VII.2 Berechnung des Wirkungsquerschnitts

Ähnlich der Zerfallsrate in Abschn. VI.2 lässt sich der Wirkungsquerschnitt mithilfe von Fermis Goldener Regel schreiben. Somit beruht der totale Wirkungsquerschnitt auf dem Phasenraumintegral einer Amplitude zum Quadrat über die Impulse der auslaufenden Teilchen (§ VII.2.1). Dieses Integral wird mit einem Vorfaktor multipliziert, dem sog. Flussfaktor, der in § VII.2.2 diskutiert wird. Wenn es nur zwei Teilchen im Endzustand kann das Phasenraumintegral weitgehend ohne Kenntnisse über die zugrundeliegende Wechselwirkung durchgeführt werden (§ VII.2.3), woraus der differentielle Wirkungsquerschnitt folgt.

VII.2.1 Fermis Goldene Regel für Streuprozesse

Betrachte z.B. den Zwei-nach-zwei-Prozess $a + b \to 1 + 2$, wobei die Teilchen die jeweiligen Viererimpulse p_a, p_b, p_1, p_2 haben. Der Einfachheit halber werden einige Annahmen gemacht: erstens sollen die zwei einlaufenden bzw. die zwei auslaufenden Teilchen nicht identisch sein. Dann haben sie alle den Spin 0. Schließlich gibt es mindestens ein massives Teilchen im Anfangszustand, z.B. Teilchen b.

Die einlaufenden Teilchen werden durch einen Zustandsvektor $|a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b)\rangle$ beschrieben, der sich durch Anwendung von geeigneten Erzeugungsoperatoren auf den Vakuumzustand erhalten lässt. Dieser Zustandsvektor ist auf

$$\langle a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b) | a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b)\rangle = [\delta^{(3)}(\vec{0})]^2 = \left[\frac{\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3}\right]^2 \tag{VII.6}$$

normiert. Wiederum wird den auslaufenden Teilchen ein Endzustand $\langle 1(\vec{p}_1), 2(\vec{p}_2)|$ assoziiert. Beide Anfangs- und Endzustand sind Eigenzustände eines wechselwirkungsfreien Hamilton-Operators $\hat{H}_0$.

Der Prozess unter Berücksichtigung erfolgt aus dem Einschalten eines zusätzlichen Wechselwirkungsterms $g\hat{V}(t)$ im Hamilton-Operator, mit

$$g\hat{V}_{\rm I}(t) \equiv \int \frac{\mathcal{M}}{\hbar c}\, \hat{\phi}_a(t,\vec{x})\, \hat{\phi}_b(t,\vec{x})\, \hat{\phi}_1(t,\vec{x})\, \hat{\phi}_2(t,\vec{x})\, {\rm d}^3\vec{x}, \tag{VII.7}$$

wobei die komplexwertige *Amplitude* $\mathcal{M}$ zeit- und ortsunabhängig ist, während $\hat{\phi}_i(\mathsf{x})$ für $i = a, b, 1, 2$ den mit Teilchen i assoziierten Klein–Gordon-Feldoperator bezeichnet.

Zur ersten nicht-trivialen Ordnung in Störungsrechnung lautet das *Streumatrixelement* (VI.2) zwischen Anfangs- und Endzustand [vgl. (VI.16)]

$$S_{\rm fi} = \frac{1}{{\rm i}\hbar}\big\langle 1(\vec{p}_1), 2(\vec{p}_2)\big| \int \frac{\mathcal{M}}{\hbar c}\, \hat{\phi}_a(t,\vec{x})\, \hat{\phi}_b(t,\vec{x})\, \hat{\phi}_1(t,\vec{x})\, \hat{\phi}_2(t,\vec{x})\, {\rm d}^3\vec{x}\ {\rm d}t\, \big|\, a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b)\big\rangle.$$

