VI.2.3 Vereinfachtes Modell

Der Einfachheit halber wird jetzt der Zerfall eines als ρ bezeichneten skalaren Teilchens mit Masse m_ρ und Viererimpuls p in zwei ebenfalls skalare Teilchen betrachtet, wobei die Zerfallsprodukte ein Teilchen π^+ (Masse $m_1 = m_\pi$, Viererimpuls p_1) und dessen Antiteilchen π^- (Masse $m_2 = m_\pi$, Viererimpuls p_2) sind.

Bemerkung: Das eigentliche ρ-Meson hat den Spin 1, nicht den Spin 0, wie hier der Einfachheit halber angenommen wird.

VI.2.3 a Feldoperatoren – Wechselwirkungsterm – Anfangs- und Endzustände

Der Feldoperator für einlaufende ρ-Teilchen wird durch Gl. (II.11a) gegeben:

$$\hat{\phi}_\rho(\mathsf{x}) = \int \left[\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{q}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{q}\cdot\mathsf{x}/\hbar} + \hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{q}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{q}\cdot\mathsf{x}/\hbar}\right] \frac{\hbar c\, \mathrm{d}^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3\, 2E_{\vec{q}}}}, \tag{VI.9}$$

wobei benutzt wurde, dass das ρ-Teilchen sein eigenes Antiteilchen ist.[24] Zur Beschreibung der auslaufenden π^+-Teilchen, die erzeugt werden sollen, gibt Gl. (II.11b)

$$\hat{\phi}_\pi(\mathsf{x})^\dagger = \int \left[\hat{a}^{(\pi)\dagger}_{\vec{q}_1}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{q}_1\cdot\mathsf{x}/\hbar} + \hat{b}^{(\pi)}_{\vec{q}_1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{q}_1\cdot\mathsf{x}/\hbar}\right] \frac{\hbar c\, \mathrm{d}^3\vec{q}_1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3\, 2E_{\vec{q}_1}}}. \tag{VI.10}$$

[24] Jede erhaltene innere Quantenzahl des ρ ist gleich der Summe der entsprechenden Quantenzahlen für die π^+ und π^-, bei denen die Zahl mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommt, so dass die Summe verschwindet. Das ρ kann also keine innere Quantenzahl haben, und somit kein verschiedenes Antiteilchen.

[ab] F. Dyson, 1923–

Schließlich lautet der Feldoperator für die auslaufenden π^--Antiteilchen

$$\hat{\phi}_\pi(\mathsf{x}) = \int \Big[\hat{a}^{(\pi)}_{\vec{q}_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{q}_2\cdot\mathsf{x}/\hbar} + \hat{b}^{(\pi)\dagger}_{\vec{q}_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{q}_2\cdot\mathsf{x}/\hbar}\Big]\,\frac{\hbar c\,\mathrm{d}^3\vec{q}_2}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3\,2E_{\vec{q}_2}}}. \tag{VI.11}$$

Dabei gelten die üblichen Energie-Impuls-Beziehungen: $E_{\vec{q}} = \sqrt{\vec{q}^{\,2}c^2 + m_\rho^2 c^4}$, $E_{\vec{q}_1} = \sqrt{\vec{q}_1^{\,2}c^2 + m_\pi^2 c^4}$ und $E_{\vec{q}_2} = \sqrt{\vec{q}_2^{\,2}c^2 + m_\pi^2 c^4}$.

Bemerkung: Die Zuordnung vom Feldoperator $\hat{\phi}_\pi(\mathsf{x})$ dem auslaufenden π^- bzw. vom adjungierten $\hat{\phi}^\dagger_\pi(\mathsf{x})$ dem auslaufenden π^+ ist willkürlich und spielt hiernach keine Rolle.

Für den Wechselwirkungsterm im Hamilton-Operator wird die folgende vereinfachte Form in Abhängigkeit der obigen Feldoperatoren angenommen:

$$g\hat{V}_\mathrm{I}(t) \equiv \int \frac{\mathcal{M}}{\hbar\sqrt{\hbar c}}\,\hat{\phi}_\pi(t,\vec{x})^\dagger\hat{\phi}_\pi(t,\vec{x})\,\hat{\phi}_\rho(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x}, \tag{VI.12}$$

wobei die *Amplitude* $\mathcal{M} \in \mathbb{C}$ zeit- und ortsunabhängig ist.

