

KAPITEL X

Starke Wechselwirkung

X.1	Quarkmodell	85
X.1.1	Eightfold Way	85
X.1.2	Hadronenerzeugung in Elektron–Positron-Kollisionen	90
X.2	Partonmodell	93
X.2.1	Tiefinelastische Streuung	93
X.2.2	Partonen	95
X.3	Quantenchromodynamik	97
X.3.1	Vertices der QCD	97
X.3.2	Wichtige Vorhersagen der Quantenchromodynamik	98
X.3.3	Symmetrien der QED und der QCD	99

In diesem Kapitel wird auf eine weitere Wechselwirkung eingegangen, und zwar auf die *starke Wechselwirkung*, die ursprünglich eingeführt wurde, um die Bindungskraft zwischen Protonen und Neutronen im Atomkern zu erklären. Jene starke Wechselwirkung stellt einen krassen Gegensatz zur Quantenelektrodynamik dar, indem die unterliegende Theorie extrem kompliziert zu lösen ist, insbesondere weil Störungsrechnung für manche Phänomene fast nutzlos ist. Dazu können die heutzutage als elementar betrachteten Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen, d.h. die Quarks, nicht isoliert voneinander werden, sondern kommen sie immer innerhalb Hadronen vor.

Somit ist es zunächst interessant zu zeigen, aus welchen Überlegungen auf die Existenz der Quarks geschlossen wird. Diese Folgerung entsteht einerseits aus einer Klassifizierung der verschiedenen Hadronen nach einigen ihrer Quantenzahlen im Rahmen des *Quarkmodells* (Abschn. X.1). Andererseits deuten einige experimentelle Ergebnisse auf eine innere Struktur des Protons hin, insbesondere Daten, gewonnen in Streuexperimenten mit Elektronen an Protonen, die zum *Partonmodell* führen (Abschn. X.2). Schließlich werden in Abschn. X.3 einige Ideen der Theorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks, die als *Quantenchromodynamik* bezeichnet wird, kurz dargestellt.

X.1 Quarkmodell

In der Klassifizierung der vielen bekannten Hadronen nach den Werten ihrer gemessenen Spin, elektrischen Ladung und Strangeness haben Gell-Mann^(ap) und Ne’eman^(aq) 1961 eine einfache Struktur entdeckt [23, 24], die als „Eightfold Way“ (achtfacher Weg) bezeichnet wird (§ X.1.1). Ein weiterer Schritt war in 1964 die Erklärung dieser Struktur durch die Existenz von elementaren Bausteinen in den Hadronen im Rahmen des *Quarkmodells*. Dabei muss aber die Existenz einer nicht-beobachtbaren Quantenzahl postuliert werden, die dazu führt, dass jeder Quark-Flavour in N_c unterscheidbaren Exemplaren vorkommt. Dieses Postulat führt aber zu einer experimentell testbaren Vorhersage für die Erzeugung von Hadronen in Elektron–Positron-Kollisionen (§ X.1.2), wo die Annahme bestätigt wird.

^(ap)M. GELL-MANN, 1929–2019 ^(aq)J. NE’EMAN, 1925–2006

X.1.1 Eightfold Way

Wie in Kap. I schon gesagt wurde, lassen sich die Hadronen — d.h. die Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen: einerseits die Mesonen mit einem ganzzahligen Spin, andererseits die Baryonen mit einem halbzahligen Spin — durch verschiedene Quantenzahlen charakterisieren. Insbesondere sind in Zerfalls- und Streuprozessen die elektrische Ladung Q und der (gesamte) Spin J immer erhalten; dies gilt auch für die Strangeness S , solange die schwache Wechselwirkung keine Rolle spielt. Basierend auf diesen drei Quantenzahlen kann man Regelmäßigkeiten bei den Hadronen erkennen, wie jetzt an einigen Beispielen illustriert wird.

	Q	S	I_3	Masse (MeV/ c^2)
π^0	0	0	0	134,98
π^+, π^-	+1, -1	0	+1, -1	139,57
K^+, K^-	+1, -1	+1, -1	$+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	493,68
K^0, \bar{K}^0	0	+1, -1	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	497,61
η	0	0	0	547,86
η'	0	0	0	957,8

Tabelle X.1 – Quantenzahlen und Massen der leichten Mesonen mit $J^P = 0^-$.

