IX.3 Wirkungsquerschnitt für elastische Elektron–Myon-Streuung

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Berechnung des Wirkungsquerschnitts für die in Abb. IX.2 dargestellte elastische Elektron–Myon-Streuung.

IX.3.1 Unpolarisiertes Amplitudenbetragsquadrat

Durch Anwendung der Feynman-Regeln lautet die Amplitude für den Prozess

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathrm{i}\,\bar{u}(\vec{p}_3,\sigma_3)\,\mathrm{i}e\gamma^\mu\,u(\vec{p}_1,\sigma_1)\frac{-\mathrm{i}\eta_{\mu\nu}}{(\mathsf{p}_1-\mathsf{p}_3)^2}\,\bar{u}(\vec{p}_4,\sigma_4)\,\mathrm{i}e\gamma^\nu\,u(\vec{p}_2,\sigma_2)\\ &= -\frac{e^2}{(\mathsf{p}_1-\mathsf{p}_3)^2}\,\bar{u}(\vec{p}_3,\sigma_3)\gamma^\mu\,u(\vec{p}_1,\sigma_1)\bar{u}(\vec{p}_4,\sigma_4)\gamma_\mu\,u(\vec{p}_2,\sigma_2). \qquad \text{(IX.6)}\end{aligned}$$

In einem echten Experiment sind die Helizitätszustände der kollidieren Teilchen selten bekannt, und jene der Streuprodukte werden auch meist nicht gemessen. Stattdessen hat jedes einlaufende Teilchen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entweder eine positive oder eine negative Helizität, so dass jede Konfiguration der Spinzustände $\sigma_1=\pm,\sigma_2=\pm$ kann mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ vorkommen.

In solchen Fällen lohnt es sich, anstatt die Wirkungsquerschnitte mit bestimmten Helizitäten herzuleiten, den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt direkt zu berechnen, was oft einfacher ist. Somit soll man zum einen über die verschiedenen möglichen Spinzustände der einlaufenden Teilchen mitteln, und zum anderen über die Spinkonfigurationen im Endzustand summieren. Dies lässt sich schon auf der ebene der Amplitudenbetragsquadrate durchführen: anstatt das Betragsquadrat der Amplitude $\mathcal{M}(\{\vec{p}_i,\sigma_i\})$ für bestimmte Werte der ein- und auslaufenden Impulse und Spins zu berechnen, betrachtet man direkt den Mittelwert

$$\left\langle\left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})\right|^2\right\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\sigma_1=\pm}\sum_{\sigma_2=\pm}\sum_{\sigma_3=\pm}\sum_{\sigma_4=\pm}\left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i,\sigma_i\})\right|^2. \qquad \text{(IX.7)}$$

Hier führt die Amplitude (IX.6) zu

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i,\sigma_i\})\right|^2 = \frac{e^4}{(\mathsf{p}_1-\mathsf{p}_3)^4}\,&\bar{u}(\vec{p}_3,\sigma_3)\gamma^\mu\,u(\vec{p}_1,\sigma_1)\big[\bar{u}(\vec{p}_3,\sigma_3)\gamma^\rho\,u(\vec{p}_1,\sigma_1)\big]^*\\ &\times\,\bar{u}(\vec{p}_4,\sigma_4)\gamma_\mu\,u(\vec{p}_2,\sigma_2)\big[\bar{u}(\vec{p}_4,\sigma_4)\gamma_\rho\,u(\vec{p}_2,\sigma_2)\big]^*.\end{aligned}$$

Jedes Produkt $\bar{u}(\vec{p}_i,\sigma_i)\gamma_\mu u(\vec{p}_j,\sigma_j)$ mit entweder einem kontra- oder einem kovarianten Index ist tatsächlich eine Zahl, d.h. eine 1×1-Matrix, die gleich deren Transponierten ist. Nach komplexer Konjugation kommt somit $\big[\bar{u}(\vec{p}_i,\sigma_i)\gamma_\mu u(\vec{p}_j,\sigma_j)\big]^* = \big[\bar{u}(\vec{p}_i,\sigma_i)\gamma_\mu u(\vec{p}_j,\sigma_j)\big]^\dagger$. Führt man die hermitesche Kongujation wie üblich durch, so kommt

$$\big[\bar{u}(\vec{p}_i,\sigma_i)\gamma_\mu u(\vec{p}_j,\sigma_j)\big]^\dagger = \big[u(\vec{p}_i,\sigma_i)^\dagger\gamma_0\gamma_\mu u(\vec{p}_j,\sigma_j)\big]^\dagger = u(\vec{p}_j,\sigma_j)^\dagger\gamma_\mu^\dagger\gamma_0^\dagger u(\vec{p}_i,\sigma_i).$$

