# KAPITEL VII

## Streuprozesse

VII.1 Grundbegriffe 52
VII.1.1 Erste Definitionen 52
VII.2 Wirkungsquerschnitt. Luminosität 53
VII.2 Berechnung des Wirkungsquerschnitts 55
VII.2.1 Fermis Goldene Regel für Streuprozesse 55
VII.2.2 Lorentz-invariante Form des totalen Wirkungsquerschnitts 57
VII.2.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt in einem Zwei-nach-zwei-Prozess 58

In diesem Kapitel werden Streuprozesse, d.h. Teilchenstöße, diskutiert. Nach der Einführung von ein paar Begriffen (Abschn. VII.1) wird das Prinzip der Berechnung des Wirkungsquerschnitts in Abschn. VII.2 dargestellt, mithilfe eines Beispiels ähnlich dem vereinfachten Zerfallsprozess im Kapitel VI.

Hiernach werden nur Kollisionen zwischen zwei Teilchen a und b betrachtet, mit zwei oder mehr Teilchen 1, 2, ... im Endzustand. Prozesse mit drei oder mehr Teilchen im Anfangszustand, sowie solche mit einem einzigen Teilchen im Endzustand, sind tatsächlich in der Elementarteilchenphysik höchst unwahrscheinlich.<sup>(26)</sup>

## VII.1 Grundbegriffe

Dieser erste Abschnitt fasst die Definitionen von ein paar Grundbegriffen betreffend Streuprozesse zusammen.

### VII.1.1 Erste Definitionen

Der Unterschied zwischen *elastischen Streuungen* — d.h. Prozesse der Art  $a + b \rightarrow a' + b'$  — und *inelastischen Streuungen* — entweder der Art  $a + b \rightarrow 1 + 2$ , entsprechend *quasielastischen Streuungen*, oder  $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + \cdots$  — wurde schon in Abschn. V.4 eingeführt.

Experimentell werden manchmal alle Streuprodukte gemessen und identifiziert, öfter sind aber nur Teil der Endteilchen bekannt, während die anderen uncharakterisiert bleiben. Dementsprechend soll man theoretisch einerseits *exklusive Prozesse* betrachten, in denen alle Teilchen im Endzustand vollständig charakterisiert sind, und andererseits *inklusive Prozesse*, in denen Teil der Streuprodukte nicht untersucht werden, wie z.B.  $a + b \rightarrow 1 +$ "Rest".

Der Streuwinkel  $\theta$  ist klassisch der Winkel, um den ein einlaufendes Teilchen abgelenkt wird, wie in Abb. VII.1 dargestellt wird. Allgemeiner wird er durch das Skalarprodukt zwischen den Impulsen eines einlaufenden und eines auslaufenden Teilchens definiert, hier ist z.B.  $\theta$  der Winkel zwischen

 $<sup>^{(26)}</sup>$ Für Prozesse des Typs  $a + b \rightarrow 1$  ist die Kinematik gerade die gleiche wie beim Zwei-Teilchen-Zerfall, so dass der Prozess nur dann zu einem on-Shell-Teilchen führen kann, wenn die einlaufenden Teilchen genau bestimmte Energien und Impulse haben.

 $\vec{p}_a$  und  $\vec{p}_1$ . Man sollte darauf aufpassen, dass der Streuwinkel vom Bezugssystem abhängt, in dem die Streuung untersucht wird.



Abbildung VII.1 – Darstellung einiger Größen zur Charakterisierung eines Streuprozesses.

**Bemerkung:** Mithilfe der in Gl. (V.4) definierten Mandelstam-Variablen t findet man die Beziehung

$$\cos \theta = \frac{t - m_a^2 - m_1^2 + 2E_a E_1/c^4}{2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|/c^2}.$$
 (VII.1)

Im besonderen Fall einer elastischen Streuung gilt im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen, wo  $E_a = E_1$  ist, die einfache Relation  $t = -2|\vec{p}_a|^2(1-\cos\theta)/c^2$ .