Drückt man die Feldoperatoren durch die zugehörigen Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren aus, so findet man, dass die Wirkung von $\hat{\phi}_i(\mathsf{x})$ für $i = a$ oder b bzw. $i = 1$ oder 2 auf den Anfangszustand bzw. Endzustand einen Term $\hbar c\, {\rm e}^{-{\rm i}\mathsf{p}_i\cdot\mathsf{x}/\hbar}/\sqrt{(2\pi\hbar)^3\, 2E_{\vec{p}_i}}$ bzw. $\hbar c\, {\rm e}^{+{\rm i}\mathsf{p}_i\cdot\mathsf{x}/\hbar}/\sqrt{(2\pi\hbar)^3\, 2E_{\vec{p}_i}}$ liefert, so dass schließlich

$$S_{\rm fi} = \frac{1}{{\rm i}\hbar}\int \frac{(\hbar c)^3 \mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3\, 2E_{\vec{p}_a}}\sqrt{(2\pi\hbar)^3\, 2E_{\vec{p}_b}}\sqrt{(2\pi\hbar)^3\, 2E_{\vec{p}_1}}\sqrt{(2\pi\hbar)^3\, 2E_{\vec{p}_2}}}\, {\rm e}^{{\rm i}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p}_a-\mathsf{p}_b)\cdot\mathsf{x}/\hbar}\, {\rm d}^3\vec{x}\ {\rm d}t.$$

Die Integration nach Raum und Zeit gibt dann

$$S_{\rm fi} = -{\rm i}\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p}_a-\mathsf{p}_b)\, \frac{c^2\, \mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_a}}\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_b}}\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_1}}\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_2}}}. \tag{VII.8}$$

Dieser Ausdruck des Streumatrixelements hat die gleiche Struktur wie in Gl. (VI.17), und insbesondere berücksichtigt automatisch die Energie–Impuls-Erhaltung.

Bildet man nun das Betragsquadrat dieses Streumatrixelements, so ergibt sich

$$|S_{\rm fi}|^2 = (2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p}_a-\mathsf{p}_b)\, (2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\, \frac{c^4 |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_a}\, (2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_b}\, (2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_1}\, (2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_2}}.$$

Dabei ist $(2\pi)^4\delta^{(4)}(0)$ gleich $1/\hbar^4$ mal dem Raumzeitvolumen $\mathcal{V}cT$, in dem die ein- und auslaufenden Teilchen propagieren.

$|S_{\rm fi}|^2$ stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass der Anfangszustand $|a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b)\rangle$ nach einer Zeitspanne T in den Endzustand $\langle 1(\vec{p}_1), 2(\vec{p}_2)|$ übergeht. Um die entsprechende Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und für ein einziges Paar von einlaufenden Teilchen zu erhalten, soll man noch $|S_{\rm fi}|^2$ durch T und durch die Normierung (VII.6) des Anfangszustands teilen. Somit lautet die Anzahl der pro Zeiteinheit mit Impulsen $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ auslaufenden Teilchen

$$\frac{{\rm d}^7 N_{\rm aus}(\vec{p}_1,\vec{p}_2)}{{\rm d}t\, {\rm d}^3\vec{p}_1\, {\rm d}^3\vec{p}_2} = \frac{\hbar^2 c^3}{\mathcal{V}}\, \frac{1}{4E_{\vec{p}_a}\, E_{\vec{p}_b}} (2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p}_a-\mathsf{p}_b)\, \frac{c^2|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_1}\, (2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_2}}. \tag{VII.9}$$

Aus der Integration dieser Formel über die passenden Variablen lassen sich Ausdrücke für den differentiellen und den totalen Wirkungsquerschnitt herleiten.

Dabei ist der Letztere zunächst einfacher zu erhalten, zumindest formell. Integriert man die Anzahl (VII.9) über alle möglichen Werte der auslaufenden Impulse, so ergibt sich die Anzahl der pro Zeiteinheit auslaufenden Teilchen 1 und 2

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{aus}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar^2 c^3}{\mathcal{V}} \frac{1}{4E_{\vec{p}_a}E_{\vec{p}_b}} \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 - \mathsf{p}_a - \mathsf{p}_b) \left|\mathcal{M}\right|^2 \frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_2}}.$$

