeführt

<sup>(92)</sup>Sudbury Neutrino Observatory (Kanada)

<sup>(93)</sup>Da  $\sin^2(2\vartheta_{13})$  ziemlich kleiner als  $\sin^2(2\vartheta_{12})$  ist, hängt die Messung viel weniger von  $\vartheta_{13}$  und  $\Delta m_{31}^2$  ab.

<sup>(cb)</sup>R. DAVIS Jr., 1914–2006    <sup>(cc)</sup>S. MIKHEYEV, 1940–2011    <sup>(cd)</sup>A. YU. SMIRNOV, 1951–    <sup>(ce)</sup>L. WOLFENSTEIN, 1923–2015

Massen bzw. effektive Mischungswinkel ersetzt, was die Amplitude der Oszillationen verstärken kann.

Dieser Effekt spielt auch eine Rolle für die Sonnen-Neutrinos aus der pp III-Kette, die viel mehr oszillieren, als solche aus der pp I- und pp II-Ketten, wenn sie durch die Sonne propagieren.

### XIII.1.2 d Beschleuniger-Neutrinos

Andere Ergebnisse betreffen Neutrinos und Antineutrinos, die in einem (kontrollierten) Experiment bei einem Teilchen-Beschleuniger erzeugt werden, und danach in einem entfernten Detektor gemessen werden. Dabei ist der Abstand zwischen Erzeugung- und Messungspunkt kleiner als bei Sonnen- oder atmosphärischen Neutrinos, was etwas ungünstig ist, um Oszillationen beobachten zu können. Dieser Nachteil wird aber kompensiert durch die Tatsache, dass die Energie und der Fluss der Neutrinos hier ziemlich genau bekannt sind. Insbesondere wird oft einen „nahen“ Detektor in einer Entfernung der Ordnung  $L \approx 1$  km zur Bestimmung des Flusses benutzt.

Beispiele von solchen Experimenten sind K2K (KEK to Kamioka, in Japan, mit einem Abstand  $L \approx 250$  km), OPERA & ICARUS (vom CERN nach dem Gran Sasso, entsprechend  $L = 730$  km) oder MINOS (vom Tevatron am Fermilab nach der Soudan Mine,  $L = 735$  km).

### XIII.1.2 e Kernreaktor-Neutrinos

Schließlich benutzen einige Experimente die Neutrinos, die aus wirtschaftlichen Kernreaktoren emittiert werden. Hier auch sind Energie und Fluß der Neutrinos gut kontrolliert.

Beispiele sind im Japan KamLAND — wobei im Kamioka-Laboratorium die  $\bar{\nu}_e$ -Antineutrinos aus etwa fünfzig Kernkraftwerken mit gut bekannten Leistungen gemessen werden —, CHOOZ (Frankreich), Daya Bay (China) oder RENO (Südkorea). Die zwei letzteren Experimente haben im Frühling<sup>(94)</sup> von 2012 die ersten Messungen von  $\vartheta_{13}$  durchgeführt.

## XIII.1.3 Neutrino-Massen

Die oben diskutierten Neutrino-Oszillationen zeigen, dass die Neutrinos massiv sind, liefern aber keine direkte Messung der Massen, sondern nur Information über die Beträge der Differenzen  $\Delta m_{jk}^2$  der Massenquadrate.

### XIII.1.3 a Massen-Hierarchie

Wie schon erwähnt wurde, folgt aus den experimentell bestimmten Werten von  $|\Delta m_{21}^2|$  und  $|\Delta m_{32}^2|$ , dass  $|\Delta m_{31}^2| \sim |\Delta m_{32}^2|$  gilt. Somit sind  $m_1$  und  $m_2$  „nah an einander“, während  $m_3$  „weit entfernt“ (auf einer Massenskala) ist. Konventionsgemäß ist  $m_2 \geq m_1$  und daher  $\Delta m_{21}^2 \geq 0$ . Dagegen ist das Vorzeichen von der Differenz  $\Delta m_{32}^2$  keine Konvention — und durch die bisherigen Experimente noch nicht bestimmt worden. Anders gesagt ist die Reihenfolge der Massen noch unbekannt, und zwar ob  $m_1 < m_2 \ll m_3$  oder  $m_3 \ll m_1 < m_2$  gilt. Im ersteren Fall spricht man von einer *normalen Hierarchie* —  $\nu_3$  ist der Masseneigenzustand, der den größten Anteil an  $\nu_\tau$  enthält, d.h. am Partner des schwersten geladenen Leptons —, und im letzteren Fall von *invertierter Hierarchie*.

### XIII.1.3 b Direkte Bestimmung der Massen

Kinematische Überlegungen — die auf Energie-Impuls-Erhaltung basieren — können prinzipiell benutzt werden, um die Massen von Neutrinos in Labor-basierten Experimenten zu bestimmen.

Ein Beispiel einer solchen Messung könnte in Untersuchungen des  $\beta$ -Zerfalls<sup>(95)</sup> von Tritium  ${}^3\text{H}$  erfolgen. Dabei beeinflusst die Masse des emittierten Antineutrinos — genauer, eine effektive Masse

<sup>(94)</sup> 8. März für Daya Bay [49], 3. April für RENO [50].

<sup>(95)</sup>  ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$

$m_\nu$ <sup>(96)</sup> — die Position des Endpunkts des Energiespektrums für das emittierte Elektron<sup>(97)</sup> sowie die Krümmung des Spektrums in der Nähe des Endpunkts. Die Ergebnisse solcher Untersuchungen geben bisher nur eine obere Schranke: im September 2019 hat das KATRIN-Experiment eine maximale Neutrinomasse  $m_\nu < 1,1$  eV [51] gemeldet. Weitere Messungen am KATRIN Experiment sollten noch die Schranke um einen Faktor 5 verbessern können, oder eine Masse von etwa 0,4 eV mit hoher Wahrscheinlichkeit messen.

Im Hot Big Bang Modell der Kosmologie beeinflussen die Eigenschaften von Neutrinos, insbesondere deren Flavour-Anzahl und Massen, die frühe Entwicklung des Universums.<sup>(98)</sup> Dies bedeutet auch, dass sich aus kosmologische Beobachtungen Rückschlüsse auf die Neutrino-Parameter ziehen lassen — obwohl diese Rückschlüsse zwar modellabhängig sind. Somit findet man für die Summe der Massen der „leichten“ Neutrinos  $m_{\text{tot}} \lesssim 0.5$  eV.

## Literatur

- Cottingham & Greenwood, *An introduction to the standard model of particle physics* [44], Kap. 19–20.
- Griffiths, *Introduction to elementary particles* [8], Kap. 11.
- Particle Data Group, *Review of Particle Properties 2018* [1], Kap. 14 (bzw. Kap. 15 des online verfügbaren 2019 Updates).

<sup>(96)</sup>  $m_\nu^2 = \sum_j |U_{ej}|^2 m_j^2$  mit den Einträgen der ersten Zeile der PMNS-Matrix.

<sup>(97)</sup> ... dessen Darstellung „Kurie<sup>(cf)</sup>-Plot“ heißt.

<sup>(98)</sup> S. z.B. Kap. 25 der Review of Particle Properties [1].

<sup>(cf)</sup> F. N. D. KURIE, 1907–1972

# Anhänge





# KAPITEL A

## Spezielle Relativitätstheorie

---

### A.1 Isometrien des dreidimensionalen euklidischen Raums 147

- A.1.1 Isometrien 148
- A.1.2 Skalare, Vektoren und Tensoren 149
- A.1.3 Irreduzible Darstellungen 151
- A.1.4 Spinoren 155

### A.2 Lorentz-Transformationen 156

- A.2.1 Linienelement 156
- A.2.2 Lorentz-Transformationen 157
- A.2.3 Beispiele 158

### A.3 Lorentz-Tensoren 159

- A.3.1 Skalare 159
  - A.3.2 Kontravariante Vektoren 159
  - A.3.3 Kovariante Vektoren 160
  - A.3.4 Tensoren 161
  - A.3.5 Kontraktion zweier Tensoren 161
  - A.3.6 Kovariante Formulierung eines physikalischen Gesetzes 162
- 

In diesem Kapitel werden einige Elemente der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) dargestellt. Das Ziel dabei ist hauptsächlich, ein paar Definitionen und Ergebnisse zu sammeln, die für die Elementarteilchenphysik relevant sind, sowie Notationen einzuführen. Insbesondere wird angenommen, dass die Leserin bzw. der Leser schon ausführlichere Kenntnisse zur SRT hat — z.B. zur Bedeutung von Lorentz-Transformationen oder zu dazugehörigen physikalischen Effekten wie Lorentz-Kontraktion oder Zeitdilatation.<sup>(99)</sup>

In einem ersten Schritt (Abschn. A.1) wird der Fall des mehr intuitiven dreidimensionalen euklidischen Raums der nicht-relativistischen Physik diskutiert, beginnend mit dessen Isometrien, dann über die mathematischen Größen, die sich unter solchen Isometrien einfach transformieren, bis hin zur unterliegenden Algebra der Gruppe der Drehungen. Abschnitt A.2 befasst sich dann mit dem Minkowski-Raum der relativistischen Physik und mit dessen Lorentz-Transformationen. Schließlich wird in Abschn. A.3 das Verhalten physikalischer Größen unter solchen Lorentz-Transformationen diskutiert.

## A.1 Isometrien des dreidimensionalen euklidischen Raums

Dieser Abschnitt fasst einige Ergebnisse über Isometrien, insbesondere Drehungen, des dreidimensionalen Raums  $\mathcal{E}_3$  der klassischen nicht-relativistischen Physik zusammen. Dabei wird  $\mathcal{E}_3$  als einen reellen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  betrachtet.

Zunächst werden Isometrien definiert und die charakteristische Eigenschaft deren Darstellungsmatrizen eingeführt (§ A.1.1). Dann befasst sich § A.1.2 mit den mathematischen Größen mit einem

---

<sup>(99)</sup> Am Ende des Kapitels werden einige Literaturhinweise angegeben, in denen der hier weggelassene Stoff behandelt wird.

wohldefinierten Verhalten unter der Wirkung beliebiger Isometrien. Einige Elemente der Theorie der linearen Darstellungen der Drehgruppe, die der Existenz dieser Größen zugrunde liegt, werden in § A.1.3 dargelegt. Schließlich werden noch Spinoren und ihre Transformation unter Drehungen eingeführt (§ A.1.4).