Im Stoß klassischer Teilchen definiert man noch den *Stoßparameter b*: dabei handelt es sich um den minimalen Abstand der einlaufenden Teilchen für den fiktiven Fall, wo sie sich geradlinig bewegen würden, statt abgelenkt zu werden. In der Quantenmechanik, wo Teilchen keiner Bahnkurve folgen, verliert dieser Begriff an Bedeutung.

#### VII.1.2 Wirkungsquerschnitt. Luminosität

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Streuprozess stattfindet, wird in der Teilchenphysik mithilfe des *Wirkungsquerschnitts* charakterisiert.

Klassisch handelt es sich dabei um die (effektive) Schnittfläche des Ziels — entsprechend hier dem zweiten einlaufenden Teilchen bzw. dem Streuzentrum — aus der Sicht eines einlaufenden Teilchens. Dies wird unten am Beispiel der Streuung eines klassischen Teilchens an einer harten Kugel illustriert.

In der Quantenmechanik entspricht der Begriff einer ähnlichen Größe, die aber von der Energie bzw. der Geschwindigkeit des einlaufenden Teilchens abhängt. Insbesondere können bei bestimmten Energien sog. *Resonanzen* auftreten, bei denen die Streuwahrscheinlichkeit stark wächst — das Ziel wird bei diesen Resonanzenergien als größer gesehen.

Für eine genaue Definition des Wirkungsquerschnitts soll man zuerst die Anzahl der Teilchen betrachten, die in einem (Gedenk-)Streuexperiment pro Zeit- und pro Raumwinkeleinheit in eine Richtung  $(\theta, \varphi) \equiv \Omega$  gestreut werden, wobei die Winkeln in Abb. VII.1 definiert sind. Diese Anzahl sei als  $d^3N_{aus}(\theta, \varphi)/dt d^2\Omega$  bezeichnet.

Dazu wird die *Luminosität*  $\mathcal{L}_{ein}$  als die Anzahl der einlaufenden Teilchen, die pro Zeiteinheit durch die Einheitsfläche fließen, definiert.

Dann ist der differentielle Wirkungsquerschnitt durch die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}^2 \sigma(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}^2 \Omega} \equiv \frac{1}{\mathcal{L}_{\mathrm{ein}}} \frac{\mathrm{d}^3 N_{\mathrm{aus}}(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}t \,\mathrm{d}^2 \Omega} \tag{VII.2}$$

definiert. Anders gesagt ist die *Ereignisrate* in eine gegebene Richtung gleich dem Produkt der Luminosität mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt, wobei ein Ereignis hier die Streuung eines Teilchens in die Richtung bezeichnet. Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann das Integral des differentiellen Wirkungsquerschnitts über alle Raumwinkel

$$\sigma_{\rm tot} \equiv \int \frac{{\rm d}^2 \sigma(\theta,\varphi)}{{\rm d}^2 \Omega} \,{\rm d}^2 \Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{{\rm d}^2 \sigma(\theta,\varphi)}{{\rm d}^2 \Omega} \,\sin\theta \,{\rm d}\theta \,{\rm d}\varphi. \tag{VII.3}$$

Dementsprechend ist die gesamte Ereignisrate gleich dem Produkt der Luminosität mit dem totalen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{aus}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{L}_{\mathrm{ein}}\,\sigma_{\mathrm{tot}}.\tag{VII.4}$$

Da die Ereignisrate die Dimension einer Rate (!)  $[\mathsf{T}^{-1}]$  und die Luminosität die Dimension einer Teilchenstromdichte  $[\mathsf{L}^{-2}\mathsf{T}^{-1}]$  hat, haben Wirkungsquerschnitte die Dimension  $\mathsf{L}^2$  einer Fläche. In der Teilchenphysik wird statt des  $m^2$  der barn benutzt, wobei 1 b =  $10^{-28} \mathrm{m}^2 = (10 \mathrm{~fm})^2$ . Zum Beispiel hat die ATLAS Kollaboration<sup>(27)</sup> am Large Hadron Collider (LHC) am CERN in Proton-Proton-Kollisionen bei einer Schwerpunktsenergie von 13 TeV einen inelastischen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\mathrm{inel.}} = 78, 1 \pm 2, 9 \mathrm{~mb}$  gemessen [13].

