

X.2 Partonmodell

Dem Quarkmodell nach sind Hadronen, insbesondere Protonen, keine Elementarteilchen, sondern bestehen aus mehr fundamentalen Freiheitsgraden. Daher sollte das Proton eine innere Struktur besitzen, die sich experimentell nachweisen lassen sollte. Um das Innere des Protons zu untersuchen, soll die „Sonde“ eine kurze Wellenlänge bzw. eine hohe Energie haben. Dies wird in Streuexperimenten realisiert, in denen ein Lepton — insbesondere ein Elektron — an dem Proton stößt, wobei das Letztere zerstört wird (§ X.2.1). Dabei entdeckt man, dass das Proton aus punktförmigen Freiheitsgraden besteht (§ X.2.2), die sich anscheinend frei im Proton bewegen.

X.2.1 Tiefinelastische Streuung

Historisch zeigte die Verteilung der gestreuten α -Teilchen im Rutherford-Experiment, dass das Atom eine innere Struktur besitzt. In ähnlicher Weise können elektrisch geladene Leptonen an Hadronen beschleunigt werden, wobei das Lepton ein virtuelles Photon emittiert, das die Struktur des Hadrons untersucht.

Hiernach wird zuerst die Kinematik eines solchen Prozesses diskutiert. Dann wird die Parametrisierung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für das gestreute Lepton eingeführt.

X.2.1 a Kinematik

Betrachte die in Abb. X.6 dargestellte inelastische Streuung eines hochenergetischen Elektrons mit Viererimpuls $k \equiv (E, \vec{k})$ an einem Proton mit Viererimpuls P . Dabei sind k und P durch die experimentellen Bedingungen bestimmt, und deshalb bekannt.

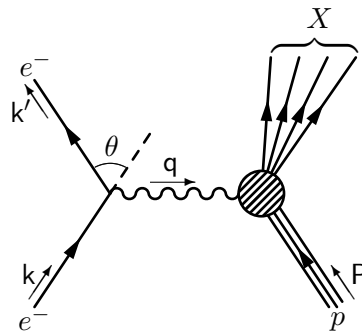


Abbildung X.6 – Kinematik der tiefinelastischen Streuung eines Elektrons an einem Proton.

Nach dem Stoß interessiert man sich nur für das gestreute Elektron und dessen kinematischen Größen. Dagegen wird der Rest — die aus der Zerstörung des Protons stammenden Hadronen — nicht weiter identifiziert. Dieser inklusive inelastische Prozess wird in der Form

$$e^- + p \rightarrow e^- + X \quad (\text{X.6})$$

geschrieben. Sei $k' \equiv (E', \vec{k}')$ der Viererimpuls des Elektrons nach dem Stoß und $q \equiv k - k'$ der Viererimpuls des virtuellen Photons.

Da alles über X unbekannt ist — bis auf den gesamten Viererimpuls $P + q$, der aus Energie-Impuls-Erhaltung folgt —, bleiben für die kinematischen Größen des Elektrons nach dem Stoß mehr unabhängige Freiheitsgrade, als im Fall elastischer Streuung. Somit sind drei unabhängige kinematische Variablen nötig — z.B. die Energie E' nach dem Stoß, der Streuwinkel θ , und noch ein anderer Winkel, der bei unpolarisierter Streuung keine Rolle spielt und daher hiernach weggelassen wird — um den auslaufenden Viererimpuls vollständig zu charakterisieren.⁽⁴⁵⁾

Sowohl E' als auch θ hängen vom Bezugssystem ab. In theoretischen Überlegungen benutzt man eher die Lorentz-invarianten Größen

$$Q_E^2 \equiv -q^2, \quad \nu \equiv \frac{q \cdot P}{m_p} \quad (\text{X.7a})$$

⁽⁴⁵⁾Dagegen ist E' durch die Kinematik bei elastischer Streuung festgelegt.

mit der Protonenmasse m_p . Die zweite Größe — die eigentlich den Energieverlust $E - E'$ des Elektrons im Ruhesystem des Protons misst — kann äquivalent durch die Bjorken^(as)- x Variable

$$x_{\text{Bj}} \equiv \frac{Q_E^2}{2m_p\nu} = \frac{Q_E^2}{2q \cdot P} \quad (\text{X.7b})$$

ersetzt werden. Dabei ist der Zusammenhang zwischen den Variablenpaaren (E', θ) und (Q_E^2, ν) eindeutig.

Bemerkungen:

- * Man kann zeigen, dass Q_E^2 und ν positiv sind, und dass $0 \leq x_{\text{Bj}} \leq 1$.
- * Q_E^2 wird *Virtualität* des virtuellen Photons genannt.