Streng genommen ist das Lesen dieses Abschnitts keine notwendige Voraussetzung für den Rest des Kapitels bzw. des Skripts. Das Ziel ist, die Einführung von Skalaren, Vektoren, Spinoren, usw. — die in der Teilchenphysik vorkommen — irgendwie zu erklären. Dabei ist eine Argumentation im Rahmen des dreidimensionalen euklidischen Raums vielleicht einfacher zu akzeptieren, als wenn man direkt in der relativistischen Raumzeit arbeitet. Die in Abschn. A.2 und A.3 eingeführten Begriffe und mathematischen Größen können dann in Analogie zur nicht-relativistischen Konstruktion gesehen werden.

### A.1.1 Isometrien

Sei eine lineare Abbildung vom dreidimensionalen euklidischen Raum  $\mathcal{E}_3$  in sich selbst der Form

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \mathcal{R}(\vec{x}). \quad (\text{A.1})$$

Die *Isometrien* sind solche Abbildungen, die das euklidische Skalarprodukt  $\vec{x} \cdot \vec{x}$  invariant lassen. Darunter sind z.B. die Translationen sowie Transformationen mit mindestens einem Fixpunkt, wie die Drehungen oder die Punktspiegelungen. Im Folgenden wird die Diskussion auf solche Isometrien beschränkt, die einen gewissen Punkt invariant lassen, der als Ursprungspunkt eines kartesischen Koordinatensystems gewählt wird. Dementsprechend werden nur Vektoren  $\vec{x}$  ausgehend von dieser Ursprung betrachtet.

Um genauer zu sein, sollte man zwischen einem 3-dimensionalen affinen Punktraum — dessen Abbildungen in sich selbst Fixpunkte haben können — und dem assoziierten euklidischen Vektorraum unterscheiden, was hier der Kurze halber nicht gemacht wurde.

Stellt man die Vektoren  $\vec{x}$ ,  $\vec{x}'$  von  $\mathcal{E}_3$  als reelle einspaltige  $3 \times 1$ -Matrizen  $X$ ,  $X'$  und  $\mathcal{R}$  als eine reelle  $3 \times 3$ -Matrix  $\mathcal{R}$  dar, so lässt sich Gl. (A.1) als

$$X \rightarrow X' = \mathcal{R}X \quad (\text{A.2a})$$

umschreiben.<sup>(100)</sup> Unter Verwendung der jeweiligen Koordinaten  $x_i$ ,  $x'_i$  mit  $i = 1, 2, 3$  der Vektoren  $X$ ,  $X'$  und der Matrixelemente  $\mathcal{R}_{ij}$  mit  $i, j = 1, 2, 3$  der Abbildungsmatrix  $\mathcal{R}$  lautet dies auch

$$x_i \rightarrow x'_i = \mathcal{R}_{ij}x_j, \quad (\text{A.2b})$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes<sup>(101)</sup> benutzt wurde.

In Matrixdarstellung lautet das Skalarprodukt  $X^T X$ , wobei  $X^T$  den einzeiligen transponierten Vektor von  $X$  bezeichnet. Damit  $\mathcal{R}$  eine Isometrie darstellt, muss für jeden  $X \in \mathbb{R}^3$

$$X^T X = X'^T X' = (\mathcal{R}X)^T \mathcal{R}X = X^T \mathcal{R}^T \mathcal{R}X$$

gelten; d.h. die Matrix  $\mathcal{R}$  muss der Eigenschaft

$$\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathbb{1}_3 \quad (\text{A.3})$$

mit der  $3 \times 3$ -Identitätsmatrix  $\mathbb{1}_3$  genügen. Umgekehrt stellt jede Matrix  $\mathcal{R}$ , die diese Gleichung erfüllt, eine Isometrie des dreidimensionalen Raums dar.

<sup>(100)</sup>  $X$ ,  $X'$  sind Elemente eines mit  $\mathcal{E}_3$  assoziierten (und oft identifizierten) Koordinatenraums  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>(101)</sup> S. die Bemerkung über die Stelle der Indizes in den einführenden Vorbemerkungen.

Man prüft einfach nach, dass die Isometrien von  $\mathcal{E}_3$  eine Gruppe bilden.<sup>(102)</sup> Ebenfalls formen die assoziierten reellen  $3 \times 3$ -Matrizen mit der Eigenschaft (A.3) die *orthogonale Gruppe*  $O(3)$ .

**Bemerkung:** Dank der Beschränkung auf Isometrien mit einem festen Fixpunkt ist die Korrespondenz zwischen solchen Isometrien von  $\mathcal{E}_3$  und den Matrizen von  $O(3)$  bijektiv.

Mathematisch gesagt ist diese Korrespondenz eine sog. *lineare Darstellung*. Da die Matrizen der  $O(3)$  linearen Abbildungen vom dreidimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^3$ , dem *Darstellungsraum*, in sich selbst entsprechen, spricht man von einer Darstellung vom Grad 3. Die  $O(3)$ -Matrizen sind unitär—sie sind reell und erfüllen Gl. (A.3)—, so dass die Darstellung auch als *unitär* bezeichnet wird. Schließlich ist die Darstellung *irreduzibel*, weil es keinen nicht-trivialen Unterraum des Darstellungsraums gibt, der invariant unter der Wirkung der  $O(3)$  ist.

Bildet man die Determinante der Gleichung (A.3), so erhält man  $(\det \mathcal{R})^2 = 1$ , d.h.  $\det \mathcal{R} = \pm 1$ . Solche Matrizen mit Determinante +1 formen die *spezielle orthogonale Gruppe*  $SO(3)$ , deren Elemente die dreidimensionalen Drehungen (um den Ursprungspunkt) darstellen. Die Isometrien<sup>(103)</sup> mit Determinante  $-1$  ergeben sich durch Komposition der Drehungen mit der Punktspiegelung um den Ursprungspunkt, auch *Raumspiegelung* genannt, die der Abbildungsmatrix  $-\mathbb{1}_3$  entspricht.

**Bemerkung:** Die Bijektivität der Korrespondenz zwischen Isometrien von  $\mathcal{E}_3$  mit einem festen Fixpunkt und  $O(3)$ -Matrizen wird benutzt, um die letzteren ebenfalls als „Isometrien“ zu nennen, vgl. Fußnote 103. Dementsprechend werden die Matrizen von  $SO(3)$  als „Drehungen“ bezeichnet.

## A.1.2 Skalare, Vektoren und Tensoren

In diesem Abschnitt werden Klassen von mathematischen Objekten definiert, die sich unter den Isometrien von  $\mathcal{E}_3$  gemäß allgemeinen Gesetzen transformieren. Somit eignen sich solche Objekte zur mathematischen Darstellung von physikalischen Größen — weshalb sie hiernach etwas salopp als „physikalische Größen“ bezeichnet werden.

Die unterliegende Idee ist, dass die mathematische Formulierung von physikalischen Gesetzen gleichgültig unter Isometrien (z.B. Drehungen) von  $\mathcal{E}_3$  bleiben soll, entsprechend z.B. der nicht-Existenz einer privilegierten Ausrichtung im absoluten newtonschen Raum. Dementsprechend sollen mathematische Objekte benutzt werden, die sich „gut“ unter Isometrien verhalten.

### A.1.2a Skalare

Als *Skalar* wird eine (physikalische) Größe bezeichnet, die unter Isometrien invariant bleibt. Zum Beispiel ist das infinitesimale Volumenelement  $d^3\vec{x} \equiv dx_1 dx_2 dx_3$  ein Skalar, denn aus Gl. (A.2b) folgt  $d^3\vec{x}' = |\det \mathcal{R}| d^3\vec{x} = d^3\vec{x}$  für alle  $\mathcal{R} \in O(3)$ .

Sei  $f(\vec{x})$  eine Funktion auf  $\mathcal{E}_3$ , entsprechend einer ortsabhängigen physikalischen Größe. In einer isometrischen Transformation  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$  wird diese Funktion zu einer neuen Funktion  $f'(\vec{x}')$ . Die Funktion  $f$  wird *skalar* genannt — und wird als *Skalarfeld* bezeichnet —, wenn für jede Isometrie  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$  die transformierte Funktion  $f'$  der Gleichung  $f'(\vec{x}') = f(\vec{x})$  genügt. Ein Beispiel von Skalarfeld ist das elektrostatische Skalarpotential  $\Phi(\vec{x})$ .

#### Bemerkungen:

\* Für das Verständnis der Bedeutung der transformierten Funktion  $f'$  lohnt es sich, die Transformation  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$  nicht als eine „aktive Transformation“—entsprechend einer Änderung des Zustands eines physikalischen Systems (z.B. dessen Orientierung, wenn das System nicht punktförmig ist) bei unverändertem Koordinatensystem—, sondern als eine „passive Transformation“—wobei der Zustand des Systems unverändert bleibt, während das Koordinatensystem transformiert ist. Beispielsweise

<sup>(102)</sup> 1. Die Komposition zweier Isometrien ergibt eine Isometrie. 2. Die Komposition ist assoziativ. 3. Die Identität wirkt als neutrales Element bzgl. der Komposition. 4. Jede Isometrie besitzt ein inverses Element.

<sup>(103)</sup> Genauer, die durch eine Matrix mit Determinante  $-1$  dargestellten Isometrien.

ist die aktive Drehung eines Vektors um einen Winkel  $\theta$  um eine gegebene Achse äquivalent zur passiven Drehung um den Winkel  $-\theta$  um die gleiche Achse.<sup>(104)</sup>

\* Auch wenn eine Funktion  $f$  skalar ist, kann deren Variation  $f'(\vec{x}) - f(\vec{x})$  in einem Punkt nicht null sein. Diese Variation wird in § A.1.3 c für den Fall einer infinitesimalen Drehung berechnet.