#### Bemerkungen:

\* Der Winkel zwischen zwei Impulsen hängt allgemein vom Bezugssystem ab, insbesondere der Streuwinkel. Dementsprechend hängt der differentielle Wirkungsquerschnitt vom Bezugssystem ab. Dagegen ist der totale Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{tot}$  eine Lorentz-invariante Größe, da es nur eine richtungsunabhängige Zahl charakterisiert.

\* Bei der oben eingeführten Luminosität  $\mathcal{L}_{ein}$  handelt es sich tatsächlich um die *instantane Luminosität*. Diese kann auch integriert über die Dauer eines Experiments werden, was die *integrierte Luminosität* liefert.

Beispielsweise wurde der LHC ursprünglich entwickelt, um eine instantane Luminosität in Proton–Proton-Stößen von  $10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 10^4 \,\mu \text{b}^{-1} \text{ s}^{-1}$  zu erreichen. In 2017 gehörte dieser Wert zur Routine,<sup>(28)</sup> und ein Rekordwert von 2,  $06 \cdot 10^4 \,\mu \text{b}^{-1} \text{ s}^{-1}$  wurde sogar erreicht.<sup>(29)</sup> Dazu betrug die über die Periode 2015–2018 (Run 2) integrierte Luminosität in Proton–Proton-Kollisionen im ATLAS-Experiment ca. 140 fb<sup>-1</sup>.<sup>(30)</sup>

#### Luminosität in Teilchenstößen

Betrachte den Stoß zweier Teilchen a und b, wobei der Endzustand für die Diskussion beliebig sein kann. Es wird angenommen, dass eines der Teilchen, z.B. Teilchen b, eine nichtverschwindende Masse hat. Dann kann man in dessen Ruhesystem gehen:



Sei jetzt angenommen, dass es im Volumen  $\mathcal{V}$ , wo sich die Teilchen befinden, nur ein einziges Teilchen a und ein einziges Teilchen b gibt. Dann ist die Luminosität der einlaufenden Welle, die das Teilchen a beschreibt, gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\rm ein} = \frac{1}{\mathcal{V}} |\vec{v}_a|, \qquad (\text{VII.5})$$

wobei  $1/\mathcal{V}$  die durchschnittliche Teilchendichte der einlaufenden Teilchen darstellt.

#### Beispiel: Streuung an einer harten Kugel

Im Fall der Streuung eines klassischen Teilchens an einer festen harten Kugel mit dem Radius Rsind der Stoßparameter b und der Streuwinkel  $\theta$  einfach miteinander verknüpft. Somit findet man

<sup>(29)</sup>S. diese online-Nachricht.

<sup>&</sup>lt;sup>(27)</sup>A Toroidal LHC ApparatuS, Webseite: atlas.cern.

 $<sup>^{(28)}</sup>$ Diese Information kann prinzipiell online auf der *LHC luminosity* Webseite gefunden werden. Bis 2021/22 findet am LHC ein "long shutdown" statt, so dass nichts zu lesen ist.

<sup>&</sup>lt;sup>(30)</sup>S. CERN Courier, Juli/August 2019, Seite 17.

für  $b \leq R$  (vgl. Abb. VII.2)  $b = R \sin \alpha$  mit  $2\alpha = \pi - \theta$ , d.h.  $b = R \cos \frac{\theta}{2}$ . Hier ist das Problem azimutal symmetrisch.



Abbildung VII.2 – Streuung an einer harten Kugel.

