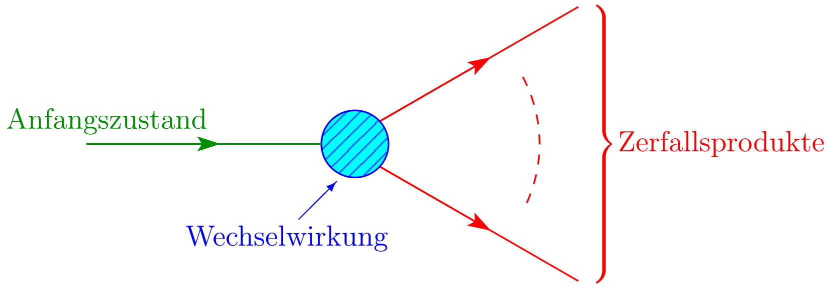
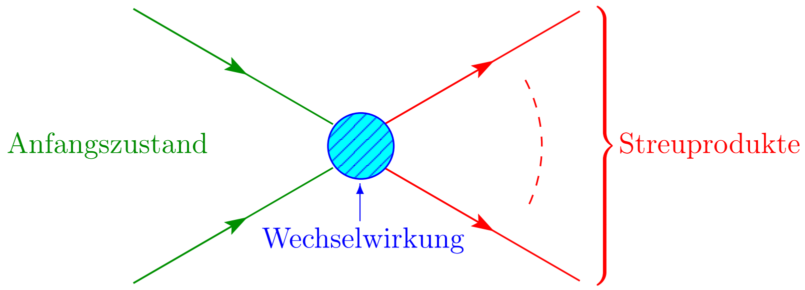
Im Teil A wurden die Gleichungen zur Beschreibung der Bewegung wechselwirkungsfreier relativistischer Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und gegebenenfalls Helizität σ bzw. Polarisation λ dargestellt. Wenn Wechselwirkungen vorhanden sind, können Teilchen an zwei grundlegenden Arten von Prozessen teilnehmen, und zwar an Zerfällen und Streuungen:

– Zerfall:



– Streuung:



In beiden Fällen stellt sich die Frage, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, pro Zeiteinheit vom Anfangszustand in einen gegebenen Endzustand zu übergehen. Dieser Teil befasst sich mit dem geeigneten Formalismus um diese Frage zu beantworten — unabhängig von den eigentlichen Wechselwirkungen — erstens für Zerfälle (Kapitel VI), dann für Streuungen (Kapitel VII).

Insbesondere werden hiernach Ähnlichkeiten zwischen den Ausdrücken der Größen, die für jeden Prozess die Übergangswahrscheinlichkeiten pro Zeiteinheit charakterisieren, gefunden. Tatsächlich weisen diese Größen — Zerfallsrate bzw. Wirkungsquerschnitt — die gleiche mathematische Struktur auf, in der Form von Integralen des Betragsquadrats einer (Wahrscheinlichkeits)Amplitude über den verfügbaren Phasenraum für alle Endzustandsteilchen. Dabei wird die Amplitude letztendlich bestimmt von den für den Prozess relevanten Wechselwirkungen. Diese werden nur im nächsten Teil detailliert behandelt werden, doch die durch Feynman eingeführten Regeln, basierend auf Diagramme, zur Berechnung einer Amplitude werden schon in Kap. VIII dargestellt.

Kapitel V

Relativistische Kinematik

In der (Elementar)Teilchenphysik lassen sich die meisten Prozesse in zwei Kategorien einordnen: zum einen in Zerfälle eines instabilen Teilchens der Masse m in zwei oder mehr leichtere Teilchen, und zum anderen in Stöße zweier Teilchen mit jeweiligen Viererimpulsen p_a und p_b, mit zwei oder mehr Teilchen im Endzustand. Unabhängig von den für diese Prozesse verantwortlichen Wechselwirkungen liefert die Erhaltung des gesamten Viererimpulses — entsprechend den nicht-relativistischen Erhaltungssätzen der Energie und des Impulses — vier Gleichungen, die die Viererimpulse der emittierten Teilchen einschränken.