Einige physikalischen Größen bleiben invariant unter der Wirkung der Drehungen, ändern aber ihr Vorzeichen unter der Raumspiegelung — und somit, unter der Isometrien mit Determinante  $-1$ . Eine solche Größe wird *Pseudoskalar* genannt.

### A.1.2 b Vektoren

In der Physik wird nicht jedes Element eines Vektorraums als *Vektor* bezeichnet. Die Bezeichnung wird nur für solche Größen verwendet, deren Koordinaten sich unter einer Isometrie ähnlich verhalten, wie die Raumkoordinaten. Somit transformieren sich die Koordinaten  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  eines Vektors gemäß [vgl. Gl. (A.2b)]

$$V_i \rightarrow V'_i = \mathcal{R}_{ij} V_j. \quad (\text{A.4a})$$

In Matrixdarstellung lautet diese Transformation

$$V \rightarrow V' = \mathcal{R}V. \quad (\text{A.4b})$$

Ein triviales Beispiel von Vektor ist die Geschwindigkeit eines Teilchens.

Analog zu den Skalarfeldern bzw. Pseudoskalaren werden *Vektorfelder* bzw. *Pseudovektoren* definiert. Die Letzteren werden auch *Axialvektoren* genannt.

Ein wichtiges Beispiel von Vektorfeld ist der Gradient-Operator  $\vec{\nabla}_{\vec{x}}$ , wobei der Index  $\vec{x}$  weggelassen wird, wenn es keine Mehrdeutigkeit geben kann. Unter einer Isometrie (A.1)–(A.2) transformiert sich dessen Matrixdarstellung gemäß

$$\nabla_{\vec{x}} \rightarrow \nabla_{\vec{x}'} = \mathcal{R} \nabla_{\vec{x}}. \quad (\text{A.5})$$

Beweis: Betrachtet man die Komponenten des Gradienten, so liefert die Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} = \mathcal{R}_{ji} \frac{\partial}{\partial x'_j} = (\mathcal{R}^T)_{ij} \frac{\partial}{\partial x'_j}.$$

In Matrixdarstellung lautet dies  $\nabla_{\vec{x}} = \mathcal{R}^T \nabla_{\vec{x}'}$ , woraus Gl. (A.5) nach Inversion unter Verwendung von  $(\mathcal{R}^T)^{-1} = \mathcal{R}$  [vgl. Gl. (A.3)] folgt.  $\square$

Infolgedessen ist das elektrostatische Feld  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$  ein Vektorfeld.

### A.1.2 c Tensoren beliebiger Stufe

Ein *Tensor* ist eine Größe, deren Koordinatendarstellung eine beliebige feste Zahl von Indizes — die *Stufe* des Tensors — erfordert, z.B.  $\mathcal{T}_{ij}$ , wobei jeder Index sich unter Isometrien wie die Komponenten eines Vektors transformiert, also gemäß Gl. (A.4a). Beispielsweise lautet die Transformation eines Tensors 2. Stufe

$$\mathcal{T}_{ij} \rightarrow \mathcal{T}'_{ij} = \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{jl} \mathcal{T}_{kl}. \quad (\text{A.6})$$

Der auf die Tensorkoordinaten wirkenden Operator für die Isometrie ist somit das Produkt der Isometrien auf jeden Index.

Dazu definiert man noch *Pseudotensoren*, deren Komponenten sich unter Isometrien wie die Komponenten von Pseudovektoren verhalten, sowie ortsabhängige *Tensorfelder*.

#### Bemerkungen:

\* Da jeder Index die Werte 1,2,3 annehmen kann, hat ein Tensor  $k$ -ter Stufe insgesamt  $3^k$  Komponenten.

<sup>(104)</sup>Zu aktiven und passiven Transformationen, s. z.B. Ref. [7], Kap. 7.1.

\* Skalare bzw. Vektoren sind Tensoren 0. bzw. 1. Stufe.

\* Die Komponenten eines Tensors 2. Stufe  $\mathcal{T}_{ij}$  können als die Elemente einer  $3 \times 3$ -Matrix  $\mathcal{T}$  betrachtet werden. Dann wird das Transformationsgesetz (A.6) zu

$$\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}' = \mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{R}^T = \mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{R}^{-1}, \tag{A.7}$$

entsprechend der Transformation einer Matrix unter eine Änderung des Koordinatensystems.

**Invariante Tensoren**

Nimmt man  $\mathcal{T}_{ij} = \delta_{ij}$  in Gl. (A.6), wobei  $\delta_{ij}$  das übliche Kronecker<sup>(cg)</sup>-Symbol ( $\delta_{ij} = 1$  wenn  $i = j$ , sonst 0) bezeichnet, so erhält man  $\mathcal{T}'_{ij} = \mathcal{T}_{ij}$ . Ein solcher Tensor, dessen Komponenten unter Isometrien gleich bleiben, heißt *invarianter Tensor*.

Ein weiteres Beispiel ist der vollständig antisymmetrische *Levi-Civita*<sup>(ch)</sup>-Tensor

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{A.8}$$

Da jeder Index sich gemäß Gl. (A.6) transformiert, erhält man

$$\epsilon_{ijk} \rightarrow \epsilon'_{ijk} = \mathcal{R}_{ii'}\mathcal{R}_{jj'}\mathcal{R}_{kk'}\epsilon_{i'j'k'} = (\det \mathcal{R})\epsilon_{ijk}. \tag{A.9}$$

Somit ist der Levi-Civita-Tensor ein invarianter Pseudotensor, der unverändert unter Drehungen bleibt, während er unter Raumspiegelung sein Vorzeichen ändert.

**Kontraktion zweier Tensoren**

Es seien  $V_i, W_j$  die Komponenten zweier Vektoren. Dann sind die 9 Produkte  $V_iW_j$  die Komponenten eines Tensors 2. Stufe. Setzt man die zwei Indizes  $i$  und  $j$  gleich und summiert man dann über alle Werte von  $i$ , so erhält man  $V_iW_i$ . Das ist gerade das Skalarprodukt der zwei Vektoren, d.h. ein Tensor 0. Stufe.

Allgemeiner erhält man ausgehend von einem Tensor  $k$ -ter Stufe einen Tensor der Stufe  $k - 2$ , indem zwei Indizes des Ausgangstensors gleichgesetzt und dann die Summe über alle Werte des Index gebildet wird. Diese Operation wird *Kontraktion* genannt.

Beispielsweise liefert die Kontraktion der zwei Indizes eines Tensors 2. Stufe  $\mathcal{T}_{ij}$  gerade die Spur  $\text{Tr } \mathcal{T}$  der assoziierten Matrix  $\mathcal{T}$ . Betrachtet man den Pseudotensor 5. Stufe  $\epsilon_{ijk}V_lW_m$ , mit  $V_l, W_m$  den Komponenten zweier Vektoren  $\vec{V}$  und  $\vec{W}$ , und bildet man die doppelte Kontraktion zum einen der Indizes  $j$  und  $l$ , zum anderen von  $k$  und  $m$ , so ergibt sich der Pseudovektor mit Komponenten  $\epsilon_{ijk}V_jW_k$ , d.h. der Kreuzprodukt  $\vec{V} \times \vec{W}$ .

**A.1.3 Irreduzible Darstellungen**

In diesem Paragraph wird das Verhalten physikalischer Größen unter Isometrien von  $\mathcal{E}_3$ , und insbesondere unter Drehungen, etwa systematischer untersucht. Dafür werden einige Begriffe und Ergebnisse der Gruppentheorie eingeführt und ohne Beweis verwendet.

**A.1.3a Infinitesimale Drehungen**

Eine Drehung um den infinitesimal kleinen Winkel  $d\theta$  um die Koordinatenachse  $j$  transformiert einen Vektor  $\vec{x}$  von  $\mathcal{E}_3$  in

$$\vec{x}' = \mathcal{R}(\vec{x}) = \vec{x} + d\theta \vec{e}_j \times \vec{x}, \tag{A.10a}$$

wobei  $\vec{e}_j$  der Einheitsvektor in Richtung  $j$  ist. In Koordinaten lautet dies

$$x'_k = \mathcal{R}_{kl}x_l = x_k + d\theta \epsilon_{jkl}x_l. \tag{A.10b}$$

<sup>(cg)</sup>L. KRONECKER, 1823–1891    <sup>(ch)</sup>T. LEVI-CIVITA, 1873–1941

Somit sind die Elemente der Darstellungsmatrix  $\mathcal{R}$  gegeben durch

$$\mathcal{R}_{kl} = \delta_{kl} + d\theta \epsilon_{jkl}. \quad (\text{A.10c})$$

Diese Drehmatrix kann als

$$\mathcal{R} = \mathbb{1}_3 - i d\theta \mathcal{J}_j \quad (\text{A.10d})$$

umgeschrieben werden, wobei  $\mathcal{J}_j$  eine  $3 \times 3$ -Matrix ist, die als *Generator* oder *Erzeuger* der Gruppe  $\text{SO}(3)$  bezeichnet ist. Aus den zwei letzteren Gleichungen leitet man die Matrixelemente von  $\mathcal{J}$  ab:

$$(\mathcal{J}_j)_{kl} = -i \epsilon_{jkl}. \quad (\text{A.11a})$$

In Matrixdarstellung lauten die drei Generatoren von  $\text{SO}(3)$

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11b})$$

Diese Matrizen sind hermitesch. Man prüft einfach nach, dass die Generatoren  $\mathcal{J}_j$  den Vertauschungsrelationen

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k \quad (\text{A.11c})$$

genügen.

Allgemein lautet die infinitesimale Drehung um den Winkel  $d\theta$  um die Richtung mit Einheitsvektor  $\vec{e}$

$$\mathcal{R} = \mathbb{1}_3 - i d\theta \vec{e} \cdot \vec{\mathcal{J}}, \quad (\text{A.12})$$

wobei zu beachten ist, dass das Punktprodukt  $\vec{e} \cdot \vec{\mathcal{J}}$  eine Matrix bezeichnet. Eine Drehung um einen beliebigen Winkel  $\theta$  kann dann als Produkt von  $N$  Drehungen um den Winkel  $\theta/N$  um die gleiche Achse ausgedrückt werden. Somit erhält man

$$\mathcal{R} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1}_3 - i \frac{\theta}{N} \vec{e} \cdot \vec{\mathcal{J}} \right)^N = \exp(-i\theta \vec{e} \cdot \vec{\mathcal{J}}). \quad (\text{A.13})$$

**Bemerkung:** Die Einführung des Faktors  $i$  in Gl. (A.10d), und entsprechend in die Matrizen  $\mathcal{J}_j$  Gl. (A.11), ist zwar überraschend, da die  $\text{SO}(3)$ -Matrizen reell sind. Dieser Faktor erlaubt aber eine einfache Verallgemeinerung auf Gruppen komplexer Matrizen, wie z.B. in § A.1.4 unten.