Sei  $\theta \in [0, \pi]$ ; die Teilchen, die um einen Winkel zwischen  $\theta$  und  $\theta + d\theta$  gestreut werden, sind solche, die mit einem Stoßparameter zwischen b und b + db auf die Kugel stoßen, wobei

$$\mathrm{d}b = \mathrm{d}\left(R\cos\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Sei  $N_{\rm ein}$  die Anzahl der einlaufenden Teilchen, entsprechend einer Teilchendichte  $N_{\rm ein}/\mathcal{V}$ . Wenn diese Teilchen alle dieselbe Geschwindigkeit  $v_{\rm ein}$  haben, dann lautet die Luminosität  $\mathcal{L}_{\rm ein} = N_{\rm ein} v_{\rm ein}/\mathcal{V}$ . Dazu bleibt die Geschwindigkeit der Teilchen unverändert in der Streuung, so dass die Anzahl der in die Richtung  $(\theta, \varphi)$  gestreuten Teilchen pro Zeit- und Raumwinkeleinheit durch

$$\frac{\mathrm{d}^3 N_{\mathrm{aus}}(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{1}{\mathrm{d}\Omega} \frac{N_{\mathrm{ein}}}{\mathscr{V}} v_{\mathrm{ein}} |b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varphi|$$

gegeben ist, wobei d $\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ . Unter Berücksichtigung der Luminosität und der Ausdrücke für *b* und *db* findet man

$$\frac{\mathrm{d}^3 N_{\mathrm{aus}}(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}t \,\mathrm{d}^2 \Omega} = \mathcal{L}_{\mathrm{ein}} \frac{R \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} \,\mathrm{d}\theta}{\sin \theta \,\mathrm{d}\theta} = \mathcal{L}_{\mathrm{ein}} \frac{R^2}{4}.$$

Dies bedeutet einen differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d^2\sigma(\theta,\varphi)/d^2\Omega = R^2/4$  für alle  $\theta \in [0,\pi]$ und  $\varphi \in [0,2\pi]$ . Wiederum ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{tot} = \pi R^2$ , d.h. gleich der Schnittfläche der Kugel.

## VII.2 Berechnung des Wirkungsquerschnitts

Ähnlich der Zerfallsrate in Abschn. VI.2 lässt sich der Wirkungsquerschnitt mithilfe von Fermis Goldener Regel schreiben. Somit beruht der totale Wirkungsquerschnitt auf dem Phasenraumintegral einer Amplitude zum Quadrat über die Impulse der auslaufenden Teilchen (§ VII.2.1). Dieses Integral wird mit einem Vorfaktor multipliziert, dem sog. Flussfaktor, der in § VII.2.2 diskutiert wird. Wenn es nur zwei Teilchen im Endzustand kann das Phasenraumintegral weitgehend ohne Kenntnisse über die zugrundeliegende Wechselwirkung durchgeführt werden (§ VII.2.3), woraus der differentielle Wirkungsquerschnitt folgt.

### VII.2.1 Fermis Goldene Regel für Streuprozesse

Betrachte z.B. den Zwei-nach-zwei-Prozess  $a + b \rightarrow 1 + 2$ , wobei die Teilchen die jeweiligen Viererimpulse  $p_a$ ,  $p_b$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  haben. Der Einfachheit halber werden einige Annahmen gemacht: erstens sollen die zwei einlaufenden bzw. die zwei auslaufenden Teilchen nicht identisch sein. Dann haben sie alle den Spin 0. Schließlich gibt es mindestens ein massives Teilchen im Anfangszustand, z.B. Teilchen b. Die einlaufenden Teilchen werden durch einen Zustandsvektor  $|a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b)\rangle$  beschrieben, der sich durch Anwendung von geeigneten Erzeugungsoperatoren auf den Vakuumzustand erhalten lässt. Dieser Zustandsvektor ist auf

$$\langle a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b) | a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b) \rangle = [\delta^{(3)}(\vec{0})]^2 = \left[\frac{\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3}\right]^2$$
 (VII.6)

normiert. Wiederum wird den auslaufenden Teilchen ein Endzustand  $\langle 1(\vec{p}_1), 2(\vec{p}_2) |$  assoziiert. Beide Anfangs- und Endzustand sind Eigenzustände eines wechselwirkungsfreien Hamilton-Operators  $\hat{H}_0$ .