	Q	S	I_3	Masse (MeV/ c^2)
ρ^0	0	0	0	775,3
ρ^+, ρ^-	+1, -1	0	+1, -1	775,3
ω	0	0	0	782,6
K^{*+}, K^{*-}	+1, -1	+1, -1	$+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	891,8
K^{*0}, \bar{K}^{*0}	0	+1, -1	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	895,5
ϕ	0	0	0	1019,5

Tabelle X.2 – Quantenzahlen und Massen der leichten Mesonen mit $J^P = 1^-$.

In Tab. X.1 bzw. X.2 werden einige Eigenschaften der leichtesten Mesonen mit Spin und Parität $J^P = 0^-$ bzw. $J^P = 1^-$ aufgelistet. Sinngemäß können diese Neunergruppen graphisch in Abhängigkeit ihren Werte von Q und S wie in Abb. X.1 dargestellt werden.

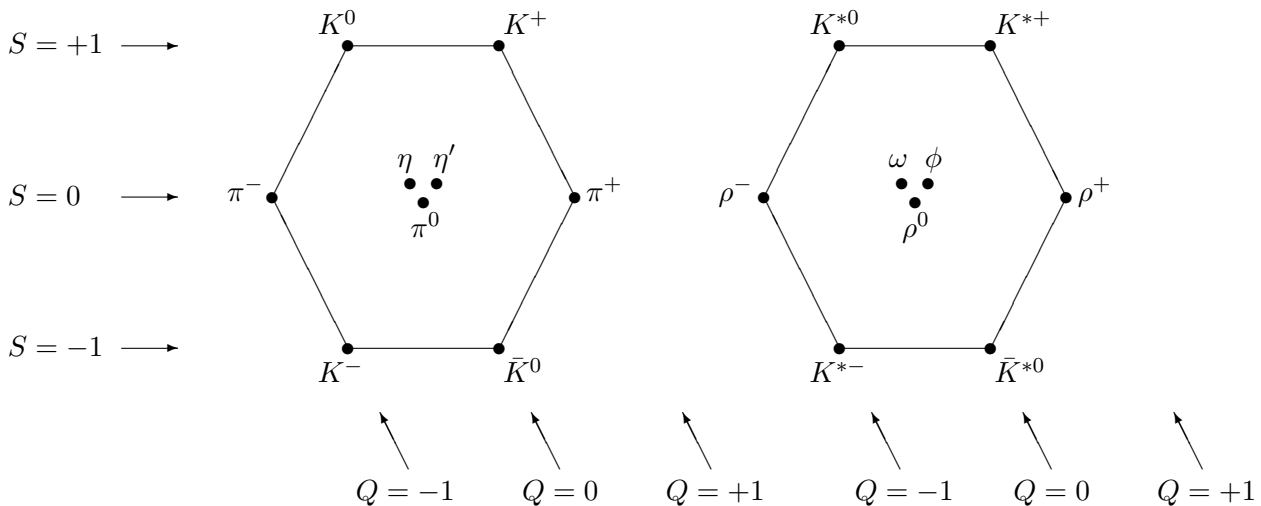


Abbildung X.1 – Leichte Mesonen mit $J^P = 0^-$ (links) und mit $J^P = 1^-$ (rechts).

	Q	S	I_3	Masse (MeV/ c^2)
p	+1	0	$+\frac{1}{2}$	938,27
n	0	0	$-\frac{1}{2}$	939,57
Λ	0	-1	0	1115,7
Σ^+	+1	-1	+1	1189,4
Σ^0	0	-1	0	1192,6
Σ^-	-1	-1	-1	1197,4
Ξ^0	0	-2	$+\frac{1}{2}$	1314,9
Ξ^-	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	1321,7

Tabelle X.3 – Quantenzahlen und Massen der leichten Baryonen mit $J^P = \frac{1}{2}^+$.