In diesem Kapitel wird kurz auf diese rein kinematischen Einschränkungen eingegangen, für kinematisch erlaubte (Abschn. V.1) Prozesse mit zwei (Abschn. V.2) oder drei (Abschn. V.3) Teilchen im Endzustand. Schließlich werden in Abschn. V.4 einige Definitionen und ein paar oft auftretende kinematische Variablen eingeführt.

Hiernach werden nur sogenannte „on-Shell-Teilchen" betrachtet, d.h. Teilchen, die den klassischen Bewegungsgleichungen genügen, und insbesondere der Beziehung[14] $E^2 - |\vec{p}|^2c^2 = m^2c^4$ mit der Teilchenmasse m.

V.1 Schwerpunktsenergie, Reaktionsschwelle

Eine wichtige Größe zur Charakterisierung eines Prozesses ist die *Schwerpunktsenergie* oder *verfügbare Energie im Schwerpunktsystem* $E_{\rm cm}$.[15] Dabei ist das Letztere so definiert als das inertiale Bezugssystem, wo der dreidimensionale Gesamtimpuls einer Menge von Teilchen — entsprechend hier dem bzw. den Teilchen vor (oder, dank dem Impulssatz, nach) der Reaktion — verschwindet. In einem Zerfall ist $E_{\rm cm}$ gerade gleich der Massenenergie mc^2 des zerfallenden Teilchens.

Im Fall des Stoßes zweier Teilchen lässt sich $E_{\rm cm}$ durch die Viererimpulse p_a und p_b einfach ausdrücken. Im Schwerpunktsystem gilt tatsächlich definitionsgemäß $\vec{p}_{a,\rm cm} + \vec{p}_{b,\rm cm} = \vec{0}$, woraus

$$\frac{E_{\rm cm}^2}{c^2} = \left(p^0_{a,\rm cm} + p^0_{b,\rm cm}\right)^2 = \left(p^0_{a,\rm cm} + p^0_{b,\rm cm}\right)^2 - \left(\vec{p}_{a,\rm cm} + \vec{p}_{b,\rm cm}\right)^2 = \left(\mathsf{p}_{a,\rm cm} + \mathsf{p}_{b,\rm cm}\right)^2$$

folgt. Da das Lorentz-Quadrat eines Vierervektors ein Lorentz-Skalar ist, bleibt der Term ganz rechts gleich $(\mathsf{p}_a + \mathsf{p}_b)^2$ in jedem Inertialsystem. Somit gilt

$$E_{\rm cm}^2 = (\mathsf{p}_a + \mathsf{p}_b)^2 c^2, \tag{V.1}$$

unabhängig vom Bezugssystem, in welchem p_a und p_b gemessen werden.[16]

[14] Im vierdimensionalen Raum aller möglichen Werte der Energie und der Impulskomponenten stellt diese Beziehung die Gleichung eines Hyperboloids dar, der sogenannten *Massenschale* (mass-shell).
[15] Hier steht die Abkürzung cm für *center-of-mass* — oder, sogar besser: *center-of-momentum (frame)*.
[16] Natürliche müssen beide Viererimpulse im gleichen Bezugssystem gemessen werden!

Ein Prozess ist nur dann kinematisch erlaubt, wenn die verfügbare Energie im Schwerpunktsystem größer als die Summe der Massenenergien der Endzustandsteilchen ist. Für Zerfälle bedeutet diese Bedingung $m > \sum_j m_j$, wobei die m_j die Massen der „Tochterteilchen" sind. Im Fall eines Stoßes soll $(\mathsf{p}_a + \mathsf{p}_b)^2 > (\sum_j m_j)^2 c^2$ gelten.

Die letztere Ungleichung kann auch anders gedeutet werden. Damit der Endzustand eines Zwei-Teilchen-Stoßes aus gegebenen Teilchen mit Massen m_j besteht, muss die Schwerpunktsenergie der Kollision einen Wert überschreiten, die *Reaktionsschwelle* $(\sum_j m_j)^2 c^4$.

