V.3.2 Zweite Quantisierung der Wellenlösungen

Wie bei den Lösungen der Klein–Gordon-Gleichung erfolgt die korrekte Deutung der Lösungen der Dirac-Gleichung über die zweite Quantisierung, die jetzt kurz skizziert wird.

V.3.2 a Dirac-Feldoperator

Zunächst wird die allgemeine Lösung der Gleichung geschrieben als Linearkombination aller möglichen ebenen Wellen der Type $u(\vec{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}$ und $v(\vec{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}$ mit jeweiligen komplexwertigen Amplituden:

$$\psi(\mathsf{x}) = \int \sum_{\sigma=\pm} \Big[c_{\vec{p},\sigma}\, u(\vec{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar} + d^*_{\vec{p},\sigma}\, v(\vec{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}\Big] \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}/c}}.$$

In einem zweiten Schritt werden diese komplexen Zahlen $c_{\vec{p},\sigma}$, $d^*_{\vec{p},\sigma}$ durch Operatoren $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$, $\hat{d}^\dagger_{\vec{p},\sigma}$ mit geeigneten Vertauschungsrelationen ersetzt. Man zeigt, da diese Relationen auf *Antikommutatoren* $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ beruhen sollen:

$$\big\{\hat{c}_{\vec{p},\sigma}, \hat{c}^\dagger_{\vec{q},\sigma'}\big\} = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})\,\delta_{\sigma\sigma'}, \quad \big\{\hat{d}_{\vec{p},\sigma}, \hat{d}^\dagger_{\vec{q},\sigma'}\big\} = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})\,\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{V.34a}$$

während alle anderen Antikommutatoren verschwinden: für alle Impulse $\vec{p}$, $\vec{q}$ und σ, $\sigma' \in \{+,-\}$ gelten

$$\big\{\hat{c}_{\vec{p},\sigma}, \hat{c}_{\vec{q},\sigma'}\big\} = \big\{\hat{c}^\dagger_{\vec{p},\sigma}, \hat{c}^\dagger_{\vec{q},\sigma'}\big\} = \big\{\hat{d}_{\vec{p},\sigma}, \hat{d}_{\vec{q},\sigma'}\big\} = \big\{\hat{d}^\dagger_{\vec{p},\sigma}, \hat{d}^\dagger_{\vec{q},\sigma'}\big\} = 0 \tag{V.34b}$$

und ebenfalls für Antikommutatoren mit einem $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$ oder $\hat{c}^\dagger_{\vec{p},\sigma}$ und einem $\hat{d}_{\vec{q},\sigma'}$ oder $\hat{d}^\dagger_{\vec{q},\sigma'}$.

Die Wahl zwischen Kommutatoren — für Teilchen mit ganzzahligem Spin — und Antikommutatoren — für Teilchen mit halbzahligem Spin — ist natürlich nicht beliebig, sondern folgt aus zwei Forderungen. Erstens soll die Energie positiv sein, so dass den Moden mit „negativer Energie“ Erzeugungsoperatoren assoziiert werden sollen. Dazu soll die Theorie lokal sein, d.h. Operatoren bezüglich Raumzeit-Punkte x, x', die durch ein raumartiges Intervall $(\mathsf{x}-\mathsf{x}')^2 < 0$ getrennt sind, sollen miteinander (anti)kommutieren.

Somit lautet der Dirac-Feldoperator

$$\hat{\psi}(\mathsf{x}) = \int \sum_{\sigma=\pm} \Big[\hat{c}_{\vec{p},\sigma}\, u(\vec{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar} + \hat{d}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\, v(\vec{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}\Big] \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}/c}} \tag{V.35a}$$

und dessen Dirac-adjungiertes Feld

$$\hat{\bar{\psi}}(\mathsf{x}) = \int \sum_{\sigma=\pm} \Big[\hat{c}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\, \bar{u}(\vec{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar} + \hat{d}_{\vec{p},\sigma}\, \bar{v}(\vec{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}\Big] \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}/c}}. \tag{V.35b}$$

Dabei gilt $E_{\vec{p}} = p^0 c = \sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m^2c^4}$.