X.2.1 b Bjorken-Skalenverhalten

Für hohe Energien $E \gg m_e$ parametrisiert man den unpolarisierten differentiellen Wirkungsquerschnitt für das gestreute Elektron als

$$\frac{d^3\sigma}{dE' d^2\Omega} = \left(\frac{\alpha_{\text{em}}}{2E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left[W_2(\nu, Q_E^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, Q_E^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (\text{X.8})$$

W_1 und W_2 werden (elektrische) *Strukturfunktionen* des Protons genannt. Diese spiegeln Eigenschaften dessen inneren Struktur wider, und sind experimentell gut bekannt.

Bemerkung: Für die elastische Streuung eines Elektrons mit Energie E an einem punktförmigen Spin- $\frac{1}{2}$ -Elementarteilchen mit Masse m und elektrischer Ladung $Q = 1$ gilt [vgl. Gl. (IX.16)]

$$\frac{d^3\sigma}{dE' d^2\Omega} = \left(\frac{\alpha_{\text{em}}^2}{2E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2m} \right),$$

wobei die δ -Funktion die Energie E' des Elektrons nach dem Stoß bestimmt. Eine solche Formel folgt aus Gl. (X.8), wenn man für die Strukturfunktionen die Formen

$$2W_1(\nu, Q_E^2) = \frac{Q_E^2}{2m^2} \delta \left(\nu - \frac{Q_E^2}{2m} \right) = \frac{Q_E^2}{2m^2\nu} \delta \left(1 - \frac{Q_E^2}{2m\nu} \right), \quad W_2(\nu, Q_E^2) = \frac{1}{\nu} \delta \left(1 - \frac{Q_E^2}{2m\nu} \right) \quad (\text{X.9})$$

annimmt. In diesem Fall hängen mW_1 und νW_2 nur vom dimensionslosen Verhältnis $Q_E^2/2m\nu$ ab.

Für den Streuprozess (X.6) hat Bjorken 1969 aus theoretischen Überlegungen vorgeschlagen [29], dass im Limes $Q_E^2 \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$ bei festem $x_{\text{Bj}} \equiv Q_E^2/2m_p\nu$ die Funktionen $m_p W_1(\nu, Q_E^2)$ und $\nu W_2(\nu, Q_E^2)$ nur von der Variablen x_{Bj} abhängen können:

$$\begin{aligned} m_p W_1(\nu, Q_E^2) &\rightarrow F_1(x_{\text{Bj}}), \\ \nu W_2(\nu, Q_E^2) &\rightarrow F_2(x_{\text{Bj}}). \end{aligned} \quad (\text{X.10})$$

Diese Eigenschaft wird als *Bjorken-Skalenverhalten* bezeichnet.

Das Argument beruht teilweise auf einer dimensional Analysis: Aus Gl. (X.7a) und (X.8) folgt, dass die Funktionen $m_p W_1$ und νW_2 dimensionslos sind. Im hochenergetischen Limes $\sqrt{Q_E^2} \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$ sind m_e und m_p vernachlässigbar, so dass die Funktionen nur von einer dimensionslosen Variablen abhängen können.

Dazu haben Callan^(at) und Gross^(au) vorhergesagt [30], dass die dimensionslosen Funktionen F_1 und F_2 für nicht zu kleine Werte von x_{Bj} über die Beziehung

$$2x_{\text{Bj}} F_1(x_{\text{Bj}}) = F_2(x_{\text{Bj}}) \quad (\text{X.11})$$

miteinander verknüpft sind.

Diese theoretischen Überlegungen wurden kurz darauf experimentell⁽⁴⁶⁾ am SLAC⁽⁴⁷⁾ bestä-

⁽⁴⁶⁾... insbesondere durch Friedman^(av), Kendall^(aw) und Taylor^(ax)

⁽⁴⁷⁾Stanford Linear Accelerator Center

^(as)J. D. BJORKEN, 1934– ^(at)C. G. CURTIS Jr., 1942– ^(au)D. J. GROSS, 1941– ^(ax)J. I. FRIEDMAN, 1930– ^(ax)H. W. KENDALL, 1926–1999 ^(ax)R. E. TAYLOR, 1929–2018

tigt [31, 32]. Dabei bedeuten das Bjorken-Skalenverhalten und die Callan–Gross-Beziehung, dass die Parametrisierung des Wirkungsquerschnitts (X.8) schon mit einer einzigen Funktion von einer einzigen Variablen erfolgt, statt zwei Funktionen von zwei Variablen betrachten zu müssen. Das Proton muss also eine spezielle Struktur haben, die zu dieser Vereinfachung führt.