### A.1.3 b Lineare Darstellungen der Gruppe der Drehungen

Wie schon in § (A.1.1) erwähnt wurde, handelt es sich bei den  $3 \times 3$ -Matrizen  $\mathcal{R}$  im vorigen Paragraph um die Operatoren (auf  $\mathbb{R}^3$ ) einer *linearen Darstellung* von Grad 3 der Drehungen  $\mathcal{R}$  des euklidischen Raums  $\mathcal{E}_3$ .

Allgemeiner kann man die Drehungen als Operatoren (bzw. Matrizen, wenn  $\mathcal{E}$  endlicher Dimension ist)  $S(\mathcal{R})$  auf einem Vektorraum  $\mathcal{E}$  darstellen, wobei  $S$  ein Gruppenhomomorphismus von der Drehgruppe in die Gruppe der Operatoren auf  $\mathcal{E}$  ist. Betrachtet man dann eine infinitesimale Drehung, so lässt sich der assoziierte Operator in der Form (A.12) schreiben, wobei  $\mathcal{R}$  bzw. die Matrizen  $\mathcal{J}_j$  durch  $S(\mathcal{R})$  bzw. durch drei Operatoren  $J_j^{(\mathcal{E})}$  zu ersetzen sind. Meistens benutzt man unitäre Darstellungen, so dass die Generatoren  $J_j^{(\mathcal{E})}$  hermitesch sind.<sup>(105)</sup> Dank Gl. (A.13) bestimmen die Letzteren völlig die Transformationen durch Drehungen.

Ein wichtiger Punkt ist, dass die Vertauschungsrelationen (A.11c) auch für die Generatoren  $J_j^{(\mathcal{E})}$  gelten. Diese Relationen werden (in der Physik) *Lie<sup>(ci)</sup>-Algebra der Gruppe* genannt. Daraus folgen einige Ergebnisse:<sup>(106)</sup>

<sup>(105)</sup> Aus  $J_j^{(\mathcal{E}) \dagger} = J_j^{(\mathcal{E})}$  folgt für die Drehung um  $\theta$  um die  $j$ -Achse  $S(\mathcal{R})^\dagger = (e^{i\theta J_j^{(\mathcal{E})}})^\dagger = e^{-i\theta J_j^{(\mathcal{E})}} = S(\mathcal{R})^{-1}$ .

<sup>(106)</sup> Diese Eigenschaften sollten aus der Quantenmechanik-Vorlesung schon bekannt sein.

<sup>(ci)</sup> S. LIE, 1842–1899

- Der Operator  $(\vec{J}^{(\mathcal{E})})^2 \equiv (J_1^{(\mathcal{E})})^2 + (J_2^{(\mathcal{E})})^2 + (J_3^{(\mathcal{E})})^2$  kommutiert mit jedem Generator  $J_j^{(\mathcal{E})}$  und damit mit jedem Operator  $S(\mathcal{R})$ . Somit ist jeder Eigenunterraum von  $(\vec{J}^{(\mathcal{E})})^2$  invariant unter der Gruppe der  $S(\mathcal{R})$ .
- Die möglichen Eigenwerte von  $(\vec{J}^{(\mathcal{E})})^2$  sind der Form  $j(j+1)$  mit  $j$  ganz- oder halbzahlrig.
- Die Eigenwerte von  $J_3^{(\mathcal{E})}$  im Eigenunterraum  $(\vec{J}^{(\mathcal{E})})^2$  assoziiert mit dem Eigenwert  $j$  sind die  $2j+1$  reellen Zahlen  $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ . Ein zugehöriger Eigenvektor wird hiernach als  $|j, m\rangle$  bezeichnet.
- Ausgehend von einem Eigenvektor  $|j, m_0\rangle$  erhält man durch sukzessive Anwendungen der Leiteroperatoren  $J_{\pm}^{(\mathcal{E})} \equiv J_1^{(\mathcal{E})} \pm iJ_2^{(\mathcal{E})}$  — die  $m$  um  $\pm 1$  vergrößern — alle  $|j, m\rangle$  für einen gegebenen Wert  $j$ . Diese Vektoren erzeugen einen Untervektorraum  $\mathcal{E}_j$  der Dimension  $2j+1$ , invariant unter den Drehoperatoren  $S(\mathcal{R})$ . Die Einschränkungen der  $S(\mathcal{R})$  auf  $\mathcal{E}_j$  bilden also eine Darstellung der Drehungen. Da kein nicht-trivialer Unterraum von  $\mathcal{E}_j$  invariant unter allen Drehungen ist, ist diese Darstellung irreduzibel. Dazu kann man zeigen, dass alle Darstellungen mit dem gleichen Eigenwert  $j$  äquivalent zueinander sind, so dass  $j$  die Darstellung vollständig charakterisiert.

### Beispiele

Bei der Darstellung mithilfe von  $3 \times 3$ -Matrizen des § A.1.3 a handelte es sich um eine Darstellung von Grad 3. Für die Generatoren (A.11) gilt  $\vec{J}^2 = 2 \cdot \mathbb{1}_3$ , entsprechend  $j = 1$ . Da  $2j+1 = 3$  ist die Darstellung irreduzibel. Somit charakterisiert  $j = 1$  die Transformation eines Vektors  $\vec{x}$  von  $\mathcal{E}_3$ .

Betrachten wir jetzt die Transformationen der Tensoren 2. Stufe. Der assoziierten Darstellungsraum ist der Dimension  $3^2 = 9$ . Gemäß Gl. (A.6) ist jetzt der Operator  $S(\mathcal{R})$  gleich dem Produkt zweier auf einem einzigen Index wirkenden Operatoren. Für eine infinitesimale Drehung gilt

$$S(\mathcal{R}) = (\mathbb{1}_3 - i d\theta \vec{e} \cdot \vec{J}_{(1)}) \otimes (\mathbb{1}_3 - i d\theta \vec{e} \cdot \vec{J}_{(2)}) = \mathbb{1}_9 - i d\theta \vec{e} \cdot (\vec{J}_{(1)} + \vec{J}_{(2)}) + \mathcal{O}((d\theta)^2),$$

wobei  $\vec{J}_{(1)}$  und  $\vec{J}_{(2)}$  die Generatoren der Drehungen auf jeden Index sind.<sup>(107)</sup>

Der Generator der Transformation für Tensoren ist somit  $\vec{J} \equiv \vec{J}_{(1)} + \vec{J}_{(2)}$ ,<sup>(107)</sup> d.h. die Summe zweier miteinander kommutierenden Operatoren gehorchend der Lie-Algebra (A.11c). Die möglichen Eigenwerte von  $\vec{J}$  sind dann<sup>(106)</sup>  $j(j+1)$  mit  $j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2$ , wobei  $j_1, j_2$  die Eigenwerte von  $\vec{J}_{(1)}, \vec{J}_{(2)}$  sind. Hier gilt  $j_1 = j_2 = 1$ , so dass  $j$  die Werte 0, 1 und 2 annehmen kann: der Darstellungsraum der Tensoren ist die direkte Summe der zugehörigen Eigenräumen mit der jeweiligen Dimension 1, 3 und 5.

Was sollen diese Eigenräume bzw. die zugehörigen Tensoren sein? Das Transformationsgesetz (A.6) zeigt, dass sich ein symmetrischer bzw. antisymmetrischer Tensor 2. Stufe unter Drehungen in einen symmetrischen bzw. antisymmetrischen Tensor transformiert; d.h. die Symmetrie unter Austausch der Indizes bleibt erhalten unter Drehungen. Somit bilden die antisymmetrischen Tensoren einen unter Drehungen invarianten Unterraum der Dimension 3, entsprechend der Angabe von  $\mathcal{T}_{12}, \mathcal{T}_{13}$  und  $\mathcal{T}_{23}$ . Dieser Unterraum entspricht einer vektoriellen ( $j = 1$ ) Darstellung — tatsächlich kann mit jedem antisymmetrischen Tensor  $\mathcal{T}_{jk}$  ein Vektor  $V_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathcal{T}_{jk}$  assoziiert werden.<sup>(108)</sup>

Zum anderen bilden die symmetrischen Tensoren 2. Stufe einen Unterraum der Dimension 6. In § A.1.2 c wurde schon erwähnt, dass solche, die proportional zur Identität sind  $\mathcal{T}_{ij} \propto \delta_{ij}$ , invariant unter Drehungen sind: diese Tensoren bilden eine skalare Darstellung ( $j = 0$ ). Indem man schreibt

$$\mathcal{T}_{ij} = \frac{1}{3} \mathcal{T}_{kk} \delta_{ij} + \left( \mathcal{T}_{ij} - \frac{1}{3} \mathcal{T}_{kk} \delta_{ij} \right),$$

<sup>(107)</sup> Im rechten Glied der Gleichung ist  $\vec{J}_{(1)} + \vec{J}_{(2)}$  eine Kurzform für  $\vec{J}_{(1)} \otimes \mathbb{1}_3 + \mathbb{1}_3 \otimes \vec{J}_{(2)}$ .

<sup>(108)</sup> Die Abbildung zwischen  $\mathcal{T}_{jk}$  und  $V_i$  ist bijektiv:  $\mathcal{T}_{jk} = \epsilon_{ijk} V_i$ .



lässt sich jeder symmetrische Tensor in einen Anteil proportional zur Identität und einen spurlosen Anteil zerlegen. Da die Spur invariant unter Rotationen ist [vgl. Gl. (A.7)], bilden die spurlosen symmetrischen Tensoren die Darstellung vom Grad 5, entsprechend  $j = 2$ .