Bemerkungen:

∗ Für jeden Operator $\hat{\mathcal{O}}$ gilt offensichtlich $\hat{\mathcal{O}}^2 = \frac{1}{2}\{\hat{\mathcal{O}},\hat{\mathcal{O}}\}$. Dementsprechend bedeuten die Vertauschungsrelationen (V.34b) mit $\vec{p}=\vec{q}$ und $\sigma=\sigma'$, dass jeder Operator $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$, $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ und ihre hermitesch Konjugierten die Eigenschaft $\big(\hat{c}_{\vec{p},\sigma}\big)^2 = \big(\hat{d}_{\vec{p},\sigma}\big)^2 = \cdots = 0$, wobei 0 hier den „Null-Operator“ bezeichnet.

∗ Die Dimension des Dirac-Feldes lässt sich aus Gl. (V.30a), (V.34a) und (V.35a) erkennen, und zwar $\big[\hat{\psi}\big] = \big[\mathsf{L}^{-3/2}\big]$, wie bei einer Schrödinger-Wellenfunktion. In einem System natürlicher Einheiten hat $\hat{\psi}$ die Dimension von $\mathsf{E}^{3/2}$.

V.3.2 b Hamilton- und Teilchenzahloperator des Dirac-Feldes

Ähnlich wie beim Klein–Gordon-Feld in Abschn. III.3.2 kann man zwei physikalische Operatoren benutzen, um die Deutung der Leiteroperatoren $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$, $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ zu erkennen.

Beispielsweise lautet der mit der Dirac-Gleichung assoziierte Hamilton-Operator [27]

$$\hat{H} = \int \sum_{\sigma=\pm} \left(\hat{c}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\hat{c}_{\vec{p},\sigma} - \hat{d}_{\vec{p},\sigma}\hat{d}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\right) E_{\vec{p}}\, \mathrm{d}^3\vec{p} = \int \sum_{\sigma=\pm} \left[\hat{c}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\hat{c}_{\vec{p},\sigma} + \hat{d}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\hat{d}_{\vec{p},\sigma} - \delta^{(3)}(\vec{0})\right] E_{\vec{p}}\, \mathrm{d}^3\vec{p}. \tag{V.36}$$

Interpretiert man $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$, $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ als Vernichtungsoperatoren, und $\hat{c}^\dagger_{\vec{p},\sigma}$, $\hat{d}^\dagger_{\vec{p},\sigma}$ als Erzeugungsoperatoren, so sind $\hat{c}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$ und $\hat{d}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ Besetzungszahloperatoren: jede Teilchenart trägt positiv zur Gesamtenergie bei. Interessanterweise kommt der Beitrag des Vakuums hier mit einem Minus-Vorzeichen, im Vergleich zum Plus-Vorzeichen in Gl. (III.15).

Bemerkungen:

∗ Die einzigen Eigenwerte der Besetzungszahloperatoren $\hat{c}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$ und $\hat{d}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ sind entweder 0 — entsprechend der Abwesenheit von Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Spinzustand σ — oder 1. Im Gegensatz zu den Teilchenzahloperatoren für Spin-0- oder Spin-1-Teilchen sind höhere Besetzungszahlen in einer Mode hier nicht möglich, entsprechend dem *Pauli-Prinzip*.

Beweis: Sei $\hat{c}$ ein Operator mit den Vertauschungsrelationen $\{\hat{c},\hat{c}^\dagger\} = \hat{\mathbb{1}}$ und $\{\hat{c},\hat{c}\} = \{\hat{c}^\dagger,\hat{c}^\dagger\} = 0$. Der hermitesche Operator $\hat{n} \equiv \hat{c}^\dagger\hat{c}$ kann nur die zwei Eigenwerte 0 und 1 haben.