Der Anfangszustand $|\mathrm{i}\rangle$ des untersuchten Zerfalls besteht aus ρ-Teilchen mit Viererimpuls p. Ein solcher Zustand lässt sich durch die Wirkung des Erzeugungsoperators $\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}$ auf den Vakuumzustand erhalten:

$$|\rho(\vec{p})\rangle = \hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}|0\rangle. \tag{VI.13}$$

Dieser Zustandsvektor ist aber nicht auf 1 normiert, sondern auf

$$\langle\rho(\vec{p})|\rho(\vec{p})\rangle = \delta^3(\vec{0}) = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{VI.14}$$

mit dem (möglicherweise unendlichen) dreidimensionalen Volumen $\mathcal{V}$, in dem sich die ρ-Teilchen bzw. die zugehörige ebene Welle befinden. Dies wiederum bedeutet, dass der Zustandsvektor $|\rho(\vec{p})\rangle$ kein einziges Teilchen, sondern $\mathcal{V}/(2\pi\hbar)^3$ davon beschreibt.

Beweis der Gl. (VI.14): Die erste Gleichung folgt aus

$$\langle\rho(\vec{p})|\rho(\vec{p}\,')\rangle = \big\langle 0\big|\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}\,'}\big|\big\rangle = \big\langle 0\big|\,\big[\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}},\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}\,'}\big] + \hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}\,'}\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}}\big|0\big\rangle = \big\langle 0\big|\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')\big|0\big\rangle,$$

wobei einerseits der Kommutator (II.10a) und andererseits die Normierung auf 1 des Vakuumzustands verwendet wurden.

Die zweite Gleichung entspricht einfach der Tatsache, dass die Dirac-Distribution die Fourier-transformierte von 1 ist: im eindimensionalen Fall gilt

$$2\pi\delta(k) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x,$$

was für $k = 0$ zu $2\pi\delta(0) = L$ führt, wobei L das „Raumvolumen" ist.

Um festzustellen, wie viele Teilchen durch den Zustandsvektor beschrieben werden, soll man den Erwartungswert des Teilchenzahloperators $\hat{N}^{(\rho)}$ in diesem Zustand berechnen. Dabei ist $\hat{N}^{(\rho)}$ das Integral über alle mögliche Impulse $\vec{p}\,'$ von dem Besetzungszahloperator $\hat{N}^{(\rho)}_{\vec{p}\,'} = \hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}\,'}\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}\,'}$. Dann hat man

$$\langle\rho(\vec{p})|\hat{N}^{(\rho)}|\rho(\vec{p})\rangle = \int \big\langle 0\big|\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}\,'}\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}\,'}\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}\big|\big\rangle\,\mathrm{d}^3\vec{p}\,'.$$

Schreibt man für die zwei letzten Leiteroperatoren rechts

$$\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}\,'}\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}} = \big[\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}\,'},\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}\big] + \hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}\,'} = \delta^{(3)}(\vec{p}\,'-\vec{p})\mathbb{1} + \hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}\,'}$$

so kommt $\langle\rho(\vec{p})|\hat{N}^{(\rho)}|\rho(\vec{p})\rangle = \int \big\langle 0\big|\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}\,'}\big|\big\rangle\,\delta^{(3)}(\vec{p}\,'-\vec{p})\,\mathrm{d}^3\vec{p}\,' = \big\langle 0\big|\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}\big|\big\rangle = \langle\rho(\vec{p})|\rho(\vec{p})\rangle.$