Unter Verwendung der Beziehung $\gamma_\mu^\dagger\gamma_0^\dagger = \gamma_\mu^\dagger\gamma_0 = \gamma_0\gamma_\mu$ ergibt sich dann

$$\big[\bar{u}(\vec{p}_i,\sigma_i)\gamma_\mu u(\vec{p}_j,\sigma_j)\big]^* = \bar{u}(\vec{p}_j,\sigma_j)\gamma_\mu u(\vec{p}_i,\sigma_i).$$

Diese Relation kann zweimal in das Amplitudenbetragsquadrat $\left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i,\sigma_i\})\right|^2$ oben eingesetzt werden. Nach Mittelung über einlaufende Spinzustände und Summe über auslaufende Spinzustände erhält man somit

$$\begin{aligned}\left\langle\left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})\right|^2\right\rangle = \frac{e^4}{4(\mathsf{p}_1-\mathsf{p}_3)^4}\sum_{\substack{\sigma_i=\pm\\ i=1,2,3,4}}\,&\bar{u}(\vec{p}_3,\sigma_3)\gamma^\mu\,u(\vec{p}_1,\sigma_1)\bar{u}(\vec{p}_1,\sigma_1)\gamma^\rho\,u(\vec{p}_3,\sigma_3)\\ &\times\,\bar{u}(\vec{p}_4,\sigma_4)\gamma_\mu\,u(\vec{p}_2,\sigma_2)\bar{u}(\vec{p}_2,\sigma_2)\gamma_\rho\,u(\vec{p}_4,\sigma_4).\end{aligned}$$

Für die einlaufenden Teilchen ($i = 1, 2$) kann man dank der Vollständigkeitsrelation (IV.33a) die Summe über σ_i von $u(\vec{p}_i, \sigma_i)\bar{u}(\vec{p}_i, \sigma_i)$ durch $\not{p}_i + m_i\mathbb{1}_4$ ersetzen, und zwar mit $m_1 = m_e$ und $m_2 = m_\mu$:

$$\left\langle \left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})\right|^2 \right\rangle = \frac{e^4}{4(\mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_3)^4} \sum_{\sigma_3,\sigma_4=\pm} \bar{u}(\vec{p}_3, \sigma_3)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e\mathbb{1}_4)\gamma^\rho u(\vec{p}_3, \sigma_3) \\ \times \bar{u}(\vec{p}_4, \sigma_4)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu\mathbb{1}_4)\gamma_\rho u(\vec{p}_4, \sigma_4). \tag{IX.8}$$

Für jede beliebige 4×4-Matrix M ist das Produkt $\bar{u}(\vec{p}, \sigma)M u(\vec{p}, \sigma)$ eine 1×1-Matrix, d.h. eine Zahl die Gleichung. Indem man die Matrix- und Spinorkomponenten schreibt, lautet das Produkt

$$\bar{u}(\vec{p}, \sigma)M u(\vec{p}, \sigma) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \bar{u}(\vec{p}, \sigma)_\alpha M_{\alpha\beta} u(\vec{p}, \sigma)_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} M_{\alpha\beta} u(\vec{p}, \sigma)_\beta\, \bar{u}(\vec{p}, \sigma)_\alpha.$$

Dabei ist $u(\vec{p}, \sigma)_\beta\, \bar{u}(\vec{p}, \sigma)_\alpha$ das Matrixelement (β, α) der Matrix $u(\vec{p}, \sigma)\bar{u}(\vec{p}, \sigma)$. Nach Summieren über σ findet man dann mithilfe der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\sigma=\pm} \bar{u}(\vec{p}, \sigma)M u(\vec{p}, \sigma) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} M_{\alpha\beta}\left[\sum_{\sigma=\pm} u(\vec{p}, \sigma)\bar{u}(\vec{p}, \sigma)\right]_{\beta\alpha} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} M_{\alpha\beta}\big(\not{p} + m\mathbb{1}_4\big)_{\beta\alpha},$$

d.h.[37]

$$\sum_{\sigma=\pm} \bar{u}(\vec{p}, \sigma)M u(\vec{p}, \sigma) = \mathrm{Tr}\big[M\big(\not{p} + m\mathbb{1}_4\big)\big]. \tag{IX.9}$$