Für jeden beliebigen Vektor $|\Psi\rangle$ (außer des Null-Vektors) ist $\hat{c}|\Psi\rangle$ Eigenvektor von $\hat{n}$ mit dem Eigenwert 0: aus $\{\hat{c},\hat{c}\} = 0$ folgt nämlich $\hat{c}^2 = 0$, was zu $\hat{n}\hat{c}^\dagger|\Psi\rangle = \hat{c}^\dagger\hat{c}^2|\Psi\rangle = 0$ führt.

Sei $n \neq 0$ ein Eigenwert von $\hat{n}$ und $|n\rangle$ ein zugehöriger Eigenvektor: $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$. Die Anwendung der Gleichung $\hat{n} = \{\hat{c},\hat{c}^\dagger\} - \hat{c}\hat{c}^\dagger = \hat{\mathbb{1}} - \hat{c}\hat{c}^\dagger$ auf $|n\rangle$ gibt $n|n\rangle = |n\rangle - \hat{c}\hat{c}^\dagger|n\rangle$. Dank $n \neq 0$ gilt $|n\rangle = n^{-1}\hat{n}\,|n\rangle$, und somit $\hat{c}\hat{c}^\dagger|n\rangle = n^{-1}\hat{c}\hat{c}^\dagger\hat{c}^\dagger\hat{c}|n\rangle = 0$, wobei die zweite Gleichung aus $(\hat{c}^\dagger)^2 = 0$ folgt. Somit bleibt $n|n\rangle = |n\rangle$, d.h. $n = 1$. □

Allgemeiner lassen sich Teilchen mit ganzzahligem Spin durch kommutierende Operatoren beschreiben, was zu einer Bose[ag]–Einstein-Statistik führt: sie sind also *Bosonen*. Dagegen sollen Teilchen mit halbzahligem Spin durch antikommutierende Operatoren beschrieben werden, und genügen deshalb der Fermi[ah]–Dirac-Statistik: solche Teilchen sind *Fermionen*.

∗ In sogenannten supersymmetrischen Theorien entspricht jedem bosonischen Freiheitsgrad ein fermionischer Freiheitsgrad. Dank den entgegengesetzten Vorzeichen der bosonischen und fermionischen Beiträge zur Vakuumsenergie verschwindet dann die Letztere.

Multipliziert man die Dirac-Gleichung (V.6a) von links mit $\bar{\psi}(\mathsf{x})$, und die Dirac-adjungierte Gleichung (V.19) von rechts mit $\psi(\mathsf{x})$, und addiert man beide Gleichungen, so findet man

$$\mathrm{i}\partial_\mu\left[\bar{\psi}(\mathsf{x})\gamma^\mu\psi(\mathsf{x})\right] = 0.$$

Dies stellt einer Kontinuitätsgleichung für die Viererstromdichte

$$j^\mu_{\mathrm{Dirac}}(\mathsf{x}) \equiv \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\bar{\psi}(\mathsf{x})\gamma^\mu\psi(\mathsf{x}) \tag{V.37}$$

dar, woraus folgt, dass

$$\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\int \bar{\psi}(t,\vec{x})\gamma^0\psi(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Nach zweiter Quantisierung der Wellenlösung und unter Nutzung der Gl. (V.35) findet man

$$\hat{N} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\int \hat{\bar{\psi}}(t,\vec{x})\gamma^0\hat{\psi}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x} = \int \sum_{\sigma=\pm}\left[\hat{c}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\hat{c}_{\vec{p},\sigma} - \hat{d}^\dagger_{\vec{p},\sigma}\hat{d}_{\vec{p},\sigma}\right]\mathrm{d}^3\vec{p}, \tag{V.38}$$

[27] Durch die Feldoperatoren ausgedrückt lautet der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = c\int \hat{\bar{\psi}}(t,\vec{x})\big(-\mathrm{i}\hbar\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + mc\big)\hat{\psi}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x} = c\int \hat{\psi}(t,\vec{x})^\dagger\big(-\mathrm{i}\hbar\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + mc\gamma^0\big)\hat{\psi}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x}.$$

