

IX.2.3 Inelastische Prozesse zweiter Ordnung

Jetzt werden ein paar wichtige inelastische Prozesse der Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$ dargestellt.

IX.2.3a Paarvernichtung

Ein erster wichtiger Prozess zweiter Ordnung ist die Vernichtung eines Elektron–Positron-Paars in zwei on-Shell-Photonen $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$. Aufgrund der Anwesenheit zweier identischer Teilchen im Endzustand gibt es zwei Feynman-Diagramme, die sich durch den Austausch der Labels der Photonen unterscheiden und in Abb. IX.6 gezeigt sind. Da die zwischen diesen Diagrammen ausgetauschten Linien Bosonen (und zwar Photonen) darstellen, sollen die zugehörigen Teilamplituden einfach addiert werden.

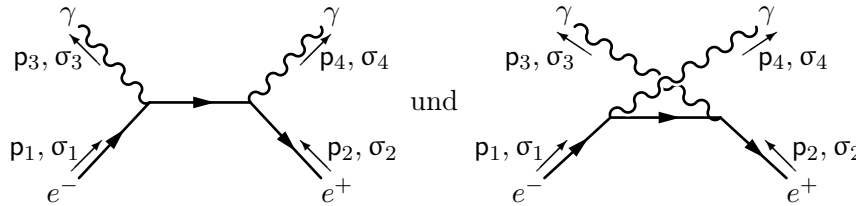


Abbildung IX.6 – Feynman-Diagramme für Elektron–Positron-Annihilation zur führenden Ordnung.

Man findet, dass die Teilamplitude für das Diagramm links durch

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{v}(2) \not{\epsilon}(4) \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3 + m_e}{(p_1 - p_3)^2 - m_e^2} \not{\epsilon}(3) u(1)$$

gegeben wird, sehr ähnlich der Teilamplitude für das Diagramm links in Abb. IX.5

IX.2.3b Paarerzeugung

Tauscht man die Rollen der ein- und auslaufenden Teilchen im letzteren Prozess, so erhält man statt Elektron-Paarvernichtung die Paarerzeugung $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$. Hier auch tragen zwei Feynman-Diagramme zur Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$ bei, vgl. Abb. IX.7.

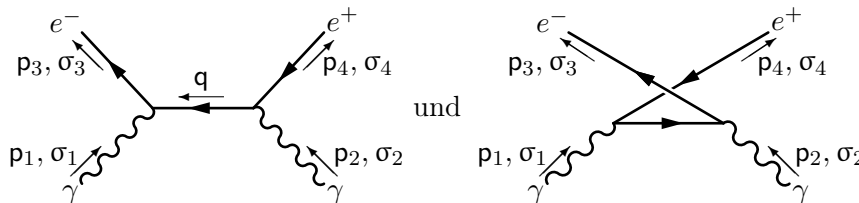


Abbildung IX.7 – Feynman-Diagramme für Paarerzeugung zur führenden Ordnung.

Für das Diagramm links gibt die Viererimpulserhaltung $q = p_3 - p_1$, so dass die zugehörige Teilamplitude lautet

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u}(3) \not{\epsilon}(1) \frac{\not{p}_3 - \not{p}_1 + m_e}{(p_3 - p_1)^2 - m_e^2} \not{\epsilon}(2) v(4).$$

Bemerkungen:

* Da die Amplitude eine komplexe Zahl ist, sind hermitesche Konjugation und komplexe Konjugation bei ihr äquivalent: $\mathcal{M}^\dagger = \mathcal{M}^*$. Berechnet man dann \mathcal{M}^\dagger unter Verwendung der Beziehung $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^\mu(\gamma^0)^\dagger$ [Gl. (IV.11)], und tauscht man am Ende die Labels 1 gegen 3 und 2 gegen 4, so findet man, dass die komplex-konjugierte Amplitude \mathcal{M}^* des linken Diagramms in Abb. IX.7 gleich der Amplitude für das linke Diagramm von Abb. IX.6 ist, d.h. für den zeitumgekehrten Prozess.

* Kinematisch ist Paarerzeugung nicht immer möglich! Um ein Elektron–Positron-Paar erzeugen zu können, muss die Energie im Schwerpunktsystem der einlaufenden Photonen größer als zweimal die Elektronenmasse (mal c^2) sein. Dagegen kann Paarvernichtung immer stattfinden.

IX.2.3c Myon-Paarerzeugung in Elektron-Positron-Streuung

Der Stoß eines Elektrons an einem Positron kann nicht nur entweder elastisch sein (Abb. IX.4) oder zu deren Vernichtung in zwei Photonen führen (Abb. IX.6), sondern kann noch weitere Endzustände ergeben, auch zur niedrigsten Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$. Wenn die Energie im Schwerpunktsystem der einlaufenden e^- und e^+ groß genug ist, kann im Endzustand ein Teilchen-Antiteilchen-Paar entstehen, wie z.B. ein Myon-Antimyon-Paar: $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$. Das Feynman-Diagramm für diesen Prozess zur Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$ wird in Abb. IX.8 dargestellt.