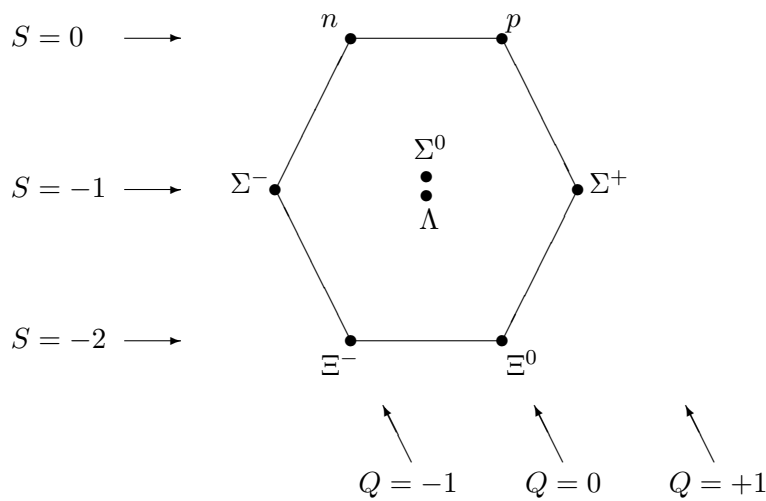


Abbildung X.2 – Leichte Baryonen mit $J^P = \frac{1}{2}^+$.

Wiederum findet man bei den leichtesten Baryonen zum einen eine Achtergruppe mit $J^P = \frac{1}{2}^+$ (Tab. X.3 und Abb. X.2) und zum anderen eine Zehnergruppe mit $J^P = \frac{3}{2}^+$ (Tab. X.4, Abb. X.3). Weitere ähnliche Neuner- bzw. Achter- oder Zehnergruppen für die schwereren Mesonen bzw. Ba-

	Q	S	I_3	Masse (MeV/ c^2)
Δ^{++}	+2	0	$+\frac{3}{2}$	≈ 1232
Δ^+	+1	0	$+\frac{1}{2}$	≈ 1232
Δ^0	0	0	$-\frac{1}{2}$	≈ 1232
Δ^-	-1	0	$-\frac{3}{2}$	≈ 1232
Σ^{*+}	+1	-1	+1	1382,8
Σ^{*0}	0	-1	0	1383,7
Σ^{*-}	-1	-1	-1	1387,2
Ξ^{*0}	0	-2	$+\frac{1}{2}$	1531,8
Ξ^{*-}	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	1535,0
Ω	-1	-3	0	1672,4

Tabelle X.4 – Eigenschaften der leichten Baryonen mit $J^P = \frac{3}{2}^+$.

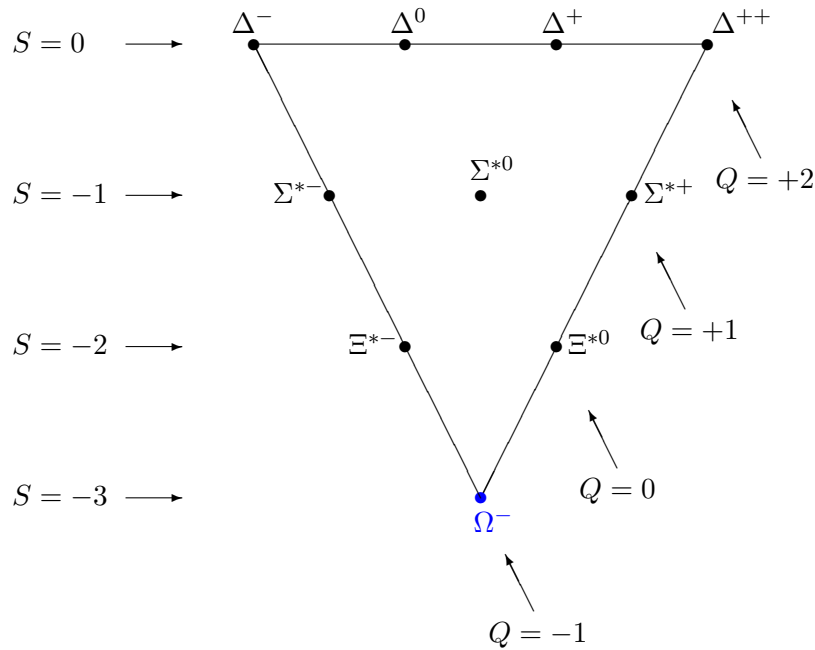


Abbildung X.3 – Leichte Baryonen mit $J = \frac{3}{2}$.

ryonen können auch gefunden werden (vgl. z.B. die nachgedruckten Artikel in Teil III der Artikelsammlung [25]).

Bemerkung: In Abb. [X.1]–[X.3] (und [X.4] hiernach) werden die Strangeness S (vertikal) und die elektrische Ladung Q (schräg) als Koordinaten benutzt. Anstatt Q kann man auch den Isospin I_3 (vgl. § [X.3.3 a]) verwenden — der dann eine horizontale Koordinate darstellt.

