

# KAPITEL VI

## Zerfälle

---

VI.1	Definitionen	44
VI.2	Berechnung der Zerfallsrate	45
VI.2.1	Streumatrix	45
VI.2.2	Zeitabhängige Störungstheorie	45
VI.2.3	Vereinfachtes Modell	47

---

Dieses Kapitel behandelt die erste Art von elementaren Prozessen bei wechselwirkenden Teilchen, und zwar den Zerfall instabiler Teilchen. In Abschn. [VI.1](#) werden einige wichtigen auf Zerfälle bezogenen Begriffe eingeführt. Dann geht Abschn. [VI.2](#) auf die Berechnung der Zerfallsrate ein, verdeutlicht am Beispiel eines vereinfachten Modells für die Wechselwirkung.

### VI.1 Definitionen

Eine erste wichtige Eigenschaft von instabilen Teilchen ist die *Lebensdauer*  $\tau$ . Genauer sollte man von der mittleren Lebensdauer sprechen, da die Lebensdauer eines einzigen Teilchens nicht vorhersagbar ist, weil es sich bei dem Zerfall um einen quantenmechanischen Prozess handelt. Meist wird diese mittlere Lebensdauer  $\tau$  für ein ruhendes Teilchen angegeben.<sup>(19)</sup>

Eine verwandte Größe ist die *Zerfallsrate*, entsprechend der Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, dass ein Zerfall stattfindet. Diese Zerfallsrate wird üblicherweise als  $\Gamma$  bezeichnet. Damit lautet das Zerfallsgesetz für die Abnahme der Teilchenzahl  $N(t)$  zwischen den Zeiten  $t$  und  $t + dt$ :

$$dN = -\Gamma N(t) dt,$$

was sich sofort integrieren lässt als  $N(t) = N(0) e^{-\Gamma t}$ . Somit findet man einfach, dass  $\Gamma = \frac{1}{\tau}$  gilt.

Oft kann ein gegebenes Teilchen in mehrere verschiedene Mengen an Zerfallsprodukten zerfallen. Jede solche mögliche Art von Zerfallsprodukten wird *Zerfallskanal* genannt. Wird ein Zerfallskanal als  $j$  beschrieben, so definiert man die (partielle) Zerfallsrate in diesen Kanal,  $\Gamma_j$ . Für die Gesamtzerfallsrate gilt natürlich  $\Gamma_{\text{tot}} = \sum_j \Gamma_j$ .

Dazu definiert man das *Verzweigungsverhältnis* in einen Kanal als  $\Gamma_j/\Gamma_{\text{tot}}$ . Je größer dieses Verzweigungsverhältnis ist, desto mehr Zerfälle in den zugehörigen Kanal führen.

---

<sup>(19)</sup>Natürlich stellt sich dann die Frage, ob masselose Teilchen, die kein Ruhesystem haben, instabil sein können — was im Standard-Modell nicht passiert. Kinematisch darf ein solches Teilchen in zwei oder mehr masselose Teilchen zerfallen, vorausgesetzt diese sich kollinear zum Mutterteilchen bewegen. Dann kann man zeigen, dass die mittlere Lebensdauer  $\tau$  in einem Bezugssystem, wo das Teilchen die Energie  $E$  hat, proportional zu dieser Energie ist [\[10\]](#), in Übereinstimmung mit dem Ergebnis für massive Teilchen, vgl. die Zerfallsrate [\(VI.19\)](#).

## VI.2 Berechnung der Zerfallsrate

In diesem Abschnitt wird das Prinzip der Berechnung der Zerfallsrate dargestellt und an einem vereinfachten Beispiel verdeutlicht.