Bemerkung: Auch wenn ein gegebener Prozess kinematisch erlaubt ist, ist es noch möglich, dass er aus anderen Gründen nicht stattfinden kann — insbesondere wenn der Prozess weiteren Erhaltungssätzen nicht genügt, z.B. der Erhaltung des Drehimpulses oder der elektrischen Ladung.

V.2 Zwei Teilchen im Endzustand

Besteht der Endzustand eines Prozesses aus nur zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2, so lässt sich dieser mit sechs Parametern beschreiben, entsprechend den Komponenten der Impulse der Teilchen — die Energien der Teilchen sind dann durch die on-shell-Bedingungen $E_j^2 = |\vec{p}_j|^2 c^2 + m_j^2 c^4$ bestimmt. Sei jetzt angenommen, dass der gesamte Viererimpuls p des Anfangszustands bekannt ist. Da die Erhaltung des Viererimpulses vier (unabhängige) Bedingungen darstellt, bleiben tatsächlich nur zwei Freiheitsgrade für den Endzustand, entsprechend z.B. den zwei Winkeln, die die Richtung eines der emittierten Teilchen charakterisieren. Dies wird hiernach am Beispiel des Endzustands eines Zwei-Teilchen-Zerfalls illustriert.[17]

In diesem und im nächsten Abschnitt wird der Zerfall eines unpolarisierten Teilchens betrachtet, so dass der Zerfall isotrop ist. Im Ruhesystem des „Mutterteilchens", entsprechend dem Schwerpunktsystem der Zerfallsprodukte, werden die Letzteren in entgegengesetzte Richtungen emittiert. Es seien

$$\mathsf{p} = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_1 = \begin{pmatrix} E_1/c \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{p}_2 = \begin{pmatrix} E_2/c \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

die Viererimpulse der Mutter- und Tochterteilchen im Schwerpunktsystem. Die Erhaltung des gesamten Viererimpulses

$$\mathsf{p} = \mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2$$

im Zerfall führt sofort zu $(\mathsf{p} - \mathsf{p}_1)^2 = (\mathsf{p}_2)^2 = m_2^2 c^2$. Berechnet man das Lorentz-Quadrat auf der linken Seite unter Berücksichtigung der Gleichungen $\mathsf{p}^2 = m^2 c^2$, $(\mathsf{p}_1)^2 = m_1^2 c^2$ und $\mathsf{p} \cdot \mathsf{p}_1 = m E_1$ — wobei die Letztere nur im Schwerpunktsystem gilt —, so ergibt sich

$$m^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2m E_1 = m_2^2 c^2,$$

d.h.

$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} c^2.$$

In ähnlicher Weise erhält man $E_2 = (m^2 + m_2^2 - m_1^2)\, c^2/2m$. Die Energien E_1 und E_2 im Schwerpunktsystem sind somit unabhängig von den Richtungen der emittierten Teilchen. Diese Eigenschaft gilt in einem anderen Bezugssystem nicht mehr!

Aus dem Ausdruck der Energie und der on-shell-Bedingung folgt für den Betrag des Impulses jedes Tochterteilchens

$$|\vec{p}_j|^2 = \frac{E_j^2}{c^2} - m_j^2 c^2 = \frac{m^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2m^2 m_1^2 - 2m^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2}{4m^2} c^2.$$

[17] Handelt es sich bei dem Prozess um einen Streuprozess, so soll m in allen Gleichungen dieses und des nächsten Abschnitts durch E_{cm}/c^2 ersetzt werden.

Bemerkung: Der Zähler dieses Ausdrucks lässt sich als $[m^2 - (m_1 + m_2)^2][m^2 - (m_1 - m_2)^2]$ umschreiben. Dies ist immer positiv für m größer als $m_1 + m_2$, kann aber wenn $m < m_1 + m_2$ negativ werden, was für ein Betragsquadrat problematisch ist! Hier erkennt man die in Abschn. V.1 diskutierte Bedingung über die Massen der beteiligten Teilchen.

