

# KAPITEL VIII

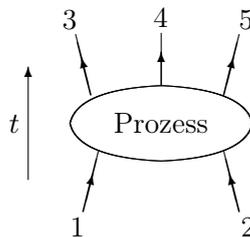
## Feynman-Regeln

VIII.1 Feynman-Diagramme und -Regeln 61

VIII.2 Beispiele 64

In den zwei letzten Kapiteln über Zerfälle (Kap. [VI](#)) und Streuprozesse (Kap. [VII](#)) wurden ähnliche Ausdrücke für die Größen (Zerfallsrate bzw. Wirkungsquerschnitt) hergeleitet, die die Wahrscheinlichkeit für den jeweiligen Prozess charakterisieren. Dabei treten insbesondere im Integranden eines Phasenraumintegrals sog. „Amplituden“  $\mathcal{M}$  bzw. deren Betragsquadrate  $|\mathcal{M}|^2$  auf, die ohne weitere Erklärung eingeführt wurden und von den tatsächlich aktiven Wechselwirkungen abhängen sollen.

Betrachte den Übergang, induziert durch einen Wechselwirkungsterm, zwischen einem Anfangs- und einem Endzustand, die aus beliebig vielen ein- und auslaufenden Teilchen mit bestimmten Viererimpulsen und Spins bestehen, wie z.B. in Abb. [VIII.1](#) schematisch dargestellt wird.



**Abbildung VIII.1** – Schematische Darstellung eines Prozesses mit zwei Teilchen im Anfangszustand und drei Teilchen im Endzustand.

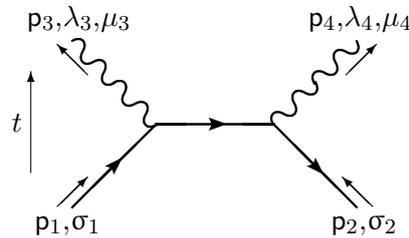
Zur Berechnung der Amplitude  $\mathcal{M}$  für einen solchen gegebenen quantenfeldtheoretischen Prozess wurde ein günstiger Formalismus entwickelt, der auf einer intuitiven graphischen Darstellung basiert. In diesem kurzen Kapitel werden diese sog. Feynman-Diagramme und die damit einhergehenden Feynman-Regeln ohne Beweis eingeführt.<sup>(31)</sup>

### VIII.1 Feynman-Diagramme und -Regeln

Zu einer gegebenen Ordnung in Störungsrechnung — entsprechend der Potenz des Wechselwirkungsterms in der Reihenentwicklung des Zeitentwicklungsoperators, vgl. § [VI.2.2 b](#) — lässt sich die Amplitude  $\mathcal{M}$  als Summe von Teilamplituden schreiben. Jeder Teilamplitude kann ein *Feynman-Diagramm* zugeordnet werden, das aus drei Arten von elementaren Bausteinen besteht: solche Diagramme enthalten immer *externe Linien* mit einem freien Endpunkt und *Vertices*, wo sich drei oder mehr Linien treffen; möglicherweise gibt es auch *interne Linien*, auch *Propagatoren* genannt, zwischen zwei Vertices.

<sup>(31)</sup>Enttäuschte Leserinnen können sich mit dem Gedanken trösten, dass R.Feynman selbst „seine“ Regeln für quantenelektrodynamische Prozesse nicht hergeleitet, sondern genial intuitiert hat.

Als Beispiel wird in Abb. VIII.2 ein Feynman-Diagramm für den (quantenelektrodynamischen) Annihilationsprozess  $e^-(\mathbf{p}_1, \sigma_1) + e^+(\mathbf{p}_2, \sigma_2) \rightarrow \gamma(\mathbf{p}_3, \lambda_3) + \gamma(\mathbf{p}_4, \lambda_4)$  abgebildet, wobei  $\mathbf{p}_i$ ,  $\sigma_i$  bzw.  $\lambda_i$  die jeweiligen Viererimpulse, Helizitäten bzw. Polarisierungen der ein- und auslaufenden Teilchen sind. Dazu sind  $\mu_3, \mu_4$  Lorentz-Indizes, deren Bedeutung hiernach erklärt wird.