Ähnlich dem Anfangszustand lautet der Zustandsvektor für den Endzustand

$$|\pi^+(\vec{p}_1)\,\pi^-(\vec{p}_2)\rangle = \hat{a}^{(\pi)\dagger}_{\vec{p}_1}\,\hat{b}^{(\pi)\dagger}_{\vec{p}_2}\,|0\rangle, \quad \text{d.h.} \quad \langle\pi^+(\vec{p}_1)\,\pi^-(\vec{p}_2)| = \langle 0|\,\hat{b}^{(\pi)}_{\vec{p}_2}\hat{a}^{(\pi)}_{\vec{p}_1}. \tag{VI.15}$$

VI.2.3 b Streumatrixelement

Mit dem annähernden Ausdruck (VI.8) des Zeitentwicklungsoperators lautet das Streumatrixelement (VI.2)

$$S_{\mathrm{fi}} = {}_{\mathrm{I}}\langle \mathrm{f}\,|\,\hat{U}_{\mathrm{I}}(\infty,-\infty)\,|\,\mathrm{i}\rangle_{\mathrm{I}} = \delta_{\mathrm{fi}} - {}_{\mathrm{I}}\langle \mathrm{f}\,|\,\frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{V}_{\mathrm{I}}(t')\,\mathrm{d}t'\,|\,\mathrm{i}\rangle_{\mathrm{I}} + \mathcal{O}(g^2). \tag{VI.16}$$

Im jetzigen Fall von Interesse sind Anfangs- und Endzustand unterschiedlich, so dass der erste nicht-verschwindende Beitrag durch den Term der Ordnung g gegeben ist. Unter Verwendung des Wechselwirkungsterms (VI.12) kommt

$$S_{\mathrm{fi}} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle \pi^+(\vec{p}_1)\,\pi^-(\vec{p}_2)|\int \frac{\mathcal{M}}{\hbar\sqrt{\hbar c}}\,\hat{\phi}_\pi(t,\vec{x})^\dagger\hat{\phi}_\pi(t,\vec{x})\,\hat{\phi}_\rho(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x}\;\mathrm{d}t\,|\rho(\vec{p})\rangle.$$

Das Einsetzen der Feldoperatoren (VI.9)–(VI.11) und der Zustandsvektoren (VI.13), (VI.15) in dieses Matrixelement gibt

$$S_{\mathrm{fi}} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar^2}\int \frac{(\hbar c)^{5/2}\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3\,2E_{\vec{p}}}\sqrt{(2\pi\hbar)^3\,2E_{\vec{p}_1}}\sqrt{(2\pi\hbar)^3\,2E_{\vec{p}_2}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p})\cdot\mathsf{x}/\hbar}\,\mathrm{d}^3\vec{x}\;\mathrm{d}t.$$

Durch dieses Einsetzen erhält man das Integral nach Zeit und Raum von Integralen nach den Impulsen $\vec{q}$, $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ von Termen der Art

$$\langle 0|\,\hat{b}^{(\pi)}_{\vec{p}_2}\hat{a}^{(\pi)}_{\vec{p}_1}\begin{Bmatrix}\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{q}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{q}\cdot\mathsf{x}/\hbar}\\ \hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{q}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{q}\cdot\mathsf{x}/\hbar}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{b}^{(\pi)}_{\vec{q}_1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{q}_1\cdot\mathsf{x}/\hbar}\\ \hat{a}^{(\pi)\dagger}_{\vec{q}_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{q}_1\cdot\mathsf{x}/\hbar}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{a}^{(\pi)}_{\vec{q}_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{q}_2\cdot\mathsf{x}/\hbar}\\ \hat{b}^{(\pi)\dagger}_{\vec{q}_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{q}_2\cdot\mathsf{x}/\hbar}\end{Bmatrix}\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}\,|0\rangle,$$

wobei die geschweiften Klammern bedeuten, dass einer der beiden Operatoren genommen werden soll. Der einzige nicht-verschwindende Beitrag kommt vom Term mit $\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{q}}\hat{a}^{(\pi)\dagger}_{\vec{q}_1}\hat{b}^{(\pi)\dagger}_{\vec{q}_2}$ — für jede Teilchen- und Antiteilchenart muss es die gleiche Zahl von Vernichtern und Erzeugern geben — entsprechend dem Phasenfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathsf{q}_1+\mathsf{q}_2-\mathsf{q})\cdot\mathsf{x}/\hbar}$. Benutzt man dann Gleichungen der Form