Diese Anzahl ist über Beziehung (VII.4) mit dem totalen Wirkungsquerschnitt und der Luminosität verknüpft. Um die Letztere zu ermitteln, kann man ins Ruhesystem von Teilchen b gehen — dank der Annahme, dass Teilchen b nicht masselos ist. In diesem Bezugssystem gilt $E_{\vec{p}_b} = m_b c^2$, während die Luminosität gemäß Gl. (VII.5) gleich $\mathcal{L}_{\mathrm{ein}} = \left|\vec{v}_a\right|/\mathcal{V}$ ist, wobei $\vec{v}_a$ die Geschwindigkeit von Teilchen a im gewählten Bezugssystem bezeichnet. Dies gibt für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{\hbar^2 c}{4\left|\vec{v}_a\right| E_{\vec{p}_a} m_b} \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 - \mathsf{p}_a - \mathsf{p}_b) \left|\mathcal{M}\right|^2 \frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_2}}. \qquad \text{(VII.10)}$$

Diese Formel stellt wieder ein Beispiel von Fermis Goldener Regel dar.

Wie schon oben erwähnt wurde, soll der totale Wirkungsquerschnitt Lorentz-invariant sein. Während das Integral deutlich Lorentz-invariant ist — vorausgesetzt dies auch für $\left|\mathcal{M}\right|^2$ gilt, was hier ohne Beweis angenommen wird —, ist es für der Vorfaktor nicht sofort klar. Somit wird der Letztere im nächsten Abschnitt genauer untersucht.

VII.2.2 Lorentz-invariante Form des totalen Wirkungsquerschnitts

Das im Nenner des Vorfaktors des totalen Wirkungsquerschnitts (VII.10) auftretende Produkt $4\left|\vec{v}_a\right| E_{\vec{p}_a} m_b/c$, wobei $\vec{v}_a$ und $E_{\vec{p}_a}$ im Ruhesystem des Teilchens b gemessen werden, wird (*Møller*[ad]-) *Flussfaktor* genannt und hiernach als $\mathcal{F}$ bezeichnet.

In einem beliebigen Bezugssystem, in welchem die Viererimpulse der kollidieren Teilchen p_a und p_b sind, gilt

$$\boxed{\mathcal{F} = 4\sqrt{(\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4}.} \qquad \text{(VII.11)}$$

Diese Formel definiert offensichtlich eine Lorentz-invariante Größe.

Beweis: Da $\mathcal{F}$ ein Lorentz-Skalar ist, muss man nur prüfen, dass der Ausdruck (VII.11) tatsächlich gleich $4\left|\vec{v}_a\right| E_{\vec{p}_a} m_b/c$ ist. Im Ruhesystem vom Teilchen b, wo $\vec{p}_b = \vec{0}$ und $E_{\vec{p}_b} = m_b c^2$ gelten, findet man sofort $\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b = E_{\vec{p}_a} m_b$ und somit

$$(\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4 = \left(E_{\vec{p}_a}^2 - m_a^2 c^4\right) m_b^2 = |\vec{p}_a|^2 c^2 m_b^2.$$

Unter Verwendung der Beziehung $\vec{v}_a = c^2 \vec{p}_a / E_{\vec{p}_a}$ ergibt sich

$$(\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4 = \frac{|\vec{v}_a|^2}{c^2} E_{\vec{p}_a}^2 m_b^2$$

d.h. $\mathcal{F} = 4|\vec{v}_a| E_{\vec{p}_a} m_b/c$. □

Ein alternativer nützlicher Ausdruck des Flussfaktors beruht auf der Mandelstam-Variablen s, Gl. (V.4). Somit kann man schreiben

$$\mathcal{F} = 2\sqrt{\left(s - m_a^2 - m_b^2\right)^2 - 4m_a^2 m_b^2}\, c^2. \qquad \text{(VII.12)}$$

Diese Formel folgt sofort aus der Gleichung

$$4(\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b)^2 = (2\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b)^2 = \left[(\mathsf{p}_a + \mathsf{p}_b)^2 - \mathsf{p}_a^2 - \mathsf{p}_b^2\right]^2 = \left(s - m_a^2 - m_b^2\right)^2 c^4.$$

[ad] C. Møller, 1904–1980

Für die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts im nächsten Abschnitt wird es sich auch lohnen, den Ausdruck des Møller-Flussfaktors durch die kinetischen Größen im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen zu kennen. In diesem Bezugssystem findet man

$$\mathcal{F} = \frac{4(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})|\vec{p}_a|}{c} \quad \text{im Schwerpunktsystem der Teilchen } a \text{ und } b. \tag{VII.13}$$

Dabei kann die Summe $E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b}$ auch durch die Schwerpunktsenergie $E_{\rm cm}$ ersetzt werden.