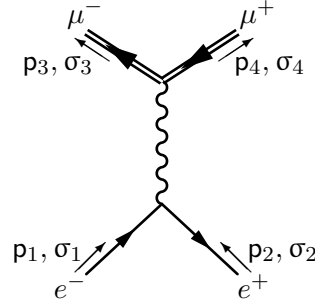


Abbildung IX.8 – Feynman-Diagramm für Myon-Paarerzeugung zur führenden Ordnung.

Die zugehörige Amplitude lautet

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(\vec{p}_2, \sigma_2) \gamma_\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1)] [\bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\mu v(\vec{p}_4, \sigma_4)].$$

Unter Verwendung der in Abschn. IX.3 dargestellten Methoden kann man den entsprechenden differentiellen Wirkungsquerschnitt berechnen, sowie den totalen Wirkungsquerschnitt. Für den Fall, wo die Helizitätszustände der ein- und auslaufenden Teilchen unbekannt sind, gilt zur niedrigsten Ordnung

$$\sigma_{\text{tot}}(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{s} \sqrt{\frac{1 - 4m_\mu^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{s}\right) \left(1 + \frac{2m_e^2}{s}\right), \quad (\text{IX.5})$$

wobei s das Quadrat der Schwerpunktsenergie ist. Dabei erkennt man, dass die Letztere größer als $2m_\mu$ sein muss, damit die Wurzel positiv ist.

IX.2.3d Quark-Antiquark-Paarerzeugung in Elektron-Positron-Streuung

Eine andere Möglichkeit ist, dass die Vernichtung eines Elektron-Positron-Paars zur Erzeugung eines Quark-Antiquark-Paars führt, entsprechend dem in Abb. IX.9 dargestellten Feynman-Diagramm.

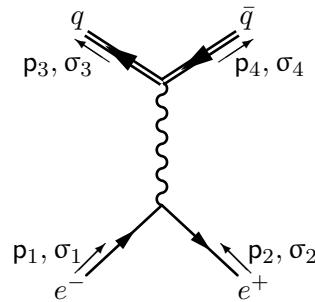


Abbildung IX.9 – Feynman-Diagramm für Quark-Antiquark-Paarerzeugung zur führenden Ordnung.

Sei Q_q die elektrische Ladung des erzeugten Quarks in Einheiten von e — $Q_q = \frac{2}{3}$ für u, c und t -Quarks, oder $-\frac{1}{3}$ für d, s und b -Quarks. Die Amplitude für den Prozess zur Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$ lautet

$$\mathcal{M} = \frac{Q_q e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(\vec{p}_2, \sigma_2) \gamma_\mu u(\vec{p}_1, \sigma_1)] [\bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3) \gamma^\mu v(\vec{p}_4, \sigma_4)].$$

gegeben. Diese Amplitude ist natürlich sehr ähnlich jener für den Prozess $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, bis auf den Faktor $-Q_q$ — dazu unterscheiden sich auch die Spinoren für die auslaufenden Teilchen, in denen die Teilchenmasse eine Rolle spielt.

IX.2.4 Wichtige Prozesse dritter Ordnung

Zur Ordnung $\mathcal{O}(e^3)$ kommen schon viele Prozesse bzw. Feynman-Diagramme vor. Darunter befinden sich die vier Diagramme der Abb. IX.10, die sog. *Strahlungskorrekturen* zum magnetischen Moment beschreiben.

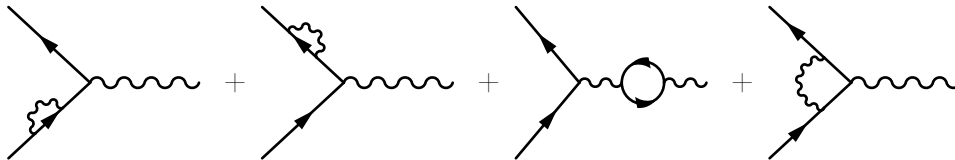


Abbildung IX.10 – Strahlungskorrekturen zum magnetischen Dipolmoment.

Die zwei ersten Diagramme können in der Definition der Masse des Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens absorbiert werden. Analog kann das dritte Diagramm in einer Neudefinition der Kopplungskonstante e der Quantenelektrodynamik angenommen werden.⁽³⁶⁾ Abgesehen von diesen *Renormierungen* bleibt das vierte Diagramm, das zu einer Änderung des magnetischen Dipolmoments führt. Man kann zeigen, dass zur Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$ gilt

$$|\mu_e| = \mu_B \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2} \right) = \mu_B \left(1 + \frac{\alpha_{em}}{2\pi} \right) \simeq 1,001164\mu_B.$$

⁽³⁶⁾Die zwei ersten Diagramme und das vierte tragen auch individuell zur Kopplungskonstante bei, doch ihre Beiträge heben sich auf.