$$\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{q}}\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}} = \big[\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{q}},\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}\big] + \hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}\,\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{q}} = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})\mathbb{1} + \hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}\,\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{q}},$$

wobei der letztere Term angewandt auf den Vakuumzustand Null geben wird, so findet man

$$\langle 0|\,\hat{b}^{(\pi)}_{\vec{p}_2}\hat{a}^{(\pi)}_{\vec{p}_1}\,\hat{a}^{(\rho)}_{\vec{q}}\hat{a}^{(\pi)\dagger}_{\vec{q}_1}\,\hat{b}^{(\pi)\dagger}_{\vec{q}_2}\hat{a}^{(\rho)\dagger}_{\vec{p}}\,|0\rangle = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})\,\delta^{(3)}(\vec{p}_1-\vec{q}_1)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_2-\vec{q}_2).$$

Dann sind die Integrale über $\vec{q}$, $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ trivial und liefern das Resultat.

Die Integration nach t und $\vec{x}$ lässt sich einfach durchführen und liefert eine Dirac-Distribution

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{fi}} &= -\mathrm{i}\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p})\,\frac{\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}}/c}\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_1}/c}\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_2}/c}} \\ &\equiv -\mathrm{i}\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p})\,T_{\mathrm{fi}}. \end{aligned} \tag{VI.17}$$

Dabei heißt T_{fi} *Transfermatrixelement*. Dazu kommt die Erhaltung des Viererimpulses, ausgedrückt durch den $\delta^{(4)}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p})$-Term, automatisch aus der Berechnung heraus!

VI.2.3 c Zerfallsrate

Die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall des Anfangszustands[25] wird durch das Betragsquadrat der Amplitude (VI.17) gegeben:

$$|S_{\mathrm{fi}}|^2 = (2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p})\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\,\frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}}/c\,(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_1}/c\,(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_2}/c}.$$

Hier stellt $\delta^{(4)}(0)$ das vierdimensionale Raumzeitvolumen dar, in dem sich die Teilchen bewegen können. Ähnlich wie im zweiten Teil der Gl. (VI.14) gilt $\delta^{(4)}(0) = \mathcal{V}cT/(2\pi\hbar)^4$, wobei $\mathcal{V}$ bzw. T

[25] Stillschweigend wird angenommen, dass der Zerfall in ein π^+-π^--Paar der einzige erlaubte Zerfallskanal ist.

das dreidimensionale Volumen, in dem sich die Teilchen befinden, bzw. die Zeitspanne, in der der Zerfall stattfinden kann, bezeichnet.

Die Zerfallsrate für den betrachteten Anfangszustand ist die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, also $|S_{\rm fi}|^2/T$, integriert über alle möglichen Impulse der auslaufenden Teilchen:

$$\Gamma_{|\mathrm{i}\rangle\to\cdots} = \frac{\mathcal{V}c^2}{(2\pi)^3\hbar^4}\int(2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p})\,\frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_{\vec{p}}}\,\frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_1}}\,\frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_2}}.$$

Dabei ist aufzupassen, dass diese Rate für einen Anfangszustand gilt, der $\mathcal{V}/(2\pi\hbar)^3$ Teilchen enthält, wie oben bemerkt wurde. Um die Übergangsrate für einen auf 1 normierten Anfangszustand, entsprechend einem einzigen zerfallenden Teilchen, zu kriegen, soll man deshalb durch $\mathcal{V}/(2\pi\hbar)^3$ teilen. Somit lautet die gesuchte Zerfallsrate

$$\boxed{\Gamma = \frac{c^2}{2\hbar E_{\vec{p}}}\int(2\pi)^4\delta^{(4)}(\mathsf{p}_1+\mathsf{p}_2-\mathsf{p})|\mathcal{M}|^2\frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}}\,\frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_2}}.} \tag{VI.18}$$

Dieses Resultat stellt ein Beispiel von *Fermis Goldene Regel* für Zerfälle dar.