**Bemerkung:** Im Fall einer anderen Gruppe — z.B. für die Gruppe der  $D$ -dimensionalen Drehungen, entsprechend natürlich der speziellen orthogonalen Gruppe  $SO(D)$  —, verallgemeinern sich die Vertauschungsrelationen (A.11c) der zugehörigen Generatoren — deren Anzahl nicht mehr unbedingt gleich 3 ist — auf die Lie-Algebra  $[J_i, J_j] = i f_{ijk} J_k$ , mit sog. *Strukturkonstanten*  $f_{ijk}$ .

### A.1.3c Transformation eines skalaren Feldes

Bei den zwei Beispielen im letzteren Abschnitt handelt es sich um Darstellungen der Drehgruppe auf einem Darstellungsraum endlicher Dimension. Jetzt wird die Wirkung von Drehungen auf skalare Felder untersucht, d.h. auf die Elemente eines Vektorraums unendlicher Dimension.

Sei wieder die Drehung um einen infinitesimal kleinen Winkel  $d\theta$  um die  $j$ -Achse. Die Variation einer skalaren Funktion  $[f'(\vec{x}') = f(\vec{x})]$  im Punkt  $\vec{x}$  unter dieser Drehung lautet

$$f'(\vec{x}) - f(\vec{x}) = f'(\vec{x}) - f'(\vec{x}') \simeq -\frac{\partial f'(\vec{x})}{\partial x_k} \delta x_k$$

mit  $\delta x_k \equiv x'_k - x_k$ , wobei die zweite Gleichung aus einer Taylor-Entwicklung folgt. Zur erster Ordnung kann  $f'$  durch  $f$  ersetzt werden. Unter Verwendung des Ausdrucks (A.10b) für  $\delta x_k$  ergibt sich dann

$$f'(\vec{x}) - f(\vec{x}) = d\theta \epsilon_{jkl} x_l \frac{\partial f}{\partial x_k} = -i d\theta J_j f(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad J_j \equiv -i \epsilon_{jlk} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (\text{A.14})$$

einem differentiellen Operator. Vektoriell lässt sich der letztere als das Kreuzprodukt

$$\vec{J} = \vec{x} \times (-i\vec{\nabla}) \quad (\text{A.15})$$

umschreiben: bis auf einen fehlenden Faktor  $\hbar$  erkennt man den Ausdruck des Bahndrehimpulses in Ortsdarstellung in der Quantenmechanik.

Der Darstellungsraum ist der Raum der Funktionen auf  $\mathbb{R}^3$ . Da die Drehungen nur auf die Winkelkoordinaten  $\theta$  und  $\varphi$  wirken, kann man Funktionen von nur diesen Winkeln betrachten. Der entsprechende Raum  $\mathcal{E}$  ist wieder unendlicher Dimension. Die Darstellung lässt sich als eine unendliche direkte Summe irreduzibler Darstellungen, entsprechend jedem möglichen Wert von  $j$ , zerlegen:<sup>(106)</sup>

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \dots$$

Eine Basis des Unterraums  $\mathcal{E}_\ell$  — dessen Dimension  $2\ell+1$  ist — besteht aus den Kugelflächenfunktionen  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ , die die Eigenvektoren von  $J_z$  [Gl. (A.14)] mit den Eigenwerten  $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$  sind.

### A.1.3d Tensoroperatoren

Bisher wurde die Transformation unter Drehungen für die Elemente des Darstellungsraums  $\mathcal{E}$  betrachtet. In diesem Abschnitt wollen wir die Transformation der Matrixelemente von Operatoren auf  $\mathcal{E}$  untersuchen.

Hiernach werden einige Notationen der Quantenmechanik verwendet: ein Element von  $\mathcal{E}$  wird als  $|\psi\rangle$  bezeichnet, und das unter einer Drehung  $\mathcal{R}$  transformierte Element als  $|\psi'\rangle = S(\mathcal{R})|\psi\rangle$ . Die konjugierten Bras lauten  $\langle\psi|$  und  $\langle\psi'| = \langle\psi|S(\mathcal{R})^{-1}$ .<sup>(109)</sup>

Ein Operator  $\Sigma$  auf  $\mathcal{E}$  wird *skalar* genannt, wenn seine Matrixelemente unverändert unter Drehungen bleiben, d.h. wenn für alle  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$  in  $\mathcal{E}$  und für jede Drehung  $\mathcal{R}$

$$\langle\psi'_1|\Sigma|\psi'_2\rangle = \langle\psi_1|\Sigma|\psi_2\rangle. \quad (\text{A.16a})$$

<sup>(109)</sup> Im Fall einer unitären Darstellung gilt auch  $\langle\psi'| = \langle\psi|S(\mathcal{R})^\dagger$ ; für nicht-unitäre Darstellungen soll man aber  $S(\mathcal{R})^{-1}$  benutzen.



Dies gibt sofort

$$S(\mathcal{R})^{-1} \Sigma S(\mathcal{R}) = \Sigma, \quad (\text{A.16b})$$

d.h.  $\Sigma$  soll mit jedem Operator  $S(\mathcal{R})$  kommutieren, insbesondere mit den Generatoren  $J_j^{(\mathcal{E})}$  der auf  $\mathcal{E}$  wirkenden Drehoperatoren:

$$[\Sigma, J_j^{(\mathcal{E})}] = 0. \quad (\text{A.16c})$$

Ein Beispiel von skalarem Operator ist einfach  $(\vec{J}^{(\mathcal{E})})^2$ .

Ähnlich bilden drei Operatoren  $V_1, V_2, V_3$  einen sog. *Vektoroperator*, wenn sich die Matrixelemente gemäß

$$\langle \psi'_1 | V_i | \psi'_2 \rangle = \mathcal{R}_{ik} \langle \psi_1 | V_k | \psi_2 \rangle \quad (\text{A.17a})$$

für alle  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$  in  $\mathcal{E}$  und für jede Drehung  $\mathcal{R}$  transformieren, entsprechend

$$S(\mathcal{R})^{-1} V_i S(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{ik} V_k. \quad (\text{A.17b})$$

Schreibt man diese Beziehung für die infinitesimale Drehung (A.10d) um die  $j$ -Achse mit  $\mathcal{J}_j$  ersetzt durch  $J_j^{(\mathcal{E})}$ , so findet man zur ersten Ordnung in  $d\theta$

$$[V_i, J_j^{(\mathcal{E})}] = i \epsilon_{ijk} V_k. \quad (\text{A.17c})$$

Der Gleichung (A.11c) nach ist  $\vec{J}^{(\mathcal{E})}$  selber ein Vektoroperator.

Man definiert noch *Tensoroperatoren* höherer Stufe, durch die Verallgemeinerung der Beziehung (A.17a) auf mehrere Indizes.

### A.1.4 Spinoren

Bisher wurden nur Darstellungen entsprechend ganzzahligen Werten von  $j$  diskutiert. Wenn  $j = \frac{1}{2}$ , dann ist der Darstellungsraum von Dimension  $2j + 1 = 2$ . In einer geeigneten Basis lauten die Generatoren der Drehungen  $\vec{J} = \vec{\sigma}/2$  mit den Pauli<sup>(ej)</sup>-Matrizen  $\sigma_i$ :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Diese Matrizen genügen der Eigenschaft

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.19})$$

woraus die Vertauschungsrelationen (A.11c) für  $\vec{\sigma}/2$  sofort folgen.

Eine wichtige Besonderheit der Spin- $\frac{1}{2}$ -Darstellung ist, dass  $J_1$  und  $J_3$  reelle Matrizen sind. Infolgedessen können die Drehmatrizen (A.13) in dieser Darstellung auch komplexe Koeffizienten haben: man findet einfach, dass der Operator für eine Rotation um den Winkel  $\theta$  um die Richtung mit Einheitsvektor  $\vec{e}$  durch<sup>(110)</sup>

$$S(\mathcal{R}) = \exp\left(-i \frac{\theta}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{e}\right) = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1}_2 - i \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \vec{e} \cdot \vec{\sigma} \quad (\text{A.20})$$

gegeben ist. Somit ist der Darstellungsraum ein komplexer Vektorraum, statt eines reellen Vektorraums. Die zweikomponentigen Elemente dieses Darstellungsraums werden als *Spinoren* bezeichnet.

Die Matrizen  $S(\mathcal{R})$  sind komplexe  $2 \times 2$ -Matrizen. Dank der Hermitizität der Pauli-Matrizen sind diese Matrizen unitär, vgl. Fußnote 105. Man prüft einfach nach, dass deren Determinante 1 ist. Somit handelt es sich um die Matrizen der *speziellen unitären Gruppe*  $SU(2)$ .

<sup>(110)</sup> Der Beweis der zweiten Gleichung beruht auf der Identität  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{e})^2 = \mathbb{1}_2$  für einen auf 1 normierten Vektor  $\vec{e}$ , die sich aus dem Produkt (A.19) einfach herleiten lässt.

<sup>(ej)</sup> W. PAULI, 1900–1958

Gleichung (A.20) zeigt, dass die mit einer Drehung von  $\mathcal{E}_3$  um  $2\pi$  assoziierten Matrix tatsächlich  $S(\mathcal{R}) = -\mathbb{1}_2$  ist. In der Tat ist  $SU(2)$  keine lineare Darstellung von  $SO(3)$ , sondern nur eine sogenannte *projektive Darstellung*, für die  $S(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2) = e^{i\phi(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)} S(\mathcal{R}_1)S(\mathcal{R}_2)$  mit  $\phi(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$  einer nicht-verschwindenden Phase gilt. Man kann zeigen, dass es einen Gruppenhomomorphismus von  $SU(2)$  nach  $SO(3)$  gibt, nicht aber von  $SO(3)$  nach  $SU(2)$ . Somit ist jede lineare Darstellung von  $SO(3)$  auch eine Darstellung von  $SU(2)$ , während es lineare Darstellungen von  $SU(2)$  gibt — insbesondere die Darstellung von  $SU(2)$  durch  $SU(2)$  selber —, die  $SO(3)$  nicht treu darstellen. Dies gilt, auch wenn  $SU(2)$  und  $SO(3)$  die gleiche Lie-Algebra (A.11c) haben.