Der Prozess unter Berücksichtigung erfolgt aus dem Einschalten eines zusätzlichen Wechselwirkungsterms  $g\hat{V}(t)$  im Hamilton-Operator, mit

$$g\hat{V}_{\rm I}(t) \equiv \int \frac{\mathcal{M}}{\hbar c} \,\hat{\phi}_a(t,\vec{x}) \,\hat{\phi}_b(t,\vec{x}) \,\hat{\phi}_1(t,\vec{x}) \,\hat{\phi}_2(t,\vec{x}) \,\mathrm{d}^3\vec{x},\tag{VII.7}$$

wobei die komplexwertige Amplitude  $\mathcal{M}$  zeit- und ortsunabhängig ist, während  $\hat{\phi}_i(\mathsf{x})$  für i = a, b, 1, 2 den mit Teilchen i assoziierten Klein–Gordon-Feldoperator bezeichnet.

Zur ersten nicht-trivialen Ordnung in Störungsrechnung lautet das *Streumatrixelement* (VI.2) zwischen Anfangs- und Endzustand [vgl. (VI.16)]

$$S_{\rm fi} = \frac{1}{{\rm i}\hbar} \langle 1(\vec{p}_1), 2(\vec{p}_2) | \int \frac{\mathcal{M}}{\hbar c} \, \hat{\phi}_a(t, \vec{x}) \, \hat{\phi}_b(t, \vec{x}) \, \hat{\phi}_1(t, \vec{x}) \, \hat{\phi}_2(t, \vec{x}) \, {\rm d}^3 \vec{x} \, {\rm d}t \, \big| \, a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b) \rangle.$$

Drückt man die Feldoperatoren durch die zugehörigen Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren aus, so findet man, dass die Wirkung von  $\hat{\phi}_i(\mathbf{x})$  für i = a oder b bzw. i = 1 oder 2 auf den Anfangszustand bzw. Endzustand einen Term  $\hbar c \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}/\hbar} / \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_i}}$  bzw.  $\hbar c \,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}/\hbar} / \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_i}}$  liefert, so dass schließlich

$$S_{\rm fi} = \frac{1}{{\rm i}\hbar} \int \frac{(\hbar c)^3 \mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_a}} \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_b}} \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}_2}}} \, {\rm e}^{{\rm i}({\sf p}_1 + {\sf p}_2 - {\sf p}_a - {\sf p}_b) \cdot {\sf x}/\hbar} \, {\rm d}^3 \vec{x} \, {\rm d}t$$

Die Integration nach Raum und Zeit gibt dann

$$S_{\rm fi} = -i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 - \mathsf{p}_a - \mathsf{p}_b) \frac{c^2 \mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_a}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_b}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}.$$
 (VII.8)

Dieser Ausdruck des Streumatrixelements hat die gleiche Struktur wie in Gl. (VI.17), und insbesondere berücksichtigt automatisch die Energie–Impuls-Erhaltung.

Bildet man nun das Betragsquadrat dieses Streumatrixelements, so ergibt sich

$$|S_{\rm fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 - \mathsf{p}_a - \mathsf{p}_b) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathsf{0}) \frac{c^4 |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_a} (2\pi)^3 2E_{\vec{p}_b} (2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1} (2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}$$

Dabei ist  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)$  gleich  $1/\hbar^4$  mal dem Raumzeitvolumen  $\mathcal{V}cT$ , in dem die ein- und auslaufenden Teilchen propagieren.