[ag] S. Bose, 1894–1974 [ah] E. Fermi, 1901–1954

d.h. die beiden Teilchenarten tragen mit entgegengesetzten Vorzeichen zur Erhaltungsgröße bei: die mit $\hat{d}$, $\hat{d}^\dagger$-Operatoren beschriebenen Quanten sind die Antiteilchen zu denen, die durch $\hat{c}$, $\hat{c}^\dagger$ beschrieben sind. $\hat{N}$ ist wieder ein Operator, dessen Erwartungswert die Netto-Teilchenzahl ist.

Bemerkung: Im Gegensatz zur 0-Komponente der Klein–Gordon-Viererstromdichte (III.8) ist $j^0_{\rm Dirac}(\mathsf{x})$ immer eine positiv definite reelle Zahl. Somit kann $\rho^0_{\rm Dirac}(\mathsf{x}) \equiv j^0_{\rm Dirac}(\mathsf{x})/c$ als eine Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, ähnlich der mit einer Schrödinger-Wellenfunktion assoziierten Wahrscheinlichkeitsdichte.

Zusammenfassend wirken die verschiedenen Leiteroperatoren wie folgt:

- $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Spinzustand σ, das also im Anfangszustand eines Zerfalls- oder Stoßprozesses vorhanden sein muss. Somit steht dieser Vernichter für ein *einlaufendes Teilchen*.
- $\hat{c}^\dagger_{\vec{p},\sigma}$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Spinzustand σ, das sich also im Endzustand eines Prozesses befinden wird: dieser Erzeugungsoperator repräsentiert ein *auslaufendes Teilchen*.
- $\hat{d}_{\vec{p},\sigma}$ vernichtet ein (in einem Streuprozess) *einlaufendes Antiteilchen* mit Impuls $\vec{p}$ und Spinzustand σ.
- $\hat{d}^\dagger_{\vec{p},\sigma}$ erzeugt ein (in einem Streuprozess) *auslaufendes Antiteilchen* mit Impuls $\vec{p}$ und Spinzustand σ.

Um die Bezeichnung „Spinzustand“ für den Freiheitsgrad σ besser zu motivieren, sollen nun zwei weitere Operatoren eingeführt und diskutiert werden.

V.3.3 Helizität und Chiralität

In diesem Abschnitt werden zwei auf Dirac-Spinoren wirkenden Operatoren diskutiert, und zwar die Helizitäts- und Chiralitätsoperatoren. Um diese Operatoren von denen des § (V.3.2) — die auf die Zustände eines fermionischen Fock-Raums wirken — zu unterscheiden, werden sie ohne Zirkumflex geschrieben, also als einfache 4×4-Matrizen.

V.3.3 a Helizität

Man kann zeigen, dass der Spin einer Lösung der freien Dirac-Gleichung keine Erhaltungsgröße ist, entsprechend der Tatsache, dass der auf Dirac-Spinoren wirkende Spinoperator $\vec{S}$ nicht mit dem Hamilton-Operator kommutiert.[28] Dagegen ist die Komponente des Spins entlang der Bewegungsrichtung, d.h. die Richtung des Impulses $\vec{p}$, erhalten.

Sei $\vec{e}_{\vec{p}} \equiv \vec{p}/|\vec{p}|$ der Einheitsvektor in Bewegungsrichtung eines Dirac-Spinors. Im Folgenden wird der *Helizitätsoperator* definiert als

$$h(\vec{p}) \equiv \vec{e}_{\vec{p}} \cdot \vec{\Sigma} \quad \text{mit} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{V.39}$$

mit den Pauli-Matrizen σ^k. $\vec{\Sigma}$ ist tatsächlich einfach verknüpft mit dem Spinoperator auf Dirac-Spinoren, $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$. Somit ist die Komponente des Spinoperators entlang der Bewegungsrichtung $S_{\vec{p}} = \frac{\hbar}{2}h(\vec{p})$.