X.2.2 Partonen

Die Strukturfunktionen (X.9) für elastische Streuung an punktförmigen Teilchen genügen dem Bjorken-Skalenverhalten (X.10) und der Callan–Gross-Beziehung (X.11). Diese Tatsache deutet auf eine mögliche Erklärung — basierend auf dem sog. *Partonmodell* — dafür hin, warum beide Relationen auch in tiefinelastischen Streuungen an Protonen experimentell beobachtet werden.

Das Modell beruht auf der Grundidee, dass in solchen Prozessen (X.6) alles passiert, als ob das durch das Elektron emittierte virtuelle Photon mit der Wahrscheinlichkeit $f(x)$ an einem freien punktförmigen Teilchen mit Viererimpuls xP elastisch stoße, wobei P den Viererimpuls des Protons bezeichnet und $0 < x < 1$ ist. Diese punktförmigen Bestandteile des Protons werden *Partonen* genannt⁽⁴⁸⁾ und die *Partondichtefunktion* (kurz: PDF) $f(x)$ stellt eine Eigenschaft des Protons dar.

Verallgemeinert man diese Grundidee, so führt man verschiedene Arten von Partonen — hier durch einen Index i gekennzeichnet — mit jeweiliger Partondichtefunktion $f_i(x)$ und elektrischer Ladung Q_i . Die unterschiedlichen Arten werden später weiter diskutiert.

Sind das Lorentz-Quadrat $q^2 = -Q_E^2$ des Viererimpulses des virtuellen Photons und seine Energie ν im Ruhesystem des Protons fest, so kann der Viererimpuls xP des an dem Stoß beteiligten Partons nicht beliebig sein. Die Strukturfunktionen für elastische Streuung (X.9) zeigen nämlich, dass die „Masse“ m des Partons genau gleich $Q_E^2/2\nu$ sein soll. Diese Masse lässt sich aus der Energie–Impuls-Beziehung als $m^2 = (xP)^2 = x^2 m_p^2$ ausdrücken, so dass die Bedingung über m zu einer Bedingung über den durch das beteiligte Parton getragenen Bruchteil x des Protonenviererimpulses wird. Genauer muss $x = Q_E^2/2m_p\nu$ gelten, d.h. der Bruchteil x muss gleich der Bjorken-Skalenvariablen x_{Bj} sein.

Dann ist die Strukturfunktion F_2 des Protons gegeben durch

$$F_2(x) = x \sum_i Q_i^2 f_i(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{X.12})$$

wobei die Summe über alle Arten von Partonen läuft. Dabei werden sowohl das Bjorken-Skalenverhalten und als auch die Callan–Gross-Beziehung automatisch erfüllt, wie sich an Gl. (X.9) erkennen lässt.

Bemerkung: Summiert man den Viererimpuls xP eines Partons multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit $f_i(x)$, dass ein Parton i den Bruchteil x trägt, über alle möglichen Werte von x und alle Arten von Partonen, so soll man den gesamten Viererimpuls P des Protons finden, d.h.

$$P = \int_0^1 \sum_i f_i(x) xP dx \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \sum_i x f_i(x) dx = 1. \quad (\text{X.13})$$

Die letztere Gleichung ist eine sog. *Summenregel*, der die Partondichtefunktionen genügen müssen.

Eine ausführliche Analyse der experimentellen Daten im Rahmen des Partonmodells führt zur Einführung von drei großen Klassen von Partonen in einem Hadron:

- Erstens gibt es „Valenz-Quarks“ mit Verteilungsfunktionen $u_v(x)$, $d_v(x)$. Dabei ist $xu_v(x)$ bzw. $xd_v(x)$ in einem Proton maximal für $x \approx 0,1-0,2$, mit $xu_v(x) \approx \frac{2}{3}$ bzw. $xd_v(x) \approx \frac{1}{3}$, d.h. solche u - bzw. d -Quarks tragen etwa $\frac{2}{3}$ bzw. $\frac{1}{3}$ des Protonenimpulses. Dies entspricht den drei Quarks *uud* des Quarkmodells.

In einem Hadron mit Strangeness, Charm oder Beauty treten natürlich auch Valenz- s -, c - oder b -Quarks mit jeweiliger Dichtefunktion auf.

⁽⁴⁸⁾Die Bezeichnung wurde durch Feynman eingeführt [33].