Dazu kann man anstatt S die (*starke*) Hyperladung Y benutzen, die einfach mit S zusammenhängt: $Y = S$ für die Mesonen der Tabellen [X.1]–[X.2] und $Y = S + 1$ für die Baryonen der Tabellen [X.3]–[X.4].⁽⁴¹⁾

Bei den Teilchengruppierungen der Abb. [X.1]–[X.3] handelt es sich auf den ersten Blick nur um bildliche Darstellungen. Sowohl Gell-Mann als auch Ne’eman haben aber auch bemerkt, dass 8, 9 oder 10 den Grad einfacher unitären Darstellungen der Gruppe $SU(3)$ sein können. Somit gibt das Tensorprodukt zweier Darstellungen von Grad 3 (und zwar aus der Fundamentaldarstellung $\mathbf{3}$ und deren komplex Konjugierten $\bar{\mathbf{3}}$) eine Darstellung von Grad 9.⁽⁴²⁾ Wiederum kommen irreduzible Darstellungen von Grad 10 und 8 im Tensorprodukt von drei Darstellungen vom Grad 3 vor.

Der nächste Schritt, den Gell-Mann [26] und Zweig^(ar) [27] als erste gemacht haben, ist die Identifikation der Fundamentaldarstellung und deren komplex Konjugierten mit Triplets von elementaren Bausteinen, aus denen die Mesonen und Baryonen bestehen. Physikalisch steht die Fundamentaldarstellung bzw. deren komplex konjugierte für drei Teilchen bzw. deren Antiteilchen, die als *Quarks* bzw. *Antiquarks* bezeichnet werden. Dann bestehen Mesonen aus einem Quark und einem Antiquark, und Baryonen aus drei Quarks.

Um die Quantenzahlen der Hadronen wiederzugeben, werden den Quarks geeignete Werte der Quantenzahlen zugeordnet. Somit haben alle Quarks den Spin $J = \frac{1}{2}$ und die Baryonenzahl $\mathcal{B} = +\frac{1}{3}$. Die Werte der elektrischen Ladung Q , der Strangeness S und der Hyperladung Y für die u (up),

⁽⁴¹⁾Allgemeiner gilt $Y = \mathcal{B} + S - \frac{1}{3}(C - B + T)$, wobei \mathcal{B} die Baryonenzahl, C den Charm, B die Beauty und T die Topness ist, vgl. unnummerierte Gleichung in Abschn. 15.1 der Review of Particle Properties [1].

⁽⁴²⁾Diese lässt sich dann als direkte Summe irreduzibler Darstellungen von Grad 8 und 1 schreiben, $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$, wobei die Darstellung vom Grad 1 im Fall der leichten Mesonen mit $J^P = 0^-$ dem η' entspricht, das deutlich schwerer als die acht anderen Teilchen der Abb. [X.1] links ist.

^(ar)G. ZWEIF, 1937–

	Q	S	I_3	Y
u	$+\frac{2}{3}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$
d	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$
s	$-\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{2}{3}$
\bar{u}	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
\bar{d}	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
\bar{s}	$+\frac{1}{3}$	+1	0	$+\frac{2}{3}$

Tabelle X.5 – Quantenzahlen der leichtesten Quarks und Antiquarks.

d (down) und s (strange) Quarks, aus denen die in den Tabellen [X.1](#)–[X.4](#) aufgelisteten Hadronen bestehen, werden in Tab. [X.5](#) angegeben und graphisch in Abb. [X.4](#) dargestellt.

