IX.3.3 Wirkungsquerschnitt bei großem Energieübertrag

Für das folgende Kapitel ist es interessant, einen alternativen Ausdruck des Wirkungsquerschnitts herzuleiten, der auch für großen Energien des Elektrons gilt.

Sei $\mathsf{q} \equiv \mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_3$ der Viererimpuls des virtuellen Photons, vgl. Abb. IX.2. Wegen der Viererimpulserhaltung gilt auch $\mathsf{q} = \mathsf{p}_4 - \mathsf{p}_2$. Das Quadrieren dieser Gleichungen liefert die Skalarprodukte

$$\mathsf{p}_1 \cdot \mathsf{p}_3 = m_e^2 - \frac{\mathsf{q}^2}{2} \quad \text{und} \quad \mathsf{p}_2 \cdot \mathsf{p}_4 = m_\mu^2 - \frac{\mathsf{q}^2}{2}.$$

Arbeitet man wieder im Ruhesystem des Myons vor dem Stoß, so gelten noch $\mathsf{p}_1 \cdot \mathsf{p}_2 = m_\mu E_{\vec{p}_1}$ und $\mathsf{p}_2 \cdot \mathsf{p}_3 = m_\mu E_{\vec{p}_3}$. Dabei soll aber der Rückstoß des Myons nicht mehr vernachlässigt werden, so dass $E_{\vec{p}_1} \neq E_{\vec{p}_3}$. Schließlich folgen aus $\mathsf{p}_4 = \mathsf{p}_2 + \mathsf{q}$ die Skalarprodukte $\mathsf{p}_1 \cdot \mathsf{p}_4 = m_\mu E_{\vec{p}_1} + \mathsf{q}^2/2$ und $\mathsf{p}_3 \cdot \mathsf{p}_4 = m_\mu E_{\vec{p}_3} - \mathsf{q}^2/2$. Nach Einsetzen dieser Produkte in Gl. (IX.10) ergibt sich der exakte Ausdruck

$$\left\langle \left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})\right|^2 \right\rangle = \frac{8e^4}{\mathsf{q}^4}\left[2m_\mu^2 E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_3} + m_\mu (E_{\vec{p}_3} - E_{\vec{p}_1})\frac{\mathsf{q}^2}{2} + (m_e^2 + m_\mu^2)\frac{\mathsf{q}^2}{2}\right].$$

Jetzt wird m_e^2 gegen m_μ^2 in diesem gemittelten Betragsquadrat vernachlässigt. Dazu wird angenommen, dass das Elektron relativistisch ist, so dass dessen Massenenergie vernachlässigbar gegen dessen Energie $E_{\vec{p}_1}$ oder $E_{\vec{p}_3}$ ist. Diese Hypothese führt zu

$$\mathsf{q}^2 = 2m_e^2 - 2E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_3} + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 \simeq -2E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_3}(1 - \cos\theta).$$

Schließlich erkennt man bei $E_{\vec{p}_3} - E_{\vec{p}_1}$ die 0-Komponente von $\mathsf{p}_3 - \mathsf{p}_1 = -\mathsf{q}$, was sich auch als

$$E_{\vec{p}_3} - E_{\vec{p}_1} = -\frac{\mathsf{q} \cdot \mathsf{p}_2}{m_\mu} = -\frac{\frac{1}{2}\left[(\mathsf{q} + \mathsf{p}_2)^2 - \mathsf{q}^2 - \mathsf{p}_2^2\right]}{m_\mu} = \frac{\mathsf{q}^2}{2m_\mu}$$

schreiben lässt. Diese Resultate führen schließlich nach einiger Algebra zu

$$\left\langle \left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})\right|^2 \right\rangle = \frac{16e^4}{\mathsf{q}^4} m_\mu^2 E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_3}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{\mathsf{q}^2}{2m_\mu^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]. \tag{IX.15}$$

Dieses gemittelte Amplitudenquadrat darf nicht in den Ausdruck (VII.16) des Wirkungsquerschnitts eingesetzt werden, weil das verwendete Bezugssystem nicht das Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen ist. Stattdessen sollte man mit der unintegrierten Version von Gl. (VII.10) anfangen:

$$\mathrm{d}^6\sigma(\vec{p}_3, \vec{p}_4) = \frac{1}{4|\vec{v}_1| E_{\vec{p}_1} m_\mu}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathsf{p}_3 + \mathsf{p}_4 - \mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_2)\left\langle \left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})\right|^2 \right\rangle \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_3}} \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_4}}.$$