V.3 Drei Teilchen im Endzustand

In einem Prozess mit drei Teilchen im Endzustand existieren auch kinematisch bedingte Einschränkungen, die hier am Beispiel des Zerfalls eines Teilchens der Masse m in drei Teilchen mit Massen m_1, m_2 und m_3 illustriert werden. Seien p, p_1, p_2 und p_3 die jeweiligen Viererimpulse der Teilchen.

Die Erhaltung des gesamten Viererimpuls $\mathsf{p} = \mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 + \mathsf{p}_3$ liefert vier Bedingungen für die 9 Komponenten der Impulse der Zerfallsprodukte, so dass es 5 Freiheitsgrade übrig bleiben. Drei davon entsprechen Winkeln — zwei für die Ebene, in der $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ liegen, und einem für die Richtung von $\vec{p}_1$ in dieser Ebene —, wovon die Energien der emittierten Teilchen im Schwerpunktsystem aus Symmetrie-Gründen nicht abhängen können. Diese Energien hängen nur von den zwei restlichen Freiheitsgraden ab. Für die Letzteren werden üblicherweise zwei der Lorentz-invarianten *Dalitz*[z]*-Variablen* m_{ij}^2 angenommen, wobei

$$\begin{aligned} m_{12}^2 c^2 &\equiv (\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2)^2 = (\mathsf{p} - \mathsf{p}_3)^2, \\ m_{13}^2 c^2 &\equiv (\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_3)^2 = (\mathsf{p} - \mathsf{p}_2)^2, \\ m_{23}^2 c^2 &\equiv (\mathsf{p}_2 + \mathsf{p}_3)^2 = (\mathsf{p} - \mathsf{p}_1)^2, \end{aligned} \tag{V.2}$$

z.B. m_{12}^2 und m_{13}^2. Die Menge der kinematisch erlaubten Werte dieser Variablen ist ein konvexes Gebiet in der (m_{12}^2, m_{13}^2)-Ebene, dessen Grenzen von m, m_1, m_2 und m_3 abhängen.

Aus der Gleichung $m_{12}^2 = (\mathsf{p} - \mathsf{p}_3)^2/c^2 = m^2 + m_3^2 - 2mE_3/c^2$ im Schwerpunktsystem und der Bedingung $E_3/c^2 \geq m_3$ folgt die obere Schranke $m_{12}^2 \leq (m - m_3)^2$. Um eine untere Schranke von m_{12}^2 zu erhalten, kann man ins Schwerpunktsystem des aus Teilchen 1 und 2 bestehenden Teilsystems übergehen. Bezeichnet man die Energien in diesem Bezugssystem mit einem Strich, so gilt

$$m_{12}^2 = (\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2)^2/c^2 = (E_1' + E_2')^2/c^4 \geq (m_1 + m_2)^2,$$

wobei die Ungleichung trivial ist. Somit hat man schließlich $(m_1+m_2)^2 \leq m_{12}^2 \leq (m-m_3)^2$, und ähnlich $(m_1+m_3)^2 \leq m_{13}^2 \leq (m-m_2)^2$ und $(m_2+m_3)^2 \leq m_{23}^2 \leq (M-m_1)^2$. Wegen der Beziehung (V.3) zwischen den Dalitz-Variablen kann bei gegebener m_{12}^2 die Variable m_{13}^2 nicht ihre Werte im ganzen Intervall annehmen, sondern nur in einem kleineren, m_{12}^2-abhängig Bereich. Weitere Details dazu können in der Review of Particle Properties [1], § 47.4.3 & 47.4.4 gefunden werden.

Bemerkungen:

∗ Wegen der Erhaltung des gesamten Viererimpulses sind die Dalitz-Variablen nicht unabhängig voneinander, sondern genügen der Beziehung

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2. \tag{V.3}$$

∗ In einem Drei-Teilchen-Zerfall sind die Energien und Impulse der Zufallsprodukte nicht durch die Kinematik völlig festgelegt, sondern können ein kontinuierliches Spektrum an Werten annehmen,[18] wobei der maximale mögliche Wert der Energie E_1 und somit des Impulses $|\vec{p}_1|$ für Teilchen 1 durch den minimalen möglichen Wert von m_{23} gegeben ist [vgl. $E_1 = (m^2 + m_1^2 - m_{23}^2)c^2/2m$].