Dank der Beziehung $(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \vec{p}^{\,2}\,\mathbb{1}_2$ findet man sofort, dass $[h(\vec{p})]^2 = \mathbb{1}_4$ gilt. Infolgedessen sind die möglichen Eigenwerte von $h(\vec{p})$ gleich ±1. Ist ein Dirac-Spinor ψ Eigenvektor von $h(\vec{p})$, so wird der entsprechende Eigenwert *Helizität* des Spinors genannt: ein Spinor mit Helizität $+1$ bzw. -1 hat also eine Spinkomponente $\frac{\hbar}{2}$ (kurz: $\uparrow$) bzw. $-\frac{\hbar}{2}$ (kurz: $\downarrow$) entlang seines Impulses. Kürzer spricht man noch von Spinoren mit positiver oder negativer Helizität.

[28] Dieser Spinoperator ist gleich $\hbar$ mal dem Generator der Drehungen auf dem durch die Dirac-Spinoren gespannten Vektorraum, vgl. § II.1.3.

Bemerkung: Manchmal (z.B. in Landau & Lifschitz [17] oder Nachtmann [18]) wird die Helizität als Eigenwert des Spinoperators in Bewegungsrichtung definiert, entsprechend dem Erwartungswert des oben eingeführten Operators $S_{\vec{p}}$. Die möglichen Helizitäten sind dann $\pm\frac{\hbar}{2}$ statt ± 1. Jedenfalls bleibt das Vorzeichen der Helizität eines gegebenen Spinors ungeändert.

Seien nun die zwei Operatoren

$$\mathcal{P}_{\pm}^{(h)} \equiv \frac{\mathbb{1}_4 \pm h(\vec{p})}{2}. \tag{V.40}$$

Es gelten die Beziehungen

- $\big[\mathcal{P}_{\pm}^{(h)}\big]^2 = \mathcal{P}_{\pm}^{(h)};$ (V.41a)
- $\mathcal{P}_{+}^{(h)}\mathcal{P}_{-}^{(h)} = \mathcal{P}_{-}^{(h)}\mathcal{P}_{+}^{(h)} = 0;$ (V.41b)
- $\mathcal{P}_{+}^{(h)} + \mathcal{P}_{-}^{(h)} = \mathbb{1}_4.$ (V.41c)

Die Erstere bedeutet, dass $\mathcal{P}_{+}^{(h)}$ und $\mathcal{P}_{-}^{(h)}$ Projektoren sind. Dann lässt sich gemäß Gl. (V.41c) jeder Dirac-Spinor als Summe von einem Spinor des Bildes von $\mathcal{P}_{+}^{(h)}$ und einem Spinor des Bildes von $\mathcal{P}_{-}^{(h)}$ schreiben:

$$\psi = \mathcal{P}_{+}^{(h)}\psi + \mathcal{P}_{-}^{(h)}\psi \equiv \psi_{+}^{(h)} + \psi_{-}^{(h)}.$$

Dank Gl. (V.41b) ist diese Zerlegung eindeutig.

Beispiel: Sei z.B. angenommen, dass $\vec{p}$ entlang der z-Achse ausgerichtet ist: $p^1 = p^2 = 0$, $p^3 = |\vec{p}|$. Dann gilt $h(\vec{p}) = \vec{e}_3 \cdot \vec{\Sigma} = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$. Für einen Dirac-Spinor mit „positiver Energie" führt Gl. (V.25) unter Berücksichtigung der Normierungskonstanten (V.29) zu

$$u(\vec{p},\sigma) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}}/c + mc}\;\xi_\sigma \\ \dfrac{\sigma|\vec{p}|}{\sqrt{E_{\vec{p}}/c + mc}}\;\xi_\sigma \end{pmatrix}.$$

Damit findet man $h(\vec{p})u(\vec{p},\sigma) = \sigma u(\vec{p},\sigma)$: das Vorzeichen der Helizität ist gerade durch σ gegeben, das also direkt mit dem Spin (entlang der Bewegungsrichtung) verknüpft ist. Ähnlicherweise zeigt man für einen Spinor „negativer Energie", dass $h(\vec{p})v(\vec{p},\sigma) = -\sigma v(\vec{p},\sigma)$ ist.