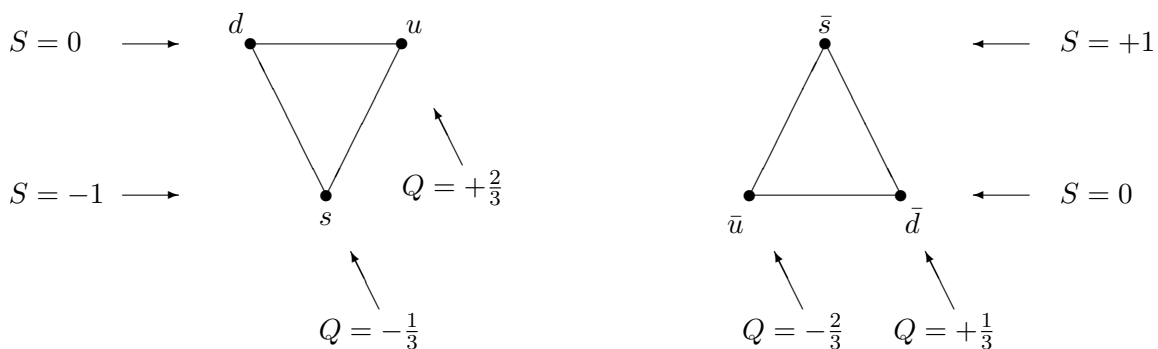


Abbildung X.4 – Quarks und Antiquarks, aus denen die Hadronen der Abb. [X.1](#)–[X.3](#) bestehen.

Bemerkungen:

* Die obige Diskussion lässt sich auf eine größere Anzahl N_f der *Quark-Flavours* verallgemeinern: um die Hadronen mit *Charm* und solche mit *Beauty/Bottomness* zu beschreiben, führt man die c (charm) und b (bottom) Quarks mit jeweiligen elektrischen Ladungen $Q = +\frac{2}{3}$ und $Q = -\frac{1}{3}$ ein. Dazu kommt noch das t (top) Quark, mit der elektrischen Ladung $Q = +\frac{2}{3}$, mit dem aber kein bekanntes Hadron gebildet wird.

* Für Hadronen bestehend aus u, d, s und c -Quarks kann man dreidimensionale Verallgemeinerungen der Abb. [X.1](#)–[X.3](#) darstellen, z.B. Sechzehnergruppen von Mesonen oder Zwanzigergruppen von Baryonen (vgl. Abb. 15.1 und 15.4 der Review of Particle Properties [\[1\]](#)).

* Die $SU(3)$ -Gruppe, die zu Grunde den Überlegungen von Gell-Mann und Ne’eman lag, wird $SU(3)$ -*Flavour-Gruppe* genannt, und oft als $SU(3)_f$ bezeichnet.

Ein großer Erfolg des Quarkmodells war die Vorhersage eines Baryons mit $Q = -1$ und $S = -3$, das in die untere Ecke in Abb. [X.3](#) passen würde, und für welches Gell-Mann eine Masse von $1685 \text{ MeV}/c^2$ berechnet hatte. Tatsächlich wurde ein solches Baryon, das Ω^- , mit einer Masse von $1672 \text{ MeV}/c^2$ bald darauf entdeckt [\[28\]](#).

Dennoch weist das Modell auch zwei große Probleme auf, so dass es lange nur als eine günstige mathematische Beschreibung ohne physikalische Deutung angesehen wurde. Erstens konnten isolierte Quarks nicht beobachtet werden — und wurden seitdem noch nie gesehen. Zweitens stellten ein paar Baryonen, z.B. die Ecken $\Delta^{++} = uuu, \Delta^- = ddd$ und $\Omega^- = sss$ des $J = \frac{3}{2}$ -Dekupletts der Abb. [X.3](#), anscheinend einen Widerspruch zum Pauli-Prinzip dar, da unten den drei identischen Quarks mindestens zwei den gleichen Spinzustand haben müssen — eigentlich haben sogar die drei Quarks den gleichen Spin.

Um das zweite Problem zu beseitigen wurde eine ad hoc Quantenzahl eingeführt, die *Farbe*, die in drei Varianten — „rot“, „grün“ und „blau“ — vorkommen kann und durch die Quarks getragen wird, während die Antiquarks die zugehörigen „Antifarben“ tragen. Dazu wurde postuliert, dass nur farblose Kombinationen von Quarks und Antiquarks als freie Teilchen auftreten können.⁽⁴³⁾ was das erste Problem löst — natürlich eher künstlich, da mit Hilfe eines Postulats. Unter diesen Annahmen ist die Wellenfunktion eines Δ^{++} , Δ^- oder Ω^- total symmetrisch unter dem Austausch der Spins oder der Orte der Quarks, hat aber einen total antisymmetrischen Farbanteil.

Gemäß der Farbhypothese gibt es also nicht nur einen, sondern $N_c = 3$ verschiedene u -Quarks, drei d -Quarks, usw., was experimentell beobachtbar sein sollte.

X.1.2 Hadronenerzeugung in Elektron–Positron-Kollisionen

Um die durch die Einführung der Farbquantenzahl implizierte Multiplikation der Freiheitsgrade besser in den Griff zu bekommen, kann man die Quark–Antiquark-Paarzeugung in inelastischen Elektron–Positron-Kollisionen in Betracht ziehen.