[18] Gerade diese Beobachtung hat Wolfgang Pauli 1930 veranlasst, die Existenz des (Anti-)Neutrinos zu postulieren, um das kontinuierliche Energiespektrum der in β-Zerfällen emittierten Elektronen zu erklären.

[z] R. Dalitz, 1925–2006

V.4 Kinematik einfacher Stöße

In diesem Abschnitt werden ein paar Definitionen betreffend Teilchenstöße eingeführt. Wir diskutieren nur Kollisionen zwischen zwei durch a bzw. b gekennzeichneten Teilchen, weil Stöße in einer relativistischen Theorie nur lokal sein können, d.h. die beteiligten Teilchen sollen sich im gleichen Punkt der Raumzeit befinden, was mit mehr als zwei Teilchen praktisch unmöglich wird.

Bekannterweise unterscheidet man zwischen *elastischen Stößen*, in denen die Teilchen im Endzustand die gleichen wie im Anfangszustand bleiben, und *inelastischen Stößen*. Unter den letzteren werden die Stöße mit nur zwei Teilchen (1 und 2) im Endzustand als *quasielastisch* bezeichnet. Zusammen werden elastische und quasielastische Stöße auch *Zwei-nach-zwei-Prozesse* genannt.

Sei $a + b \to 1 + 2$ ein solcher Prozess. Die Massen bzw. die Viererimpulse der Teilchen werden mit m_a, m_b, m_1 und m_2 bzw. p_a, p_b, p_1 und p_2 bezeichnet. Die *Mandelstam*[(aa)]*-Variablen* für den Prozess werden definiert durch

$$\begin{aligned} s &\equiv (\mathsf{p}_a + \mathsf{p}_b)^2/c^2 = (\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2)^2/c^2, \\ t &\equiv (\mathsf{p}_a - \mathsf{p}_1)^2/c^2 = (\mathsf{p}_b - \mathsf{p}_2)^2/c^2, \\ u &\equiv (\mathsf{p}_a - \mathsf{p}_2)^2/c^2 = (\mathsf{p}_b - \mathsf{p}_1)^2/c^2. \end{aligned} \tag{V.4}$$

Die Variable s ist gleich $1/c^4$ mal dem Quadrat der Schwerpunktsenergie E_{cm} der kollidierenden Teilchen, während t den Quadrat des Viererimpuls-Übertrags geteilt durch c^2 darstellt. Im besonderen Fall eines elastischen Stoßes — mit $(\mathsf{p}_1)^2 = (\mathsf{p}_a)^2 = m_a^2 c^2$ und $(\mathsf{p}_2)^2 = (\mathsf{p}_b)^2 = m_b^2 c^2$ — gilt im Schwerpunktsystem $E_a = E_1$, was zu $t = -|\vec{p}_a - \vec{p}_1|^2$ führt.

Definitionsgemäß sind die Mandelstam-Variablen Lorentz-invariant. Sie sind nicht unabhängig voneinander, da im allgemeinen Fall eines Zwei-nach-zwei-Prozesses gilt

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2. \tag{V.5}$$

Im besonderen Fall einer elastischen Kollision lautet diese Gleichung

$$s + t + u = 2m_a^2 + 2m_b^2.$$

Beweis der Beziehung (V.5): Die Definitionen (V.4) liefern

$$s + t + u = 3m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2 + 2\mathsf{p}_a \cdot (\mathsf{p}_b - \mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_2)/c^2.$$

Unter Verwendung des Viererimpulserhaltung gilt $\mathsf{p}_b - \mathsf{p}_1 - \mathsf{p}_2 = -\mathbf{p}_a$, woraus das Ergebnis folgt. □

[(aa)] S. Mandelstam, 1928–2016