Im Schwerpunktsystem gilt $\vec{p}_b = -\vec{p}_a$, was sofort zu $\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b = E_{\vec{p}_a} E_{\vec{p}_b}/c^2 + |\vec{p}_a|^2$ führt. Somit ergibt sich $(\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b)^2 = E^2_{\vec{p}_a} E^2_{\vec{p}_b}/c^4 + |\vec{p}_a|^4 + 2E_{\vec{p}_a} E_{\vec{p}_b} |\vec{p}_a|^2/c^2$, und unter Verwendung der Energie–Impuls-Relation $E^2_{\vec{p}_i}/c^2 = |\vec{p}_i|^2 + m_i^2 c^2$ für beide Teilchen

$$\begin{aligned}(\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4 &= 2|\vec{p}_a|^4 + |\vec{p}_a|^2 \big(m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2E^2_{\vec{p}_a} E^2_{\vec{p}_b}/c^2\big)\\ &= |\vec{p}_a|^2 \big(|\vec{p}_a|^2 + |\vec{p}_b|^2 + m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2E^2_{\vec{p}_a} E^2_{\vec{p}_b}/c^2\big)\\ &= |\vec{p}_a|^2 \big(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b}\big)^2/c^2. \qquad \square\end{aligned}$$

Zusammen liefern Gl. (VII.10) und (VII.11) den Ausdruck des totalen Wirkungsquerschnitts für einen Zwei-nach-zwei-Streuprozess

$$\boxed{\sigma_{\rm tot} = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{(\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4}} \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 - \mathsf{p}_a - \mathsf{p}_b) \big|\mathcal{M}\big|^2 \frac{c\, \mathrm{d}^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c\, \mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_2}}.} \tag{VII.14}$$

Dieses Ergebnis kann auf den Fall des totalen Wirkungsquerschnitts für eine Streuung mit n Teilchen (gekennzeichnet 1, 2, ..., n) im Endzustand verallgemeinert werden. Dann gilt

$$\sigma_{\rm tot} = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{(\mathsf{p}_a \cdot \mathsf{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^4}}\, C \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}\bigg(\sum_{i=1}^n \mathsf{p}_i - \mathsf{p}_a - \mathsf{p}_b\bigg) |\mathcal{M}|^2 \prod_{i=1}^n \frac{c\, \mathrm{d}^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_i}}, \tag{VII.15}$$

wobei C ein ähnlicher statistischer Faktor wie bei der Zerfallsrate (VI.19) ist.

VII.2.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt in einem Zwei-nach-zwei-Prozess

Im besonderen Fall einer Zwei-nach-zwei-Streuung sind die Energien und Impulse der Streuprodukte durch die Kinematik so eingeschränkt, dass der zugehörige differentielle Wirkungsquerschnitt explizit berechnet werden kann, auch wenn die Amplitude $\mathcal{M}$, die durch die Dynamik bestimmt wird, unbekannt ist.

Dies lässt sich am einfachsten im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen finden, wo definitionsgemäß $\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{0}$. Unter Verwendung des Ausdrucks (VII.13) des Flussfaktors in diesem Bezugssystem wird der „unintegrierte" Wirkungsquerschnitt — entsprechend einem Maß für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gestreuten Teilchen Impulse zwischen $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_1 + \mathrm{d}^3\vec{p}_1$ bzw. $\vec{p}_2$ und $\vec{p}_2 + \mathrm{d}^3\vec{p}_2$ haben — gegeben durch [vgl. Gl. (VII.14)]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^6\sigma(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= \frac{\hbar^2 c}{4(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})|\vec{p}_a|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 - \mathsf{p}_a - \mathsf{p}_b) \big|\mathcal{M}\big|^2 \frac{c\, \mathrm{d}^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c\, \mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_2}}\\ &= \frac{\hbar^2}{64\pi^2} \frac{|\mathcal{M}|^2 c^3}{(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})|\vec{p}_a| E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_2}} \delta^{(4)}(\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 - \mathsf{p}_a - \mathsf{p}_b)\, \mathrm{d}^3\vec{p}_1\, \mathrm{d}^3\vec{p}_2.\end{aligned}$$