Unter Verwendung dieser Formel mit $M = \gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e\mathbb{1}_4)\gamma^\rho$ bzw. $M = \gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu\mathbb{1}_4)\gamma_\rho$ wird die Summe über σ_3 bzw. σ_4 in Gl. (IX.8) trivial. Insgesamt ergibt sich

$$\left\langle \left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})\right|^2 \right\rangle = \frac{e^4}{4(\mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_3)^4} \mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e\mathbb{1}_4)\gamma^\rho\big(\not{p}_3 + m_e\mathbb{1}_4\big)\big]\, \mathrm{Tr}\big[\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu\mathbb{1}_4)\gamma_\rho\big(\not{p}_4 + m_\mu\mathbb{1}_4\big)\big].$$

In der ersten Spur treten nur Größen auf, die das Elektron charakterisieren: dessen Masse und ein- und auslaufende Viererimpulse. Dagegen hängt die zweite Spur nur von dem Myon ab. Zudem ist der Ausdruck des gemittelten Amplitudenquadrats jetzt frei von Dirac-Spinoren, die durch Spuren von Produkten von Gamma-Matrizen ersetzt sind. Jene lassen sich durch die Formeln (IV.8)–(IV.10) sowie die Relation $\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\big) = 4\big(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\big)$ mit dem Produkt von vier Dirac-Matrizen ausdrücken.[38] Mit deren Hilfe erhält man z.B.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e\mathbb{1}_4)\gamma^\rho\big(\not{p}_3 + m_e\mathbb{1}_4\big)\big] &= p_{1\nu}p_{3\sigma}\,\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\big) + m_e^2\,\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\rho\big)\\ &= 4\big[p_{1\nu}p_{3\sigma}\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right) + m_e^2\,\eta^{\mu\rho}\big]\\ &= 4\big[p_1^\mu p_3^\rho + p_3^\mu p_1^\rho - \big(\mathsf{p}_1\cdot\mathsf{p}_3 - m_e^2\big)\eta^{\mu\rho}\big],\end{aligned}$$

und in ähnlicher Weise $\mathrm{Tr}\big[\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu\mathbb{1}_4)\gamma_\rho\big(\not{p}_4 + m_\mu\mathbb{1}_4\big)\big] = 4\big[p_{2\mu}p_{4\rho} + p_{4\mu}p_{2\rho} - \big(\mathsf{p}_2\cdot\mathsf{p}_4 - m_\mu^2\big)\eta_{\mu\rho}\big]$.

Schließlich findet man nach einigen Berechnungen

$$\left\langle \left|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})\right|^2 \right\rangle = \frac{8e^4}{(\mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_3)^4}\big[\big(\mathsf{p}_1\cdot\mathsf{p}_2\big)\big(\mathsf{p}_3\cdot\mathsf{p}_4\big) + \big(\mathsf{p}_1\cdot\mathsf{p}_4\big)\big(\mathsf{p}_2\cdot\mathsf{p}_3\big) - m_\mu^2\big(\mathsf{p}_1\cdot\mathsf{p}_3\big) - m_e^2\big(\mathsf{p}_2\cdot\mathsf{p}_4\big) + 2m_e^2 m_\mu^2\big]. \tag{IX.10}$$

(37) Diese Gleichung — sowie Gl. (IX.11) und zwei ähnliche Gleichungen mit gemischten Teilchen- und Antiteilchen-Spinoren — wird manchmal *Casimirs*[ao] *Trick* genannt.

(38) Weitere Identitäten für Spuren von Produkten von Gamma-Matrizen können in Lehrbüchern der Relativistischen Quantenmechanik oder der Quantenfeldtheorie gefunden werden, z.B. in Bjorken & Drell [20] Kap. 7.2 oder in Landau & Lifschitz [5] Kap. III § 22.

(ao) H. B. G. Casimir, 1909–2000

Man sieht explizit, dass dieses gemittelte Amplitudenbetragsquadrat Lorentz-invariant ist.

Bemerkung: Ähnlich der Beziehung (IX.11) kann man auch deren Pendant

$$\sum_{\sigma=\pm} \bar{v}(\vec{p},\sigma) M v(\vec{p},\sigma) = \mathrm{Tr}\big[M\big(\not{p} - m\mathbb{1}_4\big)\big] \tag{IX.11}$$

für jede beliebige 4×4-Matrix M beweisen.

