KAPITEL IV

Maxwell-Gleichungen

Dieses Kapitel geht auf die relativistische Wellengleichung für ein wechselwirkungsfreies masseloses Teilchen mit Spin 1 ein. Dabei handelt es sich tatsächlich um die Maxwell-Gleichungen des freien elektromagnetischen Feldes, die in einem ersten Schritt in kovarianter Schreibweise geschrieben werden (Abschn. IV.1). Dann werden die Lösungen zu diesen Gleichungen in Abschn. IV.2 diskutiert, wobei die wichtige Rolle der Eichinvarianz offenbar wird.

IV.1 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Die (klassische) Elektrodynamik ist definitionsgemäß relativistisch kovariant — letztendlich wurden die Lorentz-Transformationen ja so eingeführt, dass sie die Maxwell-Gleichungen invariant lassen. In diesem Abschnitt wird dies explizit gezeigt, und zwar durch die Einführung des elektromagnetischen Viererpotentials und des daraus abgeleiteten Feldstärketensors (§ IV.1.1), mit deren Hilfe die Maxwell-Gleichungen dann ausgedrückt werden (§ IV.1.2).

IV.1.1 Definitionen

Das Skalarpotential $\Phi(t,\vec{x})$ und das Vektorpotential $\vec{A}(t,\vec{x})$ der Elektrodynamik bilden zusammen einen Vierervektor, das *Viererpotential* $\mathsf{A}(\mathsf{x})$, mit den kontravarianten Komponenten

$$\boxed{A^\mu(\mathsf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi(\mathsf{x})/c \\ \vec{A}(\mathsf{x}) \end{pmatrix}.} \tag{IV.1}$$

Ausgehend vom Viererpotential definiert man einen zweimal kontravarianten Lorentz-Tensor $F^{\mu\nu}(\mathsf{x})$, den elektromagnetischen *Feldstärketensor*, als

$$\boxed{F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) \equiv \partial^\mu A^\nu(\mathsf{x}) - \partial^\nu A^\mu(\mathsf{x}).} \tag{IV.2}$$

Unter Nutzung der Beziehungen

$$\vec{\mathscr{E}}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}) - \frac{\partial\vec{A}(t,\vec{x})}{\partial t}, \tag{IV.3a}$$

$$\vec{\mathscr{B}}(t,\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(t,\vec{x}) \tag{IV.3b}$$

prüft man nach, dass die Komponenten des Feldstärketensors einfach mit den Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$ verknüpft sind:

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i = \frac{\mathcal{E}^i}{c},$$
$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\epsilon_{ijk}\mathcal{B}^k.$$

Diese Relationen lassen sich mithilfe der Matrixform des Feldstärketensors zusammenfassen

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathcal{E}_x}{c} & -\frac{\mathcal{E}_y}{c} & -\frac{\mathcal{E}_z}{c} \\ \frac{\mathcal{E}_x}{c} & 0 & -\mathcal{B}_z & \mathcal{B}_y \\ \frac{\mathcal{E}_y}{c} & \mathcal{B}_z & 0 & -\mathcal{B}_x \\ \frac{\mathcal{E}_z}{c} & -\mathcal{B}_y & \mathcal{B}_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{IV.4}$$

wobei die x-Abhängigkeit der Felder der Kürze halber nicht geschrieben wurde.

IV.1.2 Bewegungsgleichungen

Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum — d.h. in Abwesenheit äußerer Quellen — können mithilfe des elektromagnetischen Feldstärketensors als[25]

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = 0 \quad \forall\nu} \tag{IV.5a}$$

und

$$\partial^\mu F^{\nu\rho}(\mathsf{x}) + \partial^\nu F^{\rho\mu}(\mathsf{x}) + \partial^\rho F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = 0 \quad \forall\mu,\nu,\rho. \tag{IV.5b}$$

ausgedrückt werden. Die Letztere — entsprechend der Maxwell–Thomson[w]-Gleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0$ und der Maxwell–Faraday[x]-Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} + \partial\vec{\mathcal{B}}/\partial t = \vec{0}$ — enthält keine Dynamik und folgt sofort aus der Antisymmetrie des Feldstärketensors (IV.2).