**Abbildung VIII.2** – Feynman-Diagramm für Elektron-Positron-Annihilation zur führenden Ordnung.

Ein solches Diagramm darf nicht als Darstellung einer Folge von Ereignissen in der Raumzeit interpretiert werden. Insbesondere bedeutet der mit  $t$  versehene Pfeil links nur, dass die externen Linien 1 und 2 unten bzw. 3 und 4 oben für die ein- bzw. auslaufenden Teilchen stehen.

Jeder Baustein eines Feynman-Diagramms entspricht einem multiplikativen Beitrag zur Teilamplitude, gegeben durch die *Feynman-Regeln*, die jetzt formuliert werden.

### ① Externe Linien

Diese stellen die ein- und auslaufenden Teilchen dar, wobei der freie Endpunkt dem asymptotisch freien Anfangs- bzw. Endzustand bei  $t \rightarrow -\infty$  bzw.  $t \rightarrow +\infty$  entspricht. Jede solche Linie wird durch den Viererimpuls des Teilchens gekennzeichnet, sowie, im Fall von Spin- $\frac{1}{2}$ - bzw. Spin-1-Teilchen, durch die zugehörige Helizität  $\sigma$  bzw. Polarisation  $\lambda$ .

Je nach der Art des Teilchens werden verschiedene Typen von Linien benutzt, die wiederum verschiedenen Beiträgen zur Amplitude entsprechen:

$\overleftarrow{\text{-----}}^{\mathbf{p}}$  für ein Spin-0-Teilchen mit Viererimpuls  $\mathbf{p}$ .  
Dies gibt einen Faktor 1 in der Amplitude.

$\overrightarrow{\text{-----}}^{\mathbf{p}, \sigma}$  für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (z.B. ein Elektron) mit Viererimpuls  $\mathbf{p}$  und Helizität  $\sigma$ .  
Für ein einlaufendes Teilchen ist der Beitrag zur Amplitude gleich  $u(\vec{\mathbf{p}}, \sigma)$ ;  
für ein auslaufendes Teilchen ist der Beitrag zur Amplitude gleich  $\bar{u}(\vec{\mathbf{p}}, \sigma)$ .

$\overleftarrow{\text{-----}}^{\mathbf{p}, \sigma}$  für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Antiteilchen (z.B. ein Positron) mit Viererimpuls  $\mathbf{p}$  und Helizität  $\sigma$ .  
Für ein einlaufendes Antiteilchen ist der Beitrag zur Amplitude gleich  $\bar{v}(\vec{\mathbf{p}}, \sigma)$ ;  
für ein auslaufendes Antiteilchen ist der Beitrag zur Amplitude gleich  $v(\vec{\mathbf{p}}, \sigma)$ .

$\text{~~~~~}^{\mathbf{p}, \lambda, \mu}$  für ein Spin-1-Teilchen (z.B. ein Photon) mit Viererimpuls  $\mathbf{p}$  und Polarisation  $\lambda$ .  
Dies gibt einen Faktor  $\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\vec{\mathbf{p}})$  in der Amplitude.

### Bemerkungen:

\* Äußere Linien stehen für on-Shell-Teilchen bzw. -Antiteilchen, so dass die Angabe des Impulses  $\vec{\mathbf{p}}$  und der Masse  $m$  — je nach der Teilchenart: Elektron, Myon, Neutrino, Photon... — die Energie und somit den Viererimpuls vollständig festlegt.

\* Der Pfeil auf den für Spin- $\frac{1}{2}$ -(Anti)Teilchen stehenden Linien gibt an, welche Teilchen und welche Antiteilchen sind: bei den Ersteren propagieren die Ladungen in die gleiche Richtung wie der Viererimpuls, bei den Letzteren propagieren sie rückwärts.

Die Linien für Spin-0- oder Spin-1-Teilchen können natürlich auch mit solchen Pfeilen versehen werden, falls die Teilchen eine erhaltene Ladung tragen. Im Fall der Bosonen des Standardmodells werden jene Pfeile traditionell nicht geschrieben.