Betrachte also die Erzeugung in einem solchen Streuprozess von einem Teilchen–Antiteilchen-Paar, wobei das erzeugte Teilchen die Masse m und die elektrische Ladung Q hat. Hiernach wird m immer viel größer als die Elektronenmasse m_e sein. Zur niedrigsten Ordnung ist der Prozess rein quantenelektrodynamisch und dessen Amplitude wird durch ein einziges Feynman-Diagramm gegeben, ähnlich dem Diagramm der Abb. IX.8 (entsprechend Myon-Paarzeugung) oder der Abb. IX.9 (entsprechend Quark–Antiquark-Paarzeugung). Die zugehörige Amplitude lautet

$$\mathcal{M} = \frac{Qe^2}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2} [\bar{v}(\vec{p}_2, \sigma_2) \gamma_\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1)] [\bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\mu v(\vec{p}_4, \sigma_4)]$$

und führt zum totalen Wirkungsquerschnitt [vgl. Gl. IX.5]

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Teilchen–Antiteilchen-Paar}) = \frac{4\pi}{3} \frac{Q^2 \alpha_{\text{em}}^2}{s} \sqrt{\frac{1 - 4m^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right) \left(1 + \frac{2m_e^2}{s}\right),$$

mit der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} der einlaufenden Teilchen. Ist die Letztere viel größer als zweimal der Masse der auslaufenden Teilchen $\sqrt{s} \gg 2m \gg 2m_e$, so findet man

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Teilchen–Antiteilchen-Paar}) \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{Q^2 \alpha_{\text{em}}^2}{s}, \quad (\text{X.1})$$

wobei die weggelassenen Terme der Ordnung $\mathcal{O}(m^4/s^2)$ sind. Dabei kann man die rechte Seite der Gleichung noch mit $\Theta(\sqrt{s} - 2m)$ multiplizieren, wobei Θ die Heaviside-Funktion bezeichnet, um die Erzeugungsschwelle des Paares in die Formel einzubeziehen.

Jetzt kann jenes Ergebnis auf den Fall der Erzeugung eines Quark–Antiquark-Paares für ein Quark mit Flavour f und elektrischer Ladung Q_f angewandt werden. Wenn $\sqrt{s} \gg 2m_{q_f}$ gibt Gl. IX.1 den totalen Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines $q_f \bar{q}_f$ -Paares, wobei das Quark eine bestimmte Farbe hat, entweder rot oder grün oder blau. Um den totalen Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines Quark–Antiquark-Paares mit beliebiger Farbe zu erhalten, muss man über die N_c Farben summieren:

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow q_f + \bar{q}_f) \simeq \sum_{a=1}^{N_c} \frac{4\pi}{3} \frac{Q_f^2 \alpha_{\text{em}}^2}{s} \Theta(\sqrt{s} - 2m_{q_f}) = N_c \frac{4\pi}{3} \frac{Q_f^2 \alpha_{\text{em}}^2}{s} \Theta(\sqrt{s} - 2m_{q_f}). \quad (\text{X.2})$$

Somit hängt der Wirkungsquerschnitt von der Anzahl der Farben ab.

In einem Experiment werden Quarks nicht beobachtet, sondern nur Hadronen. Die Erzeugung des Quark–Antiquark-Paares $q_f \bar{q}_f$ ist somit nur ein Zwischenschritt des komplizierteren Prozesses

$$e^- + e^+ \rightarrow q_f + \bar{q}_f \rightarrow \text{Hadronen}, \quad (\text{X.3})$$

⁽⁴³⁾Dabei gilt die Summe gleicher Mengen von rot, grün und blau als farblos.

wie in Abb. [X.5](#) schematisch dargestellt wird. Dann untersucht man Hadronenerzeugung, statt Quark–Antiquark-Paarerzeugung. Zur niedrigsten Ordnung in α_{em} werden alle Hadronen über einen