Da das Elektron relativistisch ist, gelten $|\vec{v}_1| \simeq 1$ sowie $\mathrm{d}^3\vec{p}_3 = |\vec{p}_3|^2\, \mathrm{d}|\vec{p}_3|\, \mathrm{d}^2\Omega \simeq E'^2 \mathrm{d}E'\, \mathrm{d}^2\Omega$ mit der Energie E' des Elektrons nach dem Stoß, d.h.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^6\sigma(E', \Omega, \vec{p}_4) &= \frac{E'}{32\pi^2 E_{\vec{p}_1} m_\mu}\left\langle \left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})\right|^2 \right\rangle \mathrm{d}E'\, \mathrm{d}^2\Omega\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_4}{2E_{\vec{p}_4}}\, \delta^{(4)}(\mathsf{p}_3 + \mathsf{p}_4 - \mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_2) \\ &= \frac{e^4}{2\pi^2\mathsf{q}^4} m_\mu E'^2\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{\mathsf{q}^2}{2m_\mu^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\mathrm{d}E'\, \mathrm{d}^2\Omega\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_4}{2E_{\vec{p}_4}}\, \delta^{(4)}(\mathsf{p}_4 - \mathsf{p}_2 - \mathsf{q}).\end{aligned}$$

Wenn der Impuls des auslaufenden Myons nicht gemessen wird, kann man nach $\vec{p}_4$ integrieren. Dabei gibt die Beziehung (VI.21)

$$\int \delta^{(4)}(\mathsf{p}_4 - \mathsf{p}_2 - \mathsf{q})\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_4}{2E_{\vec{p}_4}} = \delta\big((\mathsf{p}_2 + \mathsf{q})^2 - m_\mu^2\big) = \delta\big(2\mathsf{p}_2 \cdot \mathsf{q} + \mathsf{q}^2\big).$$

Somit ergibt sich schließlich

$$\frac{\mathrm{d}^3\sigma}{\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{4\alpha_{\mathrm{em}}^2}{\mathsf{q}^4}E'^2\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{\mathsf{q}^2}{2m_\mu^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\delta\left(\frac{\mathsf{p}_2\cdot\mathsf{q}}{m_\mu} + \frac{\mathsf{q}^2}{2m_\mu}\right).$$

Führt man die Änderung der Energie des Elektrons $\nu \equiv (\mathsf{p}_2\cdot\mathsf{q})/m_\mu$ ein, so lautet dies

$$\frac{\mathrm{d}^3\sigma}{\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{4\alpha_{\mathrm{em}}^2}{\mathsf{q}^4}E'^2\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{\mathsf{q}^2}{2m_\mu^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\delta\left(\nu + \frac{\mathsf{q}^2}{2m_\mu}\right).$$

Schließlich kann q^4 im Nenner des Vorfaktors noch durch $[2EE'(1-\cos\theta)]^2 = \left(4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2$ ersetzt werden, wobei E die Energie des Elektrons vor dem Stoß ist. Es kommt dann

$$\frac{\mathrm{d}^3\sigma}{\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}^2\Omega} = \left(\frac{\alpha_{\mathrm{em}}^2}{2E\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{\mathsf{q}^2}{2m_\mu^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\delta\left(\nu + \frac{\mathsf{q}^2}{2m_\mu}\right) \quad \text{mit} \quad \nu \equiv \frac{\mathsf{p}_2\cdot\mathsf{q}}{m_\mu}. \tag{IX.16}$$

Diese Form wird sich für die Diskussion der tiefinelastischen Elektron–Proton-Streuung im nächsten Kapitel (Abschn. ??) als günstig erweisen.

Literatur zum Kapitel IX

- Berger, *Elementarteilchenphysik* [21], Kap. 3.
- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 7.5–7.9.
- Halzen & Martin, *Quarks and Leptons* [22], Kap. 6.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [6], Kap. 9–11.