 $|S_{\rm fi}|^2$  stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass der Anfangszustand  $|a(\vec{p}_a), b(\vec{p}_b)\rangle$  nach einer Zeitspanne T in den Endzustand  $\langle 1(\vec{p}_1), 2(\vec{p}_2)|$  übergeht. Um die entsprechende Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und für ein einziges Paar von einlaufenden Teilchen zu erhalten, soll man noch  $|S_{\rm fi}|^2$  durch T und durch die Normierung (VII.6) des Anfangszustands teilen. Somit lautet die Anzahl der pro Zeiteinheit mit Impulsen  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  auslaufenden Teilchen

$$\frac{\mathrm{d}^{7}N_{\mathrm{aus}}(\vec{p}_{1},\vec{p}_{2})}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^{3}\vec{p}_{1}\,\mathrm{d}^{3}\vec{p}_{2}} = \frac{\hbar^{2}c^{3}}{\mathcal{V}}\frac{1}{4E_{\vec{p}_{a}}E_{\vec{p}_{b}}}(2\pi)^{4}\delta^{(4)}(\mathsf{p}_{1}+\mathsf{p}_{2}-\mathsf{p}_{a}-\mathsf{p}_{b})\frac{c^{2}|\mathcal{M}|^{2}}{(2\pi)^{3}\,2E_{\vec{p}_{1}}(2\pi)^{3}\,2E_{\vec{p}_{2}}}.$$
 (VII.9)

Aus der Integration dieser Formel über die passenden Variablen lassen sich Ausdrücke für den differentiellen und den totalen Wirkungsquerschnitt herleiten.

Dabei ist der Letztere zunächst einfacher zu erhalten, zumindest formell. Integriert man die Anzahl (VII.9) über alle möglichen Werte der auslaufenden Impulse, so ergibt sich die Anzahl der pro Zeiteinheit auslaufenden Teilchen 1 und 2

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{aus}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar^2 c^3}{\mathcal{V}} \frac{1}{4E_{\vec{p}_a} E_{\vec{p}_b}} \int (2\pi)^4 \delta^{(4)} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) \left|\mathcal{M}\right|^2 \frac{c \, \mathrm{d}^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 \, 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c \, \mathrm{d}^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 \, 2E_{\vec{p}_2}}$$

Diese Anzahl ist über Beziehung (VII.4) mit dem totalen Wirkungsquerschnitt und der Luminosität verknüpft. Um die Letztere zu ermitteln, kann man ins Ruhesystem von Teilchen *b* gehen — dank der Annahme, dass Teilchen *b* nicht masselos ist. In diesem Bezugssystem gilt  $E_{\vec{p}_b} = m_b c^2$ , während die Luminosität gemäß Gl. (VII.5) gleich  $\mathcal{L}_{ein} = |\vec{v}_a|/\mathcal{V}$  ist, wobei  $\vec{v}_a$  die Geschwindigkeit von Teilchen *a* im gewählten Bezugssystem bezeichnet. Dies gibt für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\rm tot} = \frac{\hbar^2 c}{4 \left| \vec{v}_a \right| E_{\vec{p}_a} m_b} \int (2\pi)^4 \delta^{(4)} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) \left| \mathcal{M} \right|^2 \frac{c \, \mathrm{d}^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 \, 2E_{\vec{p}_1}} \frac{c \, \mathrm{d}^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 \, 2E_{\vec{p}_2}}.$$
 (VII.10)

Diese Formel stellt wieder ein Beispiel von Fermis Goldener Regel dar.

Wie schon oben erwähnt wurde, soll der totale Wirkungsquerschnitt Lorentz-invariant sein. Während das Integral deutlich Lorentz-invariant ist — vorausgesetzt dies auch für  $|\mathcal{M}|^2$  gilt, was hier ohne Beweis angenommen wird —, ist es für der Vorfaktor nicht sofort klar. Somit wird der Letztere im nächsten Abschnitt genauer untersucht.