## A.2 Lorentz-Transformationen

Bekannterweise ist die Gruppe der Isometrien des dreidimensionalen euklidischen Raums nicht die „gute“ Symmetriegruppe für die Gesetze der Physik, insbesondere für die Maxwell<sup>(ck)</sup>-Gleichungen des Elektromagnetismus. Stattdessen soll man Transformationen in einer vierdimensionalen Raumzeit betrachten. In diesem Abschnitt werden diese Transformationen eingeführt und ihre Deutung (schnell) studiert.

### A.2.1 Linienelement

Die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) beruht auf zwei durch Einstein<sup>(cl)</sup> eingeführten und experimentell motivierten Postulaten und zwar

**SRT I.** Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c$  ist in allen Inertialsystemen gleich.

**SRT II.** Die Gesetze der Physik sollen in allen solchen Bezugssystemen die gleiche Form annehmen (*Relativitätsprinzip*).

Um dem ersten Postulat zu genügen, soll Zeit nicht mehr als eine absolute Größe betrachtet werden, sondern muss mit den Ortskoordinaten — die in diesem Abschnitt entweder als  $x, y, z$  oder als  $x^1, x^2, x^3$  bezeichnet werden — in einen Punkt  $x$  mit Koordinaten  $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$  der *Raumzeit* vereinigt werden. Lässt man Gravitation weg, so handelt es sich bei der letzteren um einen vierdimensionalen reellen Vektorraum, der als *Minkowski<sup>(cm)</sup>-Raum*  $\mathcal{M}_4$  bezeichnet wird. Die Punkte von  $\mathcal{M}_4$  werden auch *Ereignisse* genannt.

Der Abstand, oder *Linienelement*, zwischen zwei solchen unendlich benachbarten Ereignissen  $(ct, x, y, z)$  und  $(c(t+dt), x+dx, y+dy, z+dz)$  ist gegeben durch

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2. \quad (\text{A.21})$$

Man kann  $dx^0 = c dt, dx^1 = dx, dx^2 = dy, dx^3 = dz$  als die Komponenten einer einspaltigen Matrix  $dX$  betrachten. Führt man dann den *metrischen Tensor* 2. Stufe  $\eta$ , mit der Matrixendarstellung

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.22a})$$

so lässt sich das Linienelement (A.21) als

$$ds^2 = dX^T \eta dX \quad (\text{A.22b})$$

umschreiben. Sei  $\eta_{\mu\nu}$  das Matrixelement  $(\mu, \nu)$  der Matrix (A.22a), mit  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . Das Matrixprodukt (A.22b) lautet noch

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.22c})$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention benutzt wurde.

<sup>(ck)</sup>J. C. MAXWELL, 1831–1879    <sup>(cl)</sup>A. EINSTEIN, 1879–1955    <sup>(cm)</sup>H. MINKOWSKI, 1864–1909

**Bemerkungen:**

\* Die Stelle der Lorentz-Indizes  $\mu, \nu$  ist wichtig! Somit sollen beide Indizes des metrischen Tensors unten sein — manchmal wird  $\eta$  als  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ -Tensor bezeichnet. Dies wird weiter in Abschn. A.3 diskutiert.

\* Je nach dem Vorzeichen des Linienelements spricht man von einem *zeitartigen* ( $ds^2 > 0$ ), *lichtartigen* ( $ds^2 = 0$ ), oder *raumartigen* ( $ds^2 < 0$ ) Intervall zwischen den zwei Ereignissen.

\* Wenn das Intervall zwischen zwei Ereignissen zeitartig ist, dann existiert ein Inertialsystem, in dem die Ereignisse im gleichen Ort stattfinden.  $ds^2$  entspricht dem infinitesimalen Zeitintervall in diesem Bezugssystem:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2, \quad (\text{A.23})$$

mit der *Eigenzeit*  $\tau$ .

\* Einige Autoren benutzen, statt der hier verwendeten  $(+, -, -, -)$  Signatur für den metrischen Tensor (A.22a), die entgegengesetzte Konvention  $(-, +, +, +)$ .

**A.2.2 Lorentz-Transformationen**

Sei eine lineare Transformation der Koordinaten  $x^\mu$  der Form

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (\text{A.24a})$$

oder äquivalent in Matrixform

$$X \rightarrow X' = \Lambda X, \quad (\text{A.24b})$$

mit  $\Lambda$  der Matrix, deren Matrixelement  $(\mu, \nu)$   $\Lambda^\mu{}_\nu$  ist.

Die Transformation  $\Lambda$  heißt *Lorentz<sup>(cn)</sup>-Transformation*, wenn sie das Linienelement (A.22b) invariant lässt. Somit muss für jede infinitesimale Verschiebung  $dX$ , entsprechend einer transformierten Verschiebung  $dX'$ , die Identität

$$dX^T \eta dX = dX'^T \eta dX'$$

gelten. Aus der Linearität der Transformation  $\Lambda$  folgt  $dX' = \Lambda dX$ , so dass diese Gleichung äquivalent zur Bedingung

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (\text{A.25a})$$

ist. Mithilfe der Matrixelemente lautet dies<sup>(111)</sup>

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu. \quad (\text{A.25b})$$

Bildet man die Determinante der Gl. (A.25a), so erhält man sofort  $\det \Lambda = \pm 1$ . Infolgedessen bleibt das 4-Volumenelement  $d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$  invariant unter Lorentz-Transformationen, denn es transformiert sich gemäß

$$d^4x \rightarrow d^4x' = |\det \Lambda| d^4x. \quad (\text{A.26})$$

Die Lorentz-Transformationen formen eine Gruppe, die sog. *Lorentz-Gruppe* (oder manchmal *homogene Lorentz-Gruppe*), die hiernach als  $\mathcal{L}$  bezeichnet wird.<sup>(112)</sup>

<sup>(111)</sup>  $\Lambda^\rho{}_\mu$  ist das Element  $(\rho, \mu)$  der Matrixdarstellung von  $\Lambda$ , und also das Element  $(\mu, \rho)$  von  $\Lambda^T$ . Manchmal findet man die Notation  $\Lambda_\mu{}^\rho$  anstatt  $\Lambda^\rho{}_\mu$ . Jedenfalls bleibt der Zeilenindex solcher Lorentz-Transformationen oben, der Spaltenindex unten.

<sup>(112)</sup> Eine alternative Bezeichnung ist  $O(1,3)$ ; dementsprechend wird der Minkowski-Raum auch als  $\mathbb{R}^{1+3}$  bezeichnet, die eigentliche Lorentz-Gruppe als  $SO(1,3)$ , und die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe als  $SO_+(1,3)$ .

<sup>(cn)</sup> H. LORENTZ, 1853–1926

Die Transformationen mit Determinante +1, die *eigentlichen Lorentz-Transformationen*, bilden eine Teilgruppe  $\mathcal{L}_+$ , die *eigentliche Lorentz-Gruppe*.<sup>(112)</sup> Darüber hinaus werden die Transformationen mit  $\Lambda^0_0 > 0$  *orthochron* genannt; diese bilden auch eine Gruppe,  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Je nach den Vorzeichen der Determinante  $\det \Lambda$  und der Komponente  $\Lambda^0_0$  erhält man die vier Zusammenhangskomponenten  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ,  $\mathcal{L}_+^\downarrow$ ,  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  und  $\mathcal{L}_-^\downarrow$  der Lorentz-Gruppe.

### Bemerkungen:

\* In der Tat bleibt das Linienelement (A.21) nicht nur unter den Lorentz-Transformationen invariant, sondern allgemeiner unter den linearen Transformationen der *Poincaré<sup>(co)</sup>-Gruppe* (oder *inhomogene Lorentz-Gruppe*), d.h. der Form

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (\text{A.27})$$

Die Transformationen mit  $\Lambda = \mathbf{1}_4$  und beliebigem  $a^\mu$  sind offensichtlich die Raumzeit-Translationen.

\* Aus Gl. (A.24a) folgt  $\Lambda^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ .

## A.2.3 Beispiele

Die Isometrien des dreidimensionalen Raums  $\mathcal{E}_3$  mit mindestens einem Fixpunkt sind natürlich auch Lorentz-Transformationen, die eine Untergruppe der (eigentlichen orthochronen) Lorentz-Gruppe bilden.

Die Raumspiegelung ist ebenfalls eine Lorentz-Transformation, diesmal aber eine uneigentliche Transformation ( $\det \Lambda = -1$ ), mit der Matrixdarstellung

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

Somit gehört die Raumspiegelung zu  $\mathcal{L}_-^\uparrow$ . Allgemeiner ergeben sich die uneigentlichen orthochronen Transformationen durch Multiplikation einer eigentlichen orthochronen Transformation mit dieser Raumspiegelung.

Auf ähnlicher Weise sind die Transformationen von  $\mathcal{L}_-^\downarrow$  die Produkte einer eigentlichen orthochronen Transformation mit dem Operator des *Zeitumkehrens*, dessen Matrixdarstellung

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

ist.

Die *speziellen Lorentz-Transformationen* (oder *Boosts*) entlang einer Richtung sind die eigentlichen orthochronen Transformationen, die die Ortskomponenten senkrecht zur Richtung unverändert bleiben. Im Beispiel eines Boosts entlang der  $x^1$ -Achse bleiben  $x^2$  und  $x^3$  invariant. Solche Transformationen sind der Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

<sup>(co)</sup>H. POINCARÉ, 1854–1912

mit einer reellen Zahl  $\phi$ , der *Rapidity* des Boosts. Ist die durch  $\Lambda$  beschriebene Transformation passiv, so bewegt sich der Ursprungspunkt  $\vec{x} = \vec{0}$  des alten Bezugssystems mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = c \tanh \phi \vec{e}_1$  im neuen Bezugssystem. Außerdem definiert man den entsprechenden *Lorentz-Faktor*  $\gamma$  als  $\gamma = (1 - |\vec{v}|^2/c^2)^{-1/2} = \cosh \phi$ .