\* In diesem Skript wurde angenommen, dass Polarisationsvektoren reell sind [vgl. Gl. (III.12)]. Man darf auch komplexwertige Polarisationsvektoren betrachten. In jenem Fall ist der Faktor in der Amplitude  $\varepsilon_{(\lambda)}^{\mu}(\vec{p})$  für ein einlaufendes Spin-1-Teilchen und  $\varepsilon_{(\lambda)}^{\mu*}(\vec{p})$  für ein auslaufendes Teilchen.

## ② Vertices

Vertices stellen die Punkte dar, wo Teilchen miteinander wechselwirken. Dabei hat man, je nach dem Wechselwirkungsterm im Hamilton-Operator, 3-Teilchen-Vertices, 4-Teilchen-Vertices, usw.

In § VI.2.2b wurde gezeigt, dass die Reihenentwicklung des quantenmechanischen Zeitentwicklungsoperators  $\hat{U}_I(t, t_0)$  nach Potenzen der Wechselwirkung Terme der Form

$$-\frac{i}{\hbar} \int g \hat{V}_I(t') dt'$$

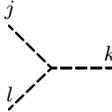
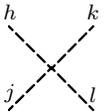
liefert. In einer quantentheoretischen Beschreibung, die auf einer Lagrange-Formulierung basiert, lauten diese Terme

$$\frac{i}{\hbar} \int \hat{\mathcal{L}}_I dt' d^3\vec{x}',$$

wobei  $\hat{\mathcal{L}}_I$  der Wechselwirkungsterm (im Wechselwirkungsbild) in der Lagrange-Dichte ist. Der Letztere ist allgemein ein Polynom in den Feldoperatoren der an der Wechselwirkung teilnehmenden Teilchen, wie z.B. für Teilchen mit Spin 0

$$\hat{\mathcal{L}}_I = g_{jkl} \hat{\phi}_j \hat{\phi}_k \hat{\phi}_l + g_{hijkl} \hat{\phi}_h \hat{\phi}_j \hat{\phi}_k \hat{\phi}_l + \dots \quad (\text{VIII.1})$$

Dann schreibt man für jeden Vertex des Feynman-Diagramms einfach einen Faktor  $ig$ , wobei die *Kopplungskonstante*  $g$  der passende Koeffizient des Polynoms ist. Im Beispiel der obigen Lagrange-Dichte (VIII.1) lautet der Beitrag zur Teilamplitude

- für jeden 3-Teilchen-Vertex  kommt ein Faktor  $ig_{jkl}$ ;
- für jeden 4-Teilchen-Vertex  kommt ein Faktor  $ig_{hijkl}$ , usw.

**Bemerkung:** Zum konstanten multiplikativen Faktor können neben der Kopplung  $g$  noch Matrizen beitragen, falls solche im Wechselwirkungsterm  $\hat{\mathcal{L}}_I$  auftauchen, wie insbesondere Dirac-Matrizen (z.B. im Fall der Quantenelektrodynamik, s. Kap. ??).

## ③ Interne Linien

Eine günstige doch schnell irreführende Interpretation einer solchen Linie ist, dass sie das Propagieren von irgendeinem (Anti)Teilchen zwischen zwei Wechselwirkungspunkten beschreiben. Jenes (Anti)Teilchen hätte dann die gleiche Masse  $m$  und die gleichen Quantenzahlen (Spin, Ladungen...) wie das entsprechende „reale“ Teilchen, das im Anfangs- oder Endzustand auftreten kann.

Dagegen hat es keinen Helizitäts- oder Polarisationszustand — in den hiernach angegebenen Propagatoren wird schon über alle Möglichkeiten summiert. Dazu trägt es einen Viererimpuls  $\mathbf{q}$ , der die Energie-Impuls-Beziehung  $\mathbf{q}^2 = m^2 c^2$  nicht erfüllen soll: es ist „off-Shell“. Somit wird das Ding, das man mit einer inneren Linie assoziiert, als *virtuelles (Anti)Teilchen* bezeichnet.