Bemerkung: Betrachtet man jetzt die vier unabhängigen Dirac-Spinoren [Gl. (V.24) und (V.27)]

$$\mathcal{N}_+(\vec{p})(\not{p}+mc)\begin{pmatrix}\xi_+\\0\end{pmatrix},\quad \mathcal{N}_+(\vec{p})(\not{p}+mc)\begin{pmatrix}\xi_-\\0\end{pmatrix},\quad \mathcal{N}_-(\vec{p})(\not{p}-mc)\begin{pmatrix}0\\\xi_-\end{pmatrix},\quad \mathcal{N}_-(\vec{p})(\not{p}-mc)\begin{pmatrix}0\\\xi_+\end{pmatrix},$$

so stellen sie ein Teilchen mit Spin (entlang des Impulses) $\uparrow$, ein Teilchen mit Spin $\downarrow$, ein Antiteilchen mit Spin $\downarrow$, und schließlich ein Antiteilchen mit Spin $\uparrow$ dar. Historisch wurde ein Antiteilchen mit Spin $\downarrow$ (bzw. $\uparrow$) als ein fehlendes Teilchen — ein „Loch" — mit Spin $\uparrow$ (bzw. $\downarrow$) interpretiert, was die gewählte Ordnung der Zustände erklärt.

V.3.3 b Chiralität

Im § V.2.2 wurde der Chiralitätsoperator γ_5 definiert und einige dessen Eigenschaften dargestellt, insbesondere dass dessen Eigenwerte die Werte $+1$ oder -1 annehmen kann. Diese stellen die *Chiralität* der zugehörigen Eigenvektoren dar.

Definiert man jetzt zwei Operatoren

$$\mathcal{P}_{\mathrm{L}} \equiv \frac{\mathbb{1}_4 - \gamma_5}{2} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_{\mathrm{R}} \equiv \frac{\mathbb{1}_4 + \gamma_5}{2}, \tag{V.42}$$

so genügen sie den Beziehungen

- $\big[\mathcal{P}_{\mathrm{L}}\big]^2 = \mathcal{P}_{\mathrm{L}}, \quad \big[\mathcal{P}_{\mathrm{R}}\big]^2 = \mathcal{P}_{\mathrm{R}};$ (V.43a)
- $\mathcal{P}_{\mathrm{L}}\mathcal{P}_{\mathrm{R}} = \mathcal{P}_{\mathrm{R}}\mathcal{P}_{\mathrm{L}} = 0;$ (V.43b)
- $\mathcal{P}_{\mathrm{L}} + \mathcal{P}_{\mathrm{R}} = \mathbb{1}_4.$ (V.43c)

D.h., $\mathcal{P}_\mathrm{L}$ und $\mathcal{P}_\mathrm{R}$ sind Projektoren, und jeder Dirac-Spinor lässt sich eindeutig als Summe eines „linkshändigen“ und eines „rechtshändigen“ Spinors schreiben. Konventionell gilt für Dirac-Spinoren mit positiver Energie, entsprechend Teilchen,

$$u_\mathrm{L}(\vec{p},\sigma) \equiv \mathcal{P}_\mathrm{L} u(\vec{p},\sigma), \quad u_\mathrm{R}(\vec{p},\sigma) \equiv \mathcal{P}_\mathrm{R} u(\vec{p},\sigma), \tag{V.44}$$

was ziemlich natürlich aussieht: linkshändige Teilchen haben die Chiralität -1 und rechtshändige Teilchen die Chiralität $+1$. Für Dirac-Spinoren mit negativer Energie, entsprechend Antiteilchen, definiert man dagegen

$$v_\mathrm{L}(\vec{p},\sigma) \equiv \mathcal{P}_\mathrm{R} v(\vec{p},\sigma), \quad v_\mathrm{R}(\vec{p},\sigma) \equiv \mathcal{P}_\mathrm{L} v(\vec{p},\sigma). \tag{V.45}$$