Dagegen bestimmt Gl. (IV.5a) die Dynamik der elektrischen und magnetischen Felder — die $\nu = 0$-Komponente entspricht der Maxwell–Gauß[y]-Gleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0$, während die räumlichen Komponenten die Maxwell–Ampère[z]-Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{B}} + c^{-2}\partial\vec{\mathcal{E}}/\partial t = \vec{0}$ darstellen. Benutzt man die Definition (IV.2) des Feldstärketensors, so ergibt sich

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = \partial_\mu\partial^\mu A^\nu(\mathsf{x}) - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu(\mathsf{x}) = \Box A^\nu(\mathsf{x}) - \partial^\nu\big[\partial_\mu A^\mu(\mathsf{x})\big].$$

Bekannterweise sind die Potentiale Φ und $\vec{A}$, und somit A, nicht eindeutig definiert, sondern können gemäß sogenannter *Eichtransformationen*

$$A^\mu(\mathsf{x}) \to A'^\mu(\mathsf{x}) = A^\mu(\mathsf{x}) + \partial^\mu\chi(\mathsf{x}) \tag{IV.6}$$

mit $\chi(\mathsf{x})$ einer skalaren Funktion transformiert werden, ohne die physikalischen Felder $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{B}}$ bzw. den elektromagnetischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ zu ändern. Diese Eichfreiheit kann benutzt werden, um Gleichungen zu vereinfachen.

Zum Beispiel kann man erfordern, dass das Viererpotential der *Lorenz*[aa]*-Eichung*-Bedingung

$$\partial_\mu A^\mu(\mathsf{x}) = 0 \tag{IV.7}$$

genügt. Unter dieser Forderung lauten die freien Maxwell-Gleichungen (IV.5a) einfach

$$\Box A^\nu(\mathsf{x}) = 0. \tag{IV.8}$$

[25] In Anwesenheit einer äußeren Ladungsdichte $\rho(t,\vec{x})$ bzw. einer Ladungsstromdichte $\vec{\jmath}(t,\vec{x})$ bilden die beiden eine *elektrische Viererstromdichte* mit kontravarianten Komponenten $j^\mu = (\rho c, \vec{\jmath})^T$ und die Maxwell-Gleichungen (IV.5a) lauten dann $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$.

[w] W. Thomson, Lord Kelvin, 1824–1907 [x] M. Faraday, 1791–1867 [y] C. F. Gauss, 1777–1855
[z] A.-M. Ampère, 1775–1836 [aa] L. Lorenz, 1829–1891

Somit sind die Maxwell-Gleichungen ziemlich ähnlich der Klein–Gordon-Gleichung (III.4), für den Fall masseloser Teilchen. Da $A^\mu(\mathsf{x})$ sich wie ein (kontravarianter) Vierervektor transformiert, handelt es sich um Teilchen mit dem Spin 1.

Bemerkungen:

∗ Für massive Teilchen mit dem Spin 1, beschrieben durch ein Vektorfeld $V^\mu(\mathsf{x})$, heißt die relativistische Wellengleichung

$$\left(\hbar^2\Box + m^2c^2\right)V^\mu(\mathsf{x}) = 0 \tag{IV.9}$$

Proca[ab]*-Gleichung*, wobei m die Teilchenmasse bezeichnet. Wegen des Massenterms besitzt aber das Vektorfeld $V^\mu(\mathsf{x})$ keine Eichfreiheit mehr.

∗ Die Lorenz-Eichung-Bedingung (IV.7) bestimmt noch nicht das Viererpotential eindeutig. Es gibt noch eine Eichfreiheit um einen Vierergradienten $\partial^\mu\chi(\mathsf{x})$, wobei $\chi(\mathsf{x})$ eine Lösung von $\Box\chi(\mathsf{x}) = 0$ ist. In Abwesenheit äußerer Quellen kann diese Freiheit benutzt werden, um die temporale *Weyl*[ac]*-Eichung*-Bedingung

$$A^0(\mathsf{x}) = 0 \tag{IV.10}$$

zu erfordern. Dann wird die Lorenz-Eichung äquivalent zur *Coulomb*[ad]*-Eichung*

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{x}) = 0. \tag{IV.11}$$

IV.2 Lösung der freien Maxwell-Gleichungen

In diesem Abschnitt werden die Lösungen der Maxwell-Gleichungen im freien Raum (IV.8) unter Berücksichtigung der (Eichung-)Bedingungen (IV.10) und (IV.11) untersucht. Dabei sollen die Lösungen reellwertig sein, damit die physikalischen elektrischen und magnetischen Felder ebenfalls reelle Werte annehmen.