Hiernach werden die verschiedenen internen Linien je mit der zugehörigen Form des Propagators dargestellt. In jedem Fall bezeichnet  $m$  die Masse des virtuellen (Anti)Teilchens.

$$\text{---}\overset{\vec{q}}{\text{---}}\text{---} \quad (\text{Spin-0-Teilchen}) \quad \text{entspricht dem Propagator} \quad \frac{i}{q^2 - m^2 c^2}. \quad (\text{VIII.2a})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{---}\overset{\vec{q}}{\text{---}}\text{---} \quad (\text{Spin-}\frac{1}{2}\text{-Teilchen}) \quad \text{und} \\ \text{---}\overset{\vec{q}}{\text{---}}\text{---} \quad (\text{Spin-}\frac{1}{2}\text{-Antiteilchen}) \end{array} \right\} \text{entsprechen dem Propagator} \quad \frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2 c^2}. \quad (\text{VIII.2b})$$

$$\overset{\mu}{\text{---}}\overset{\vec{q}}{\text{---}}\overset{\nu}{\text{---}} \quad (\text{Spin-1-Teilchen}) \quad \text{entspricht dem Propagator} \quad \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2 - m^2 c^2}. \quad (\text{VIII.2c})$$

Alle diese Propagatoren tragen multiplikativ zur Amplitude  $\mathcal{M}$  bei.

#### ④ Energie-Impuls-Erhaltung

An jedem Vertex muss der Viererimpuls erhalten sein. Diese Bedingung schränkt die möglichen Werte der Viererimpulse von vielen internen Linien ein. Hier soll die globale Viererimpulserhaltung zwischen Anfangs- und Endzustand benutzt werden.

#### ⑤ Integration über die Viererimpulse der internen Linien

Über jedem internen Viererimpuls  $q$ , der im vorigen Schritt ④ nicht festgelegt wurde, soll jetzt mit dem Integrationsmaß  $d^4q/(2\pi)^4$  integriert werden.

**Bemerkung:** Hier erkennt man, dass die Propagatoren keine on-Shell, sondern off-Shell-Teilchen darstellen: die zeitliche Komponente  $q^0$  hängt *nicht* mit den räumlichen zusammen [vgl. Gl. (VI.21)], sondern kann alle reellen — auch negativen — Werte annehmen.

#### ⑥ Antisymmetrisierung (1)

Für jede geschlossene Fermion-Schleife eines gegebenen Feynman-Diagramms wird die Teilamplitude mit  $(-1)$  multipliziert. Dazu soll man die Spur des entsprechenden Produkts von Gamma-Matrizen — die in der Slash-Notation im Propagator (VIII.2c) versteckt sind — bilden.

#### ⑦ Gesamtphase

Das Ergebnis der Schritte ① bis ⑥ wird jetzt noch mit einem Faktor  $i$  multipliziert, was die endgültige Teilamplitude  $\mathcal{M}$  liefert. Dies hat natürlich keinen Einfluss auf  $|\mathcal{M}|^2$ , ist aber eine übliche Konvention.

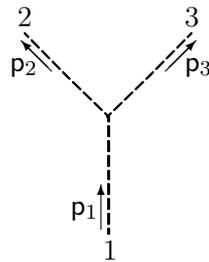
Jetzt sollen alle Teilamplituden, die bis zu einer gegebenen Ordnung in den Kopplungskonstanten vorkommen, summiert werden, um die gesamte Amplitude zu erhalten. Dabei kommt ein letzter Schritt, falls es zwei identische ein- oder auslaufende Fermionen gibt:

#### ⑧ Antisymmetrisierung (2)

Zwei Diagramme, die sich nur durch Austausch von zwei externen Fermionen unterscheiden, sollen nicht addiert, sondern subtrahiert werden, d.h. eines davon soll mit einem Minuszeichen versehen werden.

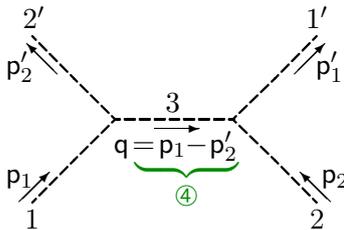
## VIII.2 Beispiele

Jetzt werden drei Beispiele von Feynman-Diagrammen sowie die zugehörigen Amplituden  $\mathcal{M}$  angegeben, und zwar für den Fall einer Theorie skalarer Teilchen der Arten 1, 2 und 3 mit jeweiligen Massen  $m_1, m_2, m_3$ , die untereinander über den Term  $\hat{\mathcal{L}}_1 = -g\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3$  in der Lagrange-Dichte wechselwirken. Somit treten in dieser Theorie nur Drei-Teilchen-Vertices mit je einem Teilchen von jeder Art auf.