Die Komposition zweier speziellen Lorentz-Transformationen entlang derselben Richtung mit Rapiditäten  $\phi_1, \phi_2$  ergibt wieder eine spezielle Lorentz-Transformation — die Boosts entlang einer Richtung bilden eine Gruppe — mit Rapidität  $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$ . Daraus folgt sofort das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}.$$

## A.3 Lorentz-Tensoren

In diesem Abschnitt wird das Verhalten physikalischer Größen unter Lorentz-Transformationen diskutiert. Ähnlich wie im Fall der Isometrien von  $\mathcal{E}_3$  im § A.1.2 gibt es Skalare (§ A.3.1), Vektoren (§ A.3.2–A.3.3) und Tensoren (§ A.3.4) — wobei die zwei ersteren eigentlich Spezialfälle von Tensoren sind. Dabei sollen aber zwei Arten von Indizes eingeführt werden, sog. *kontravariante* und *kovariante* Indizes, entsprechend der Tatsache, dass der metrische Tensor  $\eta$  keine positiv definite Bilinearform ist.

### A.3.1 Skalare

Ein *Lorentz-Skalar* ist eine Größe, die invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Beispiele davon sind definitionsgemäß das Linienelement (A.21) oder das 4-Volumenelement  $d^4x$ , Gl. (A.26).

Man definiert auch *Pseudoskalare*, die invariant unter der eigentlichen Lorentz-Gruppe sind, und ihr Vorzeichen unter uneigentlichen Transformationen — wie Raumspiegelung oder Zeitumkehr — ändern.

### A.3.2 Kontravariante Vektoren

Ein sog. *kontravarianter (Vierer)Vektor*  $V$  ist eine Menge aus vier Größen  $V^\mu$ , die sich unter Lorentz-Transformationen wie die Koordinaten  $x^\mu$  transformieren, d.h.

$$V^\mu \rightarrow V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu, \quad (\text{A.31a})$$

oder in Matrixform

$$V \rightarrow V' = \Lambda V. \quad (\text{A.31b})$$

Ein Beispiel ist die *Vierergeschwindigkeit*  $u^\mu$  eines massiven Teilchens entlang seiner *Weltlinie* (Trajektorie in der Zeitraum)  $X^\mu(s)$ , die als

$$u^\mu \equiv \frac{dX^\mu(s)}{d\tau} \quad (\text{A.32a})$$

definiert ist, wobei  $s$  eine Parametrisierung der Weltlinie und  $\tau$  die Eigenzeit des Teilchens sind. Dies folgt aus der Tatsache, dass das Eigenzeitelement  $d\tau$  im Zähler ein Lorentz-Skalar ist [vgl. Gl. (A.23)]. Komponentenweise gelten  $u^0 = \gamma c$ ,  $u^i = \gamma v^i$  für  $i = 1, 2, 3$ , mit dem Lorentz-Faktor  $\gamma$  und den Komponenten  $v^i$  der dreidimensionalen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  des Teilchens. Der Kürze halber wird im Folgenden für diese Zerlegung in Zeit- und Ortskoordinaten die Notation

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} \quad (\text{A.32b})$$

benutzt.

Der kontravariante *Viererimpuls* eines Teilchens der Masse  $m$  entlang dieser Weltlinie ist

$$p^\mu = mu^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

mit der Energie  $E$  und dem Impuls  $\vec{p}$  des Teilchens.

Der Vergleich zwischen Gl. (A.32b) und (A.33) gibt die nützliche Beziehung  $\vec{v} = \frac{\vec{p}c}{E}$ .

**Bemerkung:** Die Vierergeschwindigkeit wird für ein masseloses Teilchen, z.B. ein Photon, nicht definiert, da solche Teilchen kein Ruhesystem haben, in welchem die Eigenzeit definiert werden kann: sie bewegen sich entlang lichtartiger Weltlinien.

### A.3.3 Kovariante Vektoren

Ein *kovarianter (Vierer)Vektor* ist definitionsgemäß eine Menge aus vier Größen, die sich unter Lorentz-Transformationen wie der Gradient-Operator  $\partial/\partial x^\mu$  verhalten, wobei der letztere auch als  $\partial_\mu$  bezeichnet wird. Mithilfe der Kettenregel gilt

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu, \quad (\text{A.34})$$

d.h., wenn man die einspaltige Matrix der  $\partial_\mu$  als  $\nabla$  schreibt,  $\nabla = \Lambda^T \nabla'$ . Multipliziert man diese Gleichung links mit  $(\Lambda^T)^{-1}$ , so kommt

$$\nabla' = (\Lambda^T)^{-1} \nabla. \quad (\text{A.35})$$

Zum anderen ergibt die charakteristische Eigenschaft (A.25a) von Lorentz-Transformationen, multipliziert links mit  $(\Lambda^T)^{-1}$  und rechts mit  $\eta^{-1}$ ,<sup>(113)</sup> die Gleichung

$$(\Lambda^T)^{-1} = \eta \Lambda \eta^{-1}. \quad (\text{A.36})$$

Aus den zwei letzteren Gleichungen folgt

$$(\eta^{-1} \nabla') = \Lambda (\eta^{-1} \nabla), \quad (\text{A.37})$$

d.h.  $\eta^{-1} \nabla$  transformiert sich wie ein kontravarianter Vektor. Mit jedem kontravarianten Vektor  $V^\mu$  kann man also einen kovarianten Vektor  $V_\mu$  gemäß

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu \quad (\text{A.38})$$

assoziiieren. Komponentenweise gilt unter Verwendung des metrischen Tensors (A.22a)

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^0 \\ -V^1 \\ -V^2 \\ -V^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

Umgekehrt kann mit jedem kovarianten Vektor  $V_\mu$  der kontravariante Vektor

$$V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu \quad (\text{A.40})$$

assoziiert werden, wobei die  $\eta^{\mu\nu}$  die Matricelemente von  $\eta^{-1}$  sind.

#### Bemerkungen:

\* Der Unterschied zwischen der positiv definiten Metrik des euklidischen Raums  $\mathcal{E}_3$  und der Metrik mit Signatur  $(+, -, -, -)$  des Minkowski-Raums  $\mathcal{M}_4$  spielt eine Rolle in Gl. (A.36), die mit Gl. (A.3) verglichen sein soll.

<sup>(113)</sup> Gleichung (A.22a) gibt sofort  $\eta^{-1} = \eta$ , doch wir wollen diese Identität der Allgemeinheit halber nicht benutzen.

\* Der Grund für die Existenz in der Relativitätstheorie von kontra- und kovarianten Vierervektoren ist einfach, dass es sich dabei um Elemente unterschiedlicher Vektorräume handelt. Somit sind die kovarianten Vektoren die Linearformen auf dem Vektorraum der kontravarianten Vektoren, d.h. die Elemente dessen Dualraums. Diese Betrachtungsweise wird z.B. in Ref. [52] (s. Kap. 3) verwendet, und lässt sich auf die Tensoren des nächsten Abschnitts einfach verallgemeinern.

### A.3.4 Tensoren

Ein *Tensor* ist eine Größe mit möglicherweise kontravarianten und kovarianten Indizes, wobei sich jeder Index wie ein entsprechender Vektor transformiert. Beispielsweise transformiert sich der Tensor 3. Stufe mit Komponenten  $T^{\mu\nu\rho}$  wie  $V^\mu V^\nu V_\rho$ . Ein solcher Tensor kann als zweimal kontra- und einmal kovarianter Tensor, oder kürzer  $\binom{2}{1}$ -Tensor oder gar Tensor vom Typ (2,1), bezeichnet werden.

Für einen zweimal kovarianten Tensor lautet das Transformationsgesetz unter Verwendung der Gl. (A.34)

$$T_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu T'_{\rho\sigma}, \quad (\text{A.41})$$

d.h. in Matrixform, indem  $T_{\mu\nu}$  durch eine  $4 \times 4$ -Matrix dargestellt wird,

$$\mathbb{T} = \Lambda^T \mathbb{T}' \Lambda. \quad (\text{A.42})$$

Der Vergleich mit Gl. (A.25a) zeigt, dass der metrische Tensor  $\eta$  invariant unter einer beliebigen Lorentz-Transformation bleibt. Dies erklärt im Nachhinein die Stelle der Indizes dessen Matrixelemente  $\eta_{\mu\nu}$ .

Mithilfe der Tensoren  $\eta_{\mu\nu}$  bzw.  $\eta^{\mu\nu}$  kann man kontra- bzw. kovariante Lorentz-Indizes herauf- bzw. herabziehen, ähnlich den Gleichungen (A.38) und (A.40). Wendet man diese Möglichkeit an  $\eta^{\mu\nu}$  selber, so erhält man

$$\eta^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \quad (\text{A.43})$$

mit dem üblichen Kronecker-Symbol:  $\delta^\mu{}_\nu = 1$  wenn  $\mu = \nu$  und 0 sonst. Dies entspricht einfach der Identität  $\eta^{-1} \eta = \mathbb{1}_4$ .

Ein anderer invarianter Tensor (genauer: *Pseudotensor*, da sein Vorzeichen sich unter uneigentlicher Transformationen ändert) ist der vollständig antisymmetrische Levi-Civita-Tensor<sup>(114)</sup>

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ eine gerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ eine ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

Dieser Tensor transformiert sich nämlich gemäß

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \det \Lambda. \quad (\text{A.45})$$

Hier sollte beachtet werden, dass  $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123}$ , während für den dreidimensionalen Levi-Civita Tensor  $\epsilon_{123} = \epsilon^{123}$  gilt.

### A.3.5 Kontraktion zweier Tensoren

Seien  $V^\mu$  ein kontravarianter und  $W_\mu$  ein kovarianter Vektor. Die Transformationsgesetze (A.31b) und (A.35) zeigen, dass  $W_\mu V^\mu = W^T V$  ein Lorentz-Skalar ist — das uneigentlich genannte „Skalarprodukt“ der zwei Vektoren.