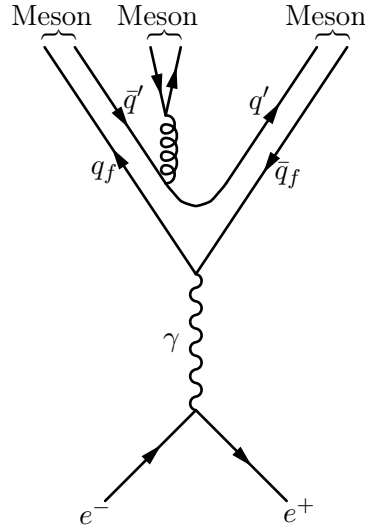


Abbildung X.5 – Elektron–Positron-Vernichtung in Hadronen-Jets.

solchen Prozess erzeugt. Dabei kann aber der Flavour des Quarks im Zwischenzustand beliebig sein, solange die Energie ausreicht, um das entsprechende Paar zu erzeugen. Somit ist der totale Wirkungsquerschnitt für Hadronenerzeugung die Summe über die Flavours der Wirkungsquerschnitte für $q_f\bar{q}_f$ -Paarerzeugung. Unter Berücksichtigung der Formel [\(X.2\)](#) ergibt sich

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen}) \simeq N_c \sum_f \frac{4\pi Q_f^2 \alpha_{\text{em}}^2}{3s} \Theta(\sqrt{s} - 2m_{q_f}), \quad (\text{X.4})$$

wobei dieses Resultat für Energien \sqrt{s} weit von den Paar-Erzeugungsschwellen $2m_{q_f}$ gilt.

Teilt man diesen Wirkungsquerschnitt durch jenen für Myon-Paarerzeugung, der sich auch durch Gl. [\(X.1\)](#) approximieren lässt, so findet man

$$R(\sqrt{s}) \equiv \frac{\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)} \simeq N_c \sum_f Q_f^2 \Theta(\sqrt{s} - 2m_{q_f}). \quad (\text{X.5})$$

Je nach dem Wert von \sqrt{s} nimmt die Summe im rechten Glied nur diskrete Werte an, die von den elektrischen Ladungen $Q_u = Q_c = Q_t = \frac{2}{3}$ und $Q_d = Q_s = Q_b = -\frac{1}{3}$ der Quarks abhängen. Wiederum nimmt das Verhältnis auch nur diskrete Werte an, die direkt proportional zu N_c sind:

$$R(\sqrt{s}) \simeq \begin{cases} \frac{2}{3}N_c & \text{für } 2m_s \ll \sqrt{s} \ll 2m_c \\ \frac{10}{9}N_c & \text{für } 2m_c \ll \sqrt{s} \ll 2m_b \\ \frac{11}{9}N_c & \text{für } 2m_b \ll \sqrt{s} \ll 2m_t \end{cases}$$

und $R(\sqrt{s}) \simeq \frac{5}{3}N_c$ für $\sqrt{s} \gg 2m_t$.

Experimentell beobachtet man sukzessive Stufen mit $R \approx 2$ für $2m_s \ll \sqrt{s} \ll 2m_c$, $R \approx 3,33$ für $2m_c \ll \sqrt{s} \ll 2m_b$, und $R \approx 3,67$ für $2m_b \ll \sqrt{s} \ll 2m_t$.⁽⁴⁴⁾ Diese Messungen entsprechen somit einer Messung der Anzahl der Farben und liefern $N_c = 3$. Das heißt, dass jedes Quark mit gegebenem Flavour wirklich in drei unterschiedlichen Versionen auftreten kann, so dass die Farbhypothese bestätigt ist.

Bemerkung: Die Berechnung des Wirkungsquerschnitts [\(X.2\)](#) und damit des Verhältnisses [\(X.5\)](#) beruht auf der Annahme, dass die auslaufenden Quarks wechselwirkungsfreie on-Shell-Teilchen sind.

⁽⁴⁴⁾ Plots für den Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen})$ und das Verhältnis $R(\sqrt{s})$ sind z.B. in der Review of Particle Properties [\[1\]](#) Abb. 51.2 und 51.3 zu finden.

Doch im Prozess (X.3) sind jene Quarks nur off-Shell virtuelle Teilchen. Somit soll es nicht überraschend sein, wenn das experimentelle Verhältnis $R(\sqrt{s})$ stark von der einfachen Vorhersage (X.5) abweicht. Dies ist insbesondere der Fall für eine Schwerpunktsenergie \sqrt{s} in der Nachbarschaft der Masse eines gebundenen $q\bar{q}$ -Zustands, d.h. wenn ein Quark und dessen Antiquark zu einem Meson verbinden können, vorausgesetzt sie miteinander (stark) wechselwirken können.