Der $\delta^{(4)}$-Term kann auch als $c\,\delta(E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} - E_{\vec{p}_a} - E_{\vec{p}_b})\delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ geschrieben werden, wobei die Gleichung $\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{0}$ benutzt wurde. Dann ist das Integral über $\vec{p}_2$ trivial und gibt

$$\mathrm{d}^3\sigma(\vec{p}_1) = \frac{\hbar^2}{64\pi^2} \frac{|\mathcal{M}|^2 c^2}{(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})|\vec{p}_a|} \frac{\delta\big(\sqrt{m_1^2 c^4 + \vec{p}_1^{\,2} c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + \vec{p}_1^{\,2} c^2} - E_{\vec{p}_a} - E_{\vec{p}_b}\big)}{\sqrt{m_1^2 c^2 + \vec{p}_1^{\,2}}\,\sqrt{m_2^2 c^2 + \vec{p}_1^{\,2}}}\, \mathrm{d}^3\vec{p}_1.$$

Um dieses Ergebnis weiter zu integrieren, soll die Abhängigkeit der Amplitude $\mathcal{M}$ von den kinematischen Variablen diskutiert werden. Allgemein sollte $\mathcal{M}$ eine Funktion der Impulse der ein- und auslaufenden Teilchen sein: $\mathcal{M}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_1, \vec{p}_2)$. Im Schwerpunktsystem, wo $\vec{p}_b = -\vec{p}_a$ und dank der Impulserhaltung $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ gelten, ist $\mathcal{M}$ nur Funktion von $\vec{p}_a$ und $\vec{p}_1$. Dazu ist $\mathcal{M}$ ein Lorentz-Skalar, d.h. insbesondere invariant unter Drehungen, und kann deshalb nur von den skalaren Größen $\vec{p}_a^{\,2}$, $\vec{p}_1^{\,2}$ und $\vec{p}_a \cdot \vec{p}_1 = |\vec{p}_a||\vec{p}_1| \cos\theta$ abhängen. Zusammenfassend ist die Amplitude $\mathcal{M}$ für eine Zwei-nach-zwei-Streuung nur Funktion von $|\vec{p}_a|$, $|\vec{p}_1|$ und θ, wobei diese Größen im Schwerpunktsystem gemessen werden.

Wegen der möglichen Abhängigkeit von dem Streuwinkel θ kann die Winkelintegration nicht durchgeführt werden, im Gegensatz zum Fall des Phasenraumintegrals beim Zwei-Teilchen-Zerfall.

Für die restlichen Integrationen kann man zunächst die Substitution $\mathrm{d}^3\vec{p}_1 \to p^2\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}^2\Omega$, mit $\Omega \equiv (\theta, \varphi)$ und dementsprechend $\mathrm{d}^2\Omega = \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$, in die obige Formel für $\mathrm{d}^3\sigma(\vec{p}_1)$ einsetzen. Dann ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2} \frac{c^2}{(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})|\vec{p}_a|} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta\big(\sqrt{m_1^2c^4 + p^2c^2} + \sqrt{m_2^2c^4 + p^2c^2} - E_{\vec{p}_a} - E_{\vec{p}_b}\big)}{\sqrt{m_1^2c^2 + p^2}\,\sqrt{m_2^2c^2 + p^2}}\, p^2\, \mathrm{d}p.$$