<sup>(114)</sup> Einige Autoren benutzen die Konvention  $\epsilon_{0123} = +1$ , entsprechend  $\epsilon^{0123} = -1 \dots$

Dagegen sind  $W^\mu V^\mu$  und  $W_\mu V_\mu$  keine Skalare unter der Lorentz-Gruppe, und stellen somit keine „gültige“ Tensorkontraktionen dar. Dem in § A.1.2c gegebenen Rezept, um zwei Tensoren zu kontrahieren, muss man also die zusätzliche Regel hinzufügen, dass einer der kontrahierten Indizes kontra- und der andere kovariant sein soll.

Da  $W_\mu V^\mu = \eta_{\mu\nu} W^\mu V^\nu = W^\nu V_\nu = W^\mu V_\mu$  ist, spielt es in einer Kontraktion keine Rolle, welcher Index oben und welcher unten ist.

Beispielsweise beträgt das skalare *Lorentz-Quadrat* des Viererimpulses (A.33)  $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$ , während für die Vierergeschwindigkeit (A.32a) immer  $u_\mu u^\mu = c^2$  gilt.

Wenn  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  zwei Vierervektoren mit kontravarianten Koordinaten  $V^\mu$  und  $W^\mu$  bezeichnen, werden im Folgenden die Notationen

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \equiv V_\mu W^\mu = W_\mu V^\mu \quad (\text{A.46a})$$

und, im Fall  $\mathbf{V} = \mathbf{W}$

$$\mathbf{V}^2 \equiv \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \equiv V_\mu V^\mu \quad (\text{A.46b})$$

oft verwendet. Dementsprechend wird das Lorentz-Quadrat des Viererimpulses (multipliziert mit  $c^2$ ) als  $\mathbf{p}^2 c^2 = E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$  geschrieben.

### A.3.6 Kovariante Formulierung eines physikalischen Gesetzes

Laut dem Einsteinschen Relativitätsprinzip (Postulat SRT II) sollen die Naturgesetze mathematisch so formuliert werden, dass die Form der entsprechenden Gleichungen in allen Inertialsystemen unverändert bleibt. Theorien, die diesem Prinzip genügen, werden als Lorentz- oder relativistisch *kovariant* bezeichnet.

Infolgedessen können solche Gleichungen nur Identitäten zwischen Lorentz-Tensoren der gleichen Stufe sein, nachdem alle möglichen Kontraktionen von Indizes berücksichtigt wurden.

Somit sind  $V^\mu = W^\mu$  oder  $V^\mu T_{\mu\nu} = W_\nu$  kovariante Gleichungen: eine Lorentz-Transformation transformiert sie in  $V'^\mu = W'^\mu$  oder  $V'^\mu T'_{\mu\nu} = W'_\nu$ , d.h. sie nehmen die gleiche Form an. Dagegen stellen Identitäten wie  $V^\mu = T^\mu{}_\nu$  oder  $V^\mu = W_\mu$  keine relativistisch kovariante Gleichungen dar, sondern können einen (Tipp-?)Fehler signalisieren. . .

**Bemerkung:** Manchmal wird statt Lorentz-kovariant die Redensart „Lorentz-invariant“ verwendet. Streng genommen bedeutet aber die Letztere, dass die Gleichungen unter Lorentz-Transformationen unverändert bleiben, was eine stärkere Bedingung ist, als die Invarianz der Form der Gleichungen.

## Literatur zum Kapitel A

Zur Speziellen Relativitätstheorie:

- Feynman, *Vorlesungen über Physik. Band 1* [53] = *Lectures on Physics. Vol. I* [54], Kap. 15–17.
- Fließbach, *Mechanik* [55], Kap. IX.
- Griffiths, *Elektrodynamik* [56] = *Introduction to Electrodynamics* [57], Kap. 12.1.
- Landau & Lifschitz, *Band II: Klassische Feldtheorie* [58] = *The classical theory of fields* [59], Kap. I.
- Nolting, *Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik* [60], 1. Teil.

Zur Gruppentheorie in der (Teilchen)Physik:



- 
- Georgi, *Lie algebras in particle physics* [61].
  - Ramond, *Group theory. A physicist's survey* [62].

# Literaturverzeichnis

- [1] Particle Data Group (M. Tanabashi *et al.*), *Review of Particle Physics*, Phys. Rev. D **98** (2018) 030001 (1898 pages).
- [2] E. Schrödinger, Ann. Phys. (Leipzig) **81** (1926) 109–139.
- [3] W. Gordon, Z. Phys. **40** (1926) 117–133.
- [4] O. Klein, Z. Phys. **41** (1927) 407–442.
- [5] L. Landau, E. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik. Band IV: Quantenelektrodynamik*, 7. Aufl. (Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1991).
- [6] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* (Vieweg, Braunschweig, 1986).
- [7] F. Schwabl, *Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)*, 5. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2008).
- [8] D. Griffiths, *Elementary Particle Physics* (Wiley-VCH, Weinheim, 2008).
- [9] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. A **117** (1928) 610–624.
- [10] G. Modanese, Phys. Lett. B **348** (1995) 51–54 [[hep-th/9501123](#)].
- [11] D. J. Griffiths, *Quantum Mechanics*, 2nd Aufl. (University Press, Cambridge, 2017).
- [12] A. Messiah, *Quantenmechanik, Band 2*, 2. Aufl. (De Gruyter, Berlin, 1991).
- [13] ATLAS Collaboration [M. Aaboud *et al.*], Phys. Rev. Lett. **117** (2016) 182002 [[1606.02625](#)].
- [14] *Selected papers on Quantum Electrodynamics*, J. Schwinger (Hrsg.) (Dover, New York, 1958).
- [15] P. J. Mohr, D. B. Newell, B. N. Taylor, Rev. Mod. Phys. **88** (2016) 035009 [[1507.07956](#)].
- [16] D. Hanneke, S. Fogwell, G. Gabrielse, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 120801 [[0801.1134](#)].
- [17] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, M. Nio, Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 111807 [[1205.5368](#)].
- [18] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, M. Nio, Phys. Rev. D **77** (2008) 053012 [[0712.2607](#)].
- [19] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, M. Nio, Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 111808 [[1205.5370](#)].
- [20] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [21] C. Berger, *Elementarteilchenphysik*, 2. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2006).
- [22] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An introductory course in modern particle physics* (John Wiley & Sons, New York, 1984).

- 
- [23] M. Gell-Mann, *The Eightfold Way: A theory of strong interaction symmetry*, Preprint CTSL-20, TID-12608 (1961).
- [24] Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26** (1961) 222–229.
- [25] M. Gell-Mann, Y. Neeman, *The Eightfold Way* (Benjamin, New York, 1964).
- [26] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964) 214–215.
- [27] G. Zweig, *An  $SU(3)$  model for strong interaction symmetry and its breaking*, Preprint CERN-TH-401 (1964).
- [28] V. E. Barnes *et al.*, Phys. Rev. Lett. **12** (1964) 204–206.
- [29] J. Bjorken, Phys. Rev. **179** (1969) 1547–1553.
- [30] C. G. Callan Jr., D. J. Gross, Phys. Rev. Lett. **22** (1969) 156–159.
- [31] E. D. Bloom *et al.*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 930–934.
- [32] M. Breidenbach *et al.*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 935–939.
- [33] R. P. Feynman, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 1415–1417.
- [34] W. Heisenberg, Z. Phys. **77** (1932) 1–11.
- [35] T. Lee, C.-N. Yang, Phys. Rev. **104** (1956) 254–258.
- [36] C. Wu, E. Ambler, R. Hayward, D. Hoppes, R. Hudson, Phys. Rev. **105** (1957) 1413–1414.
- [37] E. Bodenstedt, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung, Teil II* (Bibliographisches Institut, Zurich, 1973).
- [38] M. Goldhaber, L. Grodzins, A. Sunyar, Phys. Rev. **109** (1958) 1015–1017.
- [39] R. Garwin, L. Lederman, M. Weinrich, Phys. Rev. **105** (1957) 1415–1417.
- [40] J. Friedman, V. Telegdi, Phys. Rev. **105** (1957) 1681–1682.
- [41] E. Fermi, Z. Phys. **88** (1934) 161–177.
- [42] R. Feynman, M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109** (1958) 193–198.
- [43] E. Sudarshan, R. Marshak, Phys. Rev. **109** (1958) 1860–1862.
- [44] W. N. Cottingham, D. A. Greenwood, *An introduction to the Standard Model of particle physics*, 2. Aufl. (University Press, Cambridge, 2007).
- [45] BaBar Collaboration [B. Aubert *et al.*], Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 131801 [hep-ex/0407057].
- [46] Belle Collaboration [Y. Chao *et al.*], Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 191802 [hep-ex/0408100].
- [47] SNO Collaboration [Q. Ahmad *et al.*], Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 071301 [nucl-ex/0106015].
- [48] Super-Kamiokande Collaboration [Y. Fukuda *et al.*], Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1562–1567 [hep-ex/9807003].
- [49] DAYA-BAY Collaboration [F. An *et al.*], Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 171803 [1203.1669].
- [50] RENO Collaboration [J. Ahn *et al.*], Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 191802 [1204.0626].

- [51] KATRIN Collaboration [M. Aker *et al.*], Phys. Rev. Lett. **123** (2019) 221802 [1909.06048].
- [52] B. F. Schutz, *A first course in general relativity* (University Press, Cambridge, 1985).
- [53] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynman-Vorlesungen über Physik. Band 1: Mechanik, Strahlung, Wärme*, 5. Aufl. (Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2007).
- [54] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics. Volume I: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*, definitive Aufl. (Addison-Wesley, Reading, MA, 2005).
- [55] T. Fließbach, *Lehrbuch zur theoretischen Physik I. Mechanik*, 7. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2015).
- [56] D. J. Griffiths, *Elektrodynamik*, 3. Aufl. (Pearson, München, 2011).
- [57] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Aufl. (Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999).
- [58] L. Landau, E. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik. Band II: Klassische Feldtheorie*, 12. Aufl. (Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1997).
- [59] L. Landau, E. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics. Vol. 2: The classical theory of fields*, 4th Aufl. (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975).
- [60] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik. Band 4: Spezielle Relativitätstheorie. Thermodynamik*, 6. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2005).
- [61] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, 2. Aufl. (Westview Press, Reading, MA, 1999).
- [62] P. Ramond, *Group theory: A physicist's survey* (University Press, Cambridge, 2010).