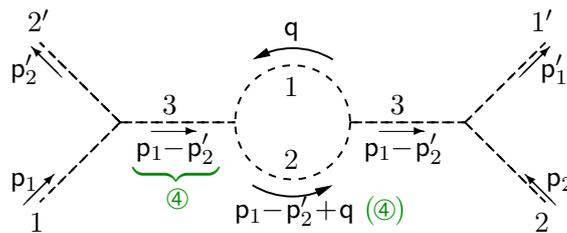
**Beispiel 1: Zerfallsprozess  $1 \rightarrow 2 + 3$** 

$$\mathcal{M} = \underbrace{(-ig)}_{\textcircled{2}} \underbrace{(i)}_{\textcircled{7}} = g$$

Hier und in den zwei folgenden Beispielen werden die aus den äußeren Linien kommenden trivialen Faktoren 1 vom Schritt ① nicht geschrieben.

**Beispiel 2: elastischer Streuprozess  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$** 

$$\mathcal{M} = \underbrace{(-ig)^2}_{\textcircled{2}} \underbrace{\frac{i}{(p_1 - p_2')^2 - m_3^2 c^2}}_{\textcircled{3 \& 4}} \underbrace{(i)}_{\textcircled{7}} = \frac{g^2}{(p_1 - p_2')^2 - m_3^2 c^2}$$

**Beispiel 3: elastischer Streuprozess  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$** 

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \underbrace{(-ig)^4}_{\textcircled{2}} \underbrace{\left[ \frac{i}{(p_1 - p_2')^2 - m_3^2 c^2} \right]^2}_{\textcircled{3 \& 4}} \int \frac{i}{q^2 - m_1^2 c^2} \frac{i}{(p_1 - p_2' + q)^2 - m_2^2 c^2} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \underbrace{(i)}_{\textcircled{7}} \\ &= ig^4 \frac{1}{[(p_1 - p_2')^2 - m_3^2 c^2]^2} \int \frac{1}{(q^2 - m_1^2 c^2) [(p_1 - p_2' + q)^2 - m_2^2 c^2]} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \end{aligned}$$

Somit stellt dieses Feynman-Diagramm einen Beitrag der Ordnung  $\mathcal{O}(g^4)$  zur Amplitude für den Streuprozess.

**Bemerkungen:**

\* Die Anzahl der Vertices entspricht der Ordnung in Störungsrechnung der Teilamplitude unter Betrachtung. Wenn man nach der Amplitude bis zur einer gegebenen Ordnung  $k$  sucht, dann soll man nur die Diagramme mit  $k' \leq k$  Vertices zeichnen.

\* Falls es Fermionen gibt, ist die Anordnung der Beiträge der dazugehörigen Vertices und Propagatoren zu einer Teilamplitude nicht beliebig — sie involvieren nämlich Dirac-Matrizen, deren Produkt nicht kommutativ ist. Dies wird in Abschn. ?? am Beispiel der Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik weiter detailliert.

\* Regel ④ für die Viererimpulserhaltung an den Vertices wird manchmal anders angegeben, z.B. in Griffiths [8], Kap. 6.3: mit jedem Vertex sollte ein Faktor  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\dots)$  assoziiert werden, wobei

die Auslassungspunkte für die algebraische Summe der Viererimpulse an dem Vertex stehen, z.B.  $\dots = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2 - \mathbf{q}$  für den Vertex links im Beispiel 2 oben. Dann bleiben viel mehr interne Viererimpulse, die im Schritt ⑤ integriert werden. Nach jenem Schritt gibt es aber noch einen Faktor  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \mathbf{p}_{\text{aus}} - \sum \mathbf{p}_{\text{ein}})$  für die globale Viererimpulserhaltung zu viel, der von Hand gelöscht werden muss. Die globale Viererimpulserhaltung ist nämlich schon in der Phasenraumintegration nach den auslaufenden Impulsen berücksichtigt.

## Literatur zum Kapitel VIII

- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 6.3.