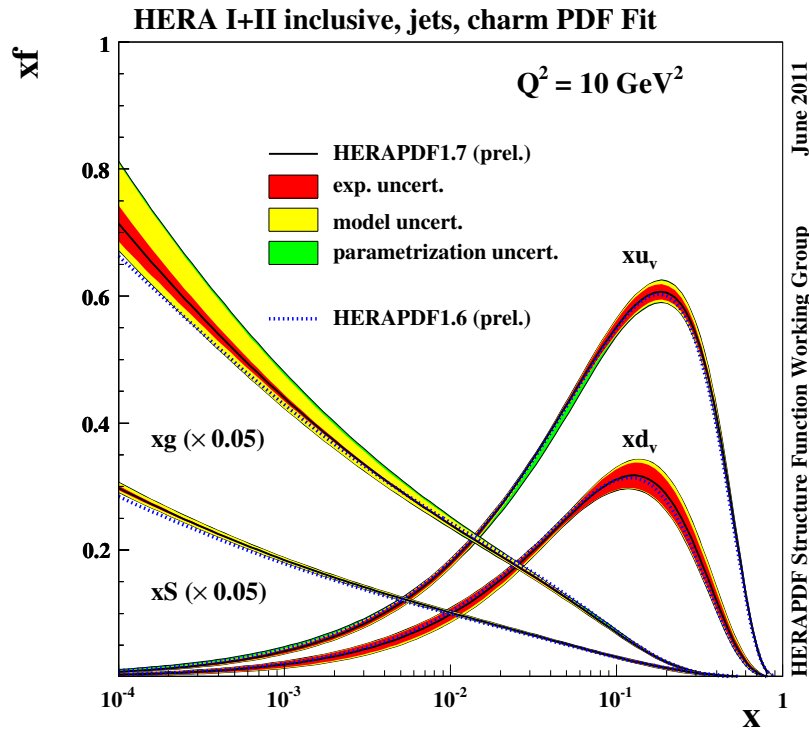


Abbildung X.7 – Unpolarisierte Partondichtefunktionen in einem Proton für Valenz- u - und d -Quarks (u_v , d_v), See-Quarks (S) und Gluonen (g), multipliziert mit x , laut den H1 & ZEUS-Experimenten am HERA Beschleuniger. Bild aus https://www.desy.de/h1zeus/combined_results/index.php?do=proton_structure.

- Eine zweite Klasse besteht aus sog. „See-Quarks“ mit Dichtefunktionen $u_s(x)$, $\bar{u}_s(x)$, $d_s(x)$, $\bar{d}_s(x)$, $s(x)$, $\bar{s}(x)$. . . Diese See-Quarks entsprechen virtuellen Quark–Antiquark-Paaren innerhalb des geprobten Hadrons und tragen nur einen geringen Anteil des gesamten Impuls. Das Produkt $xf_i(x)$ wird für $x \lesssim 0,01$ – $0,1$ aber größer als für die Valenzquarks.

Die Kinematik zeigt, dass Valenz- und See-Quarks den Spin $\frac{1}{2}$ haben.

- Schließlich findet man noch Partonen mit dem Spin 1, die sich mit den *Gluonen* identifizieren lassen, mit einer Verteilungsfunktion $g(x)$. Diese haben keine elektrische Ladung, und tragen also nicht direkt zu $F_2(x)$ bei. Sie müssen aber berücksichtigt werden, da sie teil des Gesamtimpulses des Protons tragen; insbesondere ist für $x \lesssim 0,01$ das Produkt $xg(x)$ größer als die Summe der $xf_i(x)$ über alle anderen Arten von Partonen: bei kleinem x besteht ein Hadron meistens aus Gluonen.

Ein Beispiel von Partondichtefunktionen für die Valenz- u - und d -Quarks, See-Quarks und Gluonen im Proton wird in Abb. [X.7](#) dargestellt.

Eine genauere Untersuchung der Strukturfunktion F_2 des Protons zeigt, dass sie tatsächlich nicht nur Funktion der Bjorken-Skalenvariablen x_{Bj} ist, sondern hängt auch von Q_E^2 ab, und zwar wenn x_{Bj} kleiner als etwa 0,1 wird. Das heißt, dass das Skalenverhalten ([X.10](#)) verletzt ist. Dementsprechend sind die Partondichtefunktionen Funktionen von x und Q_E^2 , $f_i(x, Q_E^2)$: je nach der Auflösung, mit der das Proton untersucht wird — grob gesagt stellt $(Q_E^2)^{-1/2}$ die typische Längenskala der kleinsten Details dar, die das virtuelle Photon auflösen kann —, sieht das Proton unterschiedlich aus, insbesondere bei kleinem x .

Diese Abhängigkeit nach Q_E^2 lässt sich im Rahmen der Quantenchromodynamik, die im folgenden Abschnitt kurz vorgestellt wird, berechnen.