Im allgemeinen Fall mit n Teilchen im Endzustand ist die Zerfallsrate gegeben durch

$$\Gamma = \frac{c^2}{2\hbar E_{\vec{p}}}\,C\int(2\pi)^4\delta^{(4)}\bigg(\sum_{i=1}^n \mathsf{p}_i - \mathsf{p}\bigg)|\mathcal{M}|^2\prod_{i=1}^n\frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_i}}. \tag{VI.19}$$

Abgesehen von numerischen Faktoren besteht diese Zerfallsrate aus drei Elementen, die jetzt diskutiert werden.

- Erstens ist C ein statistischer Faktor, der die mögliche Ununterscheidbarkeit einiger der auslaufenden Teilchen berücksichtigt: für je j identische Teilchen im Endzustand bekommt C einen Faktor $1/j!$.

- Dann wird die *Amplitude* $\mathcal{M}$ durch den eigentlichen Wechselwirkungen festgestellt: hier spielt die Dynamik der Teilchen eine Rolle — welchen Wechselwirkungen unterliegen sie, welche Werte nehmen deren innere Quantenzahlen an —, sowie ihre Natur — handelt es sich um Teilchen mit Spin 0, $\frac{1}{2}$ oder 1…

- Schließlich kommt eine *Phasenraumintegration*
$$\int(2\pi)^4\delta^{(4)}\bigg(\sum_{i=1}^n \mathsf{p}_i - \mathsf{p}\bigg)\prod_{i=1}^n\frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_i}}, \tag{VI.20}$$
wobei die Erhaltung des Viererimpulses schon berücksichtigt wird. Dabei lässt sich das Maß für die Integration im Impulsraum eines einzigen Teilchens in der Lorentz-invarianten Form
$$\frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_i}} = 2\pi\delta(\mathsf{p}_i^2 - m_i^2c^2)\,\Theta(p_i^0)\,\frac{\mathrm{d}^4\mathsf{p}_i}{(2\pi)^4} \tag{VI.21}$$
schreiben, wobei Θ die Heaviside[(ac)]-Funktion bezeichnet. Somit enthält die Phasenraumintegration auch die Bedingung, dass alle auslaufenden (Anti-)Teilchen „on-Shell-Teilchen" sind, und eine positive Energie haben.

Bemerkungen:

∗ In der Literatur findet man oft ein paar Kurzbezeichnungen:

$$\mathrm{dLIPS}(\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_n) \equiv \prod_{i=1}^n\frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_i}},$$

[(ac)] O. Heaviside, 1850–1925

wobei LIPS für „Lorentz-invariant phase space“ steht, sowie

$$\mathrm{d}\Phi_n(\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_n) \equiv (2\pi)^4\delta^{(4)}\bigg(\sum_{i=1}^{n}\mathsf{p}_i-\mathsf{p}\bigg)\prod_{i=1}^{n}\frac{c\,\mathrm{d}^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}_i}}$$

für die Kombination aus Impulsraum-Integrationsmaß und Viererimpulserhaltung.

$*$ Ist die Amplitude $\mathcal{M}$ ein Lorentz-Skalar, so ist das ganze Integral in Gl. (VI.19) Lorentz-invariant, und die Zerfallsrate Γ skaliert unter Lorentz-Transformationen wie der Kehrwert der Energie $E_{\vec{p}}$, d.h. wie der Kehrwert des Lorentz-Faktors γ. Dann skaliert die mittlere Lebensdauer τ einfach proportional zu $\gamma\ldots$ was zu erwarten war.

$*$ Im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens vereinfacht sich der Faktor $c^2/E_{\vec{p}}$ in Gl. (VI.19) zu $1/m$.

$*$ Die Phasenraumintegration lässt sich für einen Zwei-Teilchen-Zerfall komplett ausführen dank der Tatsache, dass die Kinematik in diesem Fall völlig festgestellt ist, wie in Abschn. V.2 schon gesehen wurde.

Literatur zum Kapitel VI

- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 6.1.1 & 6.2.1.