Das heißt, linkshändige Antiteilchen haben die Chiralität $+1$ und rechtshändige Antiteilchen die Chiralität -1.[(29)]

Dank der Hermizität von γ_5, Gl. (V.16d), sind $\mathcal{P}_\mathrm{L}$ und $\mathcal{P}_\mathrm{R}$ hermitesch. Somit gilt für die Dirac-adjungierten Spinoren unter Verwendung der Relation (V.16b)

$$\bar{u}_\mathrm{L}(\vec{p},\sigma) = u_\mathrm{L}(\vec{p},\sigma)^\dagger\gamma^0 = u(\vec{p},\sigma)^\dagger\mathcal{P}_\mathrm{L}\gamma^0 = u(\vec{p},\sigma)^\dagger\gamma^0\mathcal{P}_\mathrm{R} = \bar{u}(\vec{p},\sigma)\mathcal{P}_\mathrm{R}, \tag{V.46}$$

und ähnlich

$$\bar{v}_\mathrm{R}(\vec{p},\sigma) = \bar{v}(\vec{p},\sigma)\mathcal{P}_\mathrm{R}. \tag{V.47}$$

Kollektiv werden $u_{\mathrm{L}/\mathrm{R}}$, $v_{\mathrm{L}/\mathrm{R}}$ und die Dirac-adjungierten $\bar{u}_{\mathrm{L}/\mathrm{R}}$, $\bar{v}_{\mathrm{L}/\mathrm{R}}$ *chirale Spinoren* genannt.

Bemerkungen:

∗ Der Chiralitätsoperator γ_5 kommutiert im Allgemeinen nicht mit dem Hamilton-Operator eines freien Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens, so dass die Chiralität keine Erhaltungsgröße in der Bewegung des Teilchens ist.

∗ Im Gegensatz wird die Chiralität wichtig in der Beschreibung der schwachen Wechselwirkung sein, weil die Letztere nur auf linkshändige Teilchen bzw. rechtshändige Antiteilchen wirken, d.h. auf Spinoren, die mit $\mathcal{P}_\mathrm{L}$ projiziert werden.

V.3.3 c Helizität und Chiralität masseloser Teilchen

Für masselose Teilchen sind die Helizität und die Chiralität einfach miteinander verbunden. Betrachtet man z.B. wie oben ein Teilchen mit Impuls entlang der z-Achse, dann lautet der entsprechende Spinor

$$u(\vec{p},\sigma) = \sqrt{|\vec{p}|}\begin{pmatrix}\xi_\sigma \\ \sigma\,\xi_\sigma\end{pmatrix},$$

wobei $E_{\vec{p}} = |\vec{p}|c$ benutzt wurde. Dann gilt unter Verwendung der Standard-Darstellung (V.14) des Chiralitätsoperators

$$\gamma_5 u(\vec{p},\sigma) = \sqrt{|\vec{p}|}\begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_\sigma \\ \sigma\,\xi_\sigma\end{pmatrix} = \sqrt{|\vec{p}|}\begin{pmatrix}\sigma\,\xi_\sigma \\ \xi_\sigma\end{pmatrix} = \sigma u(\vec{p},\sigma).$$

Somit ist der Chiralitätseigenwert gleich dem Helizitätseigenwert: ein linkshändiges masseloses Teilchen hat die Helizität -1.

Literatur zum Kapitel V

- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [19], Kap. 7.1–7.3 & 9.7.1.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [18], Kap. 4.1–4.2 & 4.4.
- Schwabl, *Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)* [2], Kap. 5.3, 6 & 11.5–11.6.

[(29)] Die vielleicht nervige Konvention geht wieder auf die Interpretation von Antiteilchen als Löcher — fehlende Teilchen — zurück.