Weiterer Fortschritt erfolgt unter Nutzung der neuen Integrationsvariablen

$$E \equiv \sqrt{m_1^2c^4 + p^2c^2} + \sqrt{m_2^2c^4 + p^2c^2},$$

entsprechend

$$\mathrm{d}E = \left(\frac{c^2}{\sqrt{m_1^2c^4 + p^2c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{m_2^2c^4 + p^2c^2}}\right) p\, \mathrm{d}p = \frac{E}{\sqrt{m_1^2c^2 + p^2}\,\sqrt{m_2^2c^2 + p^2}}\, p\, \mathrm{d}p,$$

sowie

$$p(E) = \frac{1}{2Ec}\sqrt{E^4 - 2E^2\big(m_1^2 + m_2^2\big)c^4 + \big(m_1^2 - m_2^2\big)^2 c^8}.$$

Die letztere Formel folgt aus einfachen Berechnungen. Zunächst gilt

$$E^2 = m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2p^2c^2 + 2\sqrt{m_1^2c^4 + p^2c^2}\,\sqrt{m_2^2c^4 + p^2c^2},$$

d.h.

$$\big(E^2 - m_1^2c^4 - m_2^2c^4 - 2p^2c^2\big)^2 = 4\big(m_1^2c^4 + p^2c^2\big)\big(m_2^2c^4 + p^2c^2\big).$$

Nach dem Ausmultiplizieren der Produkte auf beiden Seiten und dem Herauskürzen von ein paar Termen kommt

$$E^4 + m_1^4c^8 + m_2^4c^8 - 2E^2m_1^2c^4 - 2E^2m_2^2c^2 - 2m_1^2m_2^2c^8 = 4E^2p^2c^2,$$

woraus das Ergebnis folgt. □

Mithilfe der Integrationsvariablen E lässt dich der differentielle Wirkungsquerschnitt als

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2} \frac{c^2}{(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})|\vec{p}_a|} \int_{E_{\min}}^\infty \big|\mathcal{M}(|\vec{p}_a|, p(E), \cos\theta)\big|^2\, \delta(E - E_{\vec{p}_a} - E_{\vec{p}_b})\, \frac{p(E)}{E}\, \mathrm{d}E$$

schreiben, wobei die untere Grenze des Integrals $E_{\min} \equiv (m_1 + m_2)c^2$ ist. Damit das Argument der Delta-Funktion für einen Wert von E im Integrationsbereich verschwindet, soll $E_{\min} - E_{\vec{p}_a} - E_{\vec{p}_b} < 0$ sein. Anders gesagt soll die Schwerpunktsenergie $E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b} \equiv E_{\mathrm{cm}}$ größer sein als die Summe der Massenenergien $(m_1 + m_2)c^2$ der auslaufenden Teilchen — was eine triviale kinematische Bedingung zur Realisierbarkeit des Prozesses ist. In diesem Fall kann die Integration leicht durchgeführt werden, und es ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2} \frac{c^2}{E_{\mathrm{cm}}\,|\vec{p}_a|} \frac{p(E_{\mathrm{cm}})}{E_{\mathrm{cm}}} \big|\mathcal{M}(|\vec{p}_a|, p(E_{\mathrm{cm}}), \cos\theta)\big|^2.$$

Dabei stellt $p(E_{\rm cm})$ den Wert des Impulsbetrags $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ dar, bei dem die Dirac-Distribution für die Energie-Impuls-Erhaltung realisiert wird. Somit lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Prozess $a + b \to 1 + 2$ im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2} \frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{p}_a|} \frac{\big|\mathcal{M}(|\vec{p}_a|, |\vec{p}_1|, \cos\theta)\big|^2}{(E_{\vec{p}_a} + E_{\vec{p}_b})^2}, \tag{VII.16}$$

wobei $|\vec{p}_1|$ der durch Viererimpulserhaltung bestimmte Betrag des Impulses eines der auslaufenden Teilchen ist.

Bemerkung: Da die kinematischen Größen hier im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen angegeben sind, ist $(E_{\vec{p}_a}+E_{\vec{p}_b})^2$ im Nenner dieser Formel gleich $s\,c^4$, mit s der (Lorentz-invarianten) ersten Mandelstam-Variablen.

Literatur zum Kapitel VII

- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 6.1.2 & 6.2.2.