IX.3.2 Mott- und Rutherford-Formel

Als letzter Schritt kann der Ausdruck (IX.10) in Gl. (VII.16) eingesetzt werden, um den differentiellen Wirkungsquerschnitt für den elastischen Prozess der Abb. IX.2 zu liefern:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} \frac{\big\langle\big|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})\big|^2\big\rangle}{(E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2})^2}. \tag{IX.12}$$

Die Berechnung im allgemeinen Fall stellt keine Schwierigkeit dar, es lohnt sich aber, den Grenzfall der Streuung des Elektrons an einem viel schwereren Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen zu betrachten, entsprechend dem Limes $m_\mu \to \infty$.

In diesem Grenzfall kann man in einem ersten Schritt annehmen, dass das Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen — in dem Gl. (IX.12) gilt — mit dem Ruhesystem des „Myons“ übereinstimmt. Diese Näherung ist gerechtfertigt, falls die (kinetische) Energie des Elektrons viel kleiner als die Massenenergie des Myons ist. Dann kann der Rückstoß des Letzteren vernachlässigt werden, d.h. es ruht noch nach dem Stoß.[39]

Unter diesen Annahmen reduziert sich die Energieerhaltung einfach auf $E_{\vec{p}_1} = E_{\vec{p}_3}$ und daher auf die Erhaltung der kinetischen Energie des Elektrons, was zu $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3|$ führt. Somit ist der zweite Faktor im rechten Glied der Gl. (IX.12) gleich 1. Dazu gilt $(\mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_3)^2 = -(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = -4|\vec{p}_1|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$, wobei θ der Streuwinkel ist.

Die sechs skalaren Produkte $\mathsf{p}_i \cdot \mathsf{p}_j$ in Gl. (IX.10) lassen sich auch sofort berechnen. Da das Myon immer in Ruhe bleibt, sind alle Produkte des Viererimpulses des Elektrons vor oder nach dem Stoß mit einem Viererimpuls des Myons einfach gleich $m_\mu E_{\vec{p}_1}$. Dann gilt $\mathsf{p}_2 \cdot \mathsf{p}_4 = m_\mu^2$. Schließlich kommt $\mathsf{p}_1 \cdot \mathsf{p}_3 = m_e^2 + 2|\vec{p}_1|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$.

Die letzte Vereinfachung besteht in der Approximation der Schwerpunktsenergie $E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2}$ durch $E_{\vec{p}_2} = m_\mu$.[40] Dann führen Gl. (IX.10) und (IX.12) zu

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega} \underset{m_\mu\to\infty}{\simeq} \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{\langle|\mathcal{M}(\{\vec{p}_i\})|^2\rangle}{m_\mu^2} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{1}{m_\mu^2} \frac{8e^4}{\big(-4|\vec{p}_1|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\big)^2} \bigg(2m_\mu^2 E_{\vec{p}_1}^2 - 2m_\mu^2 |\vec{p}_1|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\bigg).$$

Unter Verwendung der Energie–Impuls-Beziehung für das einlaufende Elektron ergibt sich die sog. *Mott-Streuformel*

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega} \underset{m_\mu\to\infty}{\simeq} \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{e^4}{|\vec{p}_1|^4 \sin^4\frac{\theta}{2}} \bigg(m_e^2 + |\vec{p}_1|^2 \cos^2\frac{\theta}{2}\bigg) = \frac{\alpha_{\mathrm{em}}^2}{4|\vec{p}_1|^4 \sin^4\frac{\theta}{2}} \bigg(m_e^2 + |\vec{p}_1|^2 \cos^2\frac{\theta}{2}\bigg). \tag{IX.13}$$

Falls das einlaufende Elektron nicht-relativistisch ist, so dass der Betrag dessen Impuls $|\vec{p}_1|$ viel kleiner als m_e ist, lautet dieser Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega} \simeq \left(\frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{2m_e|\vec{v}_1|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2, \tag{IX.14}$$

wobei $\vec{v}_1$ die Geschwindigkeit des einlaufenden Elektrons ist. Dies ist gerade die *Rutherford-Formel* für die Streuung eines nicht-relativistischen klassischen — d.h. insbesondere ohne Spin — geladenen Teilchens in dem Coulomb-Feld eines festen Streuzentrums.

[39] Dabei werden Terme von relativer Ordnung $|\vec{p}_1|/m_\mu$ oder $|\vec{p}_3|/m_\mu$ weggelassen, konsistent mit der Annahme.
[40] … unter Vernachlässigung der Energie des Elektrons $E_{\vec{p}_1} = \sqrt{m_e^2 + |\vec{p}_1|^2}$.