### VI.2.1 Streumatrix

Im Anfangszustand eines Zerfalls befindet sich ein Teilchen mit Masse  $m$  und Viererimpuls  $\mathbf{p}$ , beschrieben durch den Zustandsvektor  $|i\rangle$  eines geeigneten Hilbert-Raums. Der Endzustand besteht aus Zerfallsprodukten mit jeweiligen Massen  $m_1, m_2 \dots$  und Viererimpulsen  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots$ : diese werden kollektiv durch einen Zustandsvektor  $|f\rangle$  dargestellt. Sowohl  $|i\rangle$  als  $|f\rangle$  sind Eigenvektoren eines Hamilton-Operators  $\hat{H}_0$ , der freie Teilchen beschreibt.<sup>(20)</sup>

Die Zustandsvektoren gehören einem geeigneten Hilbert-Raum („Fock-Raum“), dessen Kets alle physikalisch erlaubten Kombinationen von Teilchen mit jeweiligen Impulsen beschreiben. Beispiele werden hiernach gegeben, s. Gl. (VI.13) und (VI.15).

Der gesamte Hamilton-Operator für die Teilchen enthält aber auch Wechselwirkungen und ist also der Form

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}(t), \quad (\text{VI.1})$$

wobei  $g\hat{V}$  ein Wechselwirkungsterm ist, der Übergänge zwischen den Eigenzuständen von  $\hat{H}_0$  induzieren kann. Die Zeitentwicklung eines Zustandsvektors lässt sich dann mithilfe des mit  $\hat{H}$  assoziierten Zeitentwicklungsoperators  $\hat{U}(t, t_0)$  beschreiben. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass sich das System von Teilchen zur Zeit  $t_0$  im Zustand  $|i\rangle$  und zur späteren Zeit  $t$  im Zustand  $|f\rangle$  befindet, durch das Matrixelement  $\langle f | \hat{U}(t, t_0) | i \rangle$  gegeben.

Man definiert die *Streumatrix*  $\hat{S}$ , auch S-Matrix genannt, durch die Angabe deren Matrixelemente

$$S_{fi} \equiv \langle f | \hat{U}(+\infty, -\infty) | i \rangle. \quad (\text{VI.2})$$

Dieser Definition nach sind die wechselwirkungsfreien Anfangs- und Endzustände sog. asymptotische Zustände, die nur in der unendlichen Vergangenheit bzw. in der unendlichen Zukunft zu finden sind.

**Bemerkung:** Man kann zeigen, dass die Streumatrix unitär ist.

Die Berechnung der Streumatrix bzw. deren Elemente erfolgt normalerweise in der Quantenfeldtheorie. Hiernach wird das Prinzip der Berechnung ausgehend von nicht-relativistischer Quantenmechanik illustriert.

### VI.2.2 Zeitabhängige Störungstheorie

In diesem Abschnitt wird die Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude zwischen einem Anfangs- und einem Endzustand eines nicht-relativistischen quantenmechanischen Systems mithilfe der sog. zeitabhängigen Störungstheorie, formuliert im Wechselwirkungsbild, dargestellt.

#### VI.2.2a Wechselwirkungsdarstellung

Ein System sei durch den Hamilton-Operator  $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + g\hat{V}(t)$  beschrieben, wobei  $\hat{H}_0$  zeitunabhängig ist, während der Term  $g\hat{V}(t)$  eine „Wechselwirkung“ beschreibt. Insbesondere kann das System unter dem Einfluss von  $g\hat{V}(t)$  von einem Eigenzustand zu  $\hat{H}_0$  in einen anderen übergehen.

Dabei wird üblicherweise angenommen, dass der Wechselwirkungsterm langsam („adiabatisch“) ein- und ausgeschaltet werden kann — was automatisch zur Zeitabhängigkeit führt —, damit ein Eigenzustand zu  $\hat{H}_0$  auch Eigenzustand zu  $\hat{H}(t)$  zu gegebenen Zeiten  $t$  ist. Solche Feinheiten werden in der kurzen Diskussion dieses Abschnitts ignoriert.<sup>(21)</sup>

<sup>(20)</sup> Dabei stehen die Bezeichnungen  $i$  und  $f$  für „initial“ und „final“.

<sup>(21)</sup> Für eine Diskussion dieser „adiabatischen Näherung“ s. z.B. Griffiths [11] Kap. 10.1.

Um solche Übergangswahrscheinlichkeiten zu berechnen, lohnt es sich, das Problem in der *Wechselwirkungsdarstellung*<sup>(22)</sup> der Quantenmechanik zu betrachten. Diese folgt aus der Schrödinger-Darstellung, indem die zeitabhängigen Zustandsvektoren  $|\psi(t)\rangle_S$  und die (meist) zeitunabhängigen Observablen  $\hat{A}_S$  jeweils durch<sup>(23)</sup>

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S, \quad (\text{VI.3a})$$

und

$$\hat{A}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}, \quad (\text{VI.3b})$$

ersetzt werden.

**Bemerkung:** Dank den Definitionen (VI.3) bleiben Matrixelemente von Operatoren unabhängig von der Wahl der Darstellung: für alle  $|\psi\rangle, |\chi\rangle, \hat{A}$  gilt

$${}_I\langle\chi|\hat{A}_I|\psi\rangle_I = {}_S\langle\chi|\hat{A}_S|\psi\rangle_S.$$

Dies gilt insbesondere für die (messbaren!) Erwartungswerte von Observablen.

Ausgehend von der Schrödinger-Gleichung in der Schrödinger-Darstellung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_S = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle_S$$

zeigt man einfach, dass die Bewegungsgleichung für  $|\psi(t)\rangle_I$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = g\hat{V}_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (\text{VI.4a})$$

mit [vgl. Definition (VI.3b)]

$$\hat{V}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{V}(t) e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \quad (\text{VI.4b})$$

lautet. Somit wird die zeitliche Entwicklung von  $|\psi(t)\rangle_I$  durch den Wechselwirkungsterm  $g\hat{V}_I(t)$  allein bestimmt. Die formale Lösung zur Differentialgleichung (VI.4a) für eine gegebene Anfangsbedingung  $|\psi(t_0)\rangle_I$  lässt sich durch den *Zeitentwicklungsoperator*  $\hat{U}_I(t, t_0)$  ausdrücken:

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I. \quad (\text{VI.5})$$

Setzt man diese Form in Gl. (VI.4a) ein, so findet man, dass  $\hat{U}_I(t, t_0)$  der Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_I(t, t_0)}{\partial t} = g\hat{V}_I(t) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (\text{VI.6a})$$

mit der Anfangsbedingung

$$\hat{U}_I(t_0, t_0) = \hat{\mathbb{1}} \quad (\text{VI.6b})$$

genügt, wobei  $\hat{\mathbb{1}}$  der Identitätsoperator auf dem Hilbert-Raum der Zustandsvektoren ist.

### VI.2.2b Störungsrechnung des Zeitentwicklungsoperators

Die Integration von Gl. (VI.6) nach  $t$  liefert die Integralgleichung

$$\hat{U}_I(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}} + \frac{g}{i\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') \hat{U}_I(t', t_0) dt'. \quad (\text{VI.7})$$

Ersetzt man jetzt  $\hat{U}_I(t', t_0)$  im Integranden durch  $\hat{\mathbb{1}} + \frac{g}{i\hbar} \int_{t_0}^{t'} \hat{V}_I(t'') \hat{U}_I(t'', t_0) dt''$ , so ergibt sich

$$\hat{U}_I(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}} - \frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{V}_I(t') dt' + \mathcal{O}(g^2), \quad (\text{VI.8})$$

d.h. ein Ausdruck des Zeitentwicklungsoperators zur ersten Ordnung in der Kopplung  $g$ .

<sup>(22)</sup>auch *Dirac-Darstellung* genannt.

<sup>(23)</sup>Der Index I steht für „interaction“ (picture).