IV.2.1 Allgemeine Lösung der Maxwell-Wellengleichung

Anknüpfend an die Ergebnisse des Abschn. III.2 über die Lösungen der freien Klein–Gordon-Gleichung kann man die allgemeine Lösung der Gl. (IV.8) schreiben als eine Überlagerung ebener Wellen mit unterschiedlichen Wellenvektoren [vgl. Gl. (III.7)]

$$A^\mu(\mathsf{x}) = \int\sum_\lambda \varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})\left[a^{(\lambda)}_{\vec{p}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar} + a^{(\lambda)*}_{\vec{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}\right]\frac{\hbar c\,\mathrm{d}^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}}, \tag{IV.12}$$

mit dem (reellen) *Polarisationsvektor* $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})$ für jeden *Polarisationszustand* λ. Dabei ist die zeitliche Komponente des Viererimpulses p durch

$$p^0 \equiv \frac{E_{\vec{p}}}{c} \equiv |\vec{p}| \tag{IV.13}$$

gegeben, entsprechend dem Grenzwert $m = 0$ in der Dispersionsrelation für die Lösungen der Klein–Gordon-Gleichung.

Die Bedingung $A^0(\mathsf{x}) = 0$ gibt sofort $\varepsilon^0_{(\lambda)}(\vec{p})$ für jeden Impuls $\vec{p}$ und Polarisationszustand λ. Dann führt die Coulomb-Eichung-Bedingung $\partial_j A^j(\mathsf{x}) = 0$ dank $\partial_j\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar} = -\mathrm{i}p_j\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}/\hbar$ zu

$$p_j\varepsilon^j_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0,$$

d.h. der dreidimensionale Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}_{(\lambda)}(\vec{p})$ ist senkrecht zur Propagationsrichtung der Welle: die freie Welle wird als *transversal polarisiert* bezeichnet.

[ab] A. Proca, 1897–1955 [ac] H. Weyl, 1885–1955 [ad] C.-A. de Coulomb, 1736–1806

Für jeden Impuls $\vec{p}$ gibt es zwei linear unabhängige Lösungen von $\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0$. Ist $\vec{p}$ z.B. in z-Richtung gerichtet, so findet man die möglichen unabhängigen Polarisationsvektoren

$$\vec{\varepsilon}_{(1)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\varepsilon}_{(2)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Natürlich sind andere Wahlen der Basisvektoren möglich. Wichtig ist, das es für jeden Impuls $\vec{p}$ nur zwei unabhängige Freiheitsgrade gibt, entsprechend den zwei möglichen Polarisationsrichtungen.

> Naiv könnte man vier Freiheitsgrade erwarten, entsprechend der Zahl der Komponenten eines Vierervektors. Da Gl. (IV.12) es erlaubt, die Normierung des Polarisationsvektors frei zu wählen — in den Beispielen oben wurde $\varepsilon^{\mu}_{(\lambda)}(\vec{p})$ auf -1 normiert —, bleiben nur drei Freiheitsgrade. Dies wäre ja zufriedenstellend, denn ein Teilchen mit Spin 1 besitzt normalerweise drei Freiheitsgrade: für $j = 1$ sind $m_j = -1$, 0 und $+1$ möglich. Für masselose Teilchen mit Spin 1 existiert aber die Eichfreiheit, so dass einer dieser Freiheitsgrade tatsächlich keine Dynamik enthält, und nur zwei dynamische Spinzustände bleiben.
>
> Ist das Teilchen mit Spin 1 massiv, und somit beschrieben durch die Proca-Gleichung (IV.9), so gibt es keine Eichfreiheit mehr, und es bleiben drei Spinzustände.

In einem echten Teilchenstoß-Experiment ist die Polarisation bzw. der Spin der einlaufenden und auslaufenden Teilchen nicht immer gemessen. Somit wird es sich lohnen, über Polarisationen summieren zu können, d.h. den Tensor

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^{\mu}_{(\lambda)}(\vec{p}) \varepsilon^{\nu}_{(\lambda)}(\vec{p})$$

zu berechnen. Diese Summe wird als *Vollständigkeitsrelation* bezeichnet. In Coulomb-Eichung gilt

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^{i}_{(\lambda)}(\vec{p}) \varepsilon^{j}_{(\lambda)}(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^{\,2}} \quad \text{für } i,j = 1,2,3, \tag{IV.14}$$

während jede Komponente des Tensors mit entweder $\mu = 0$ oder $\nu = 0$ verschwindet.

IV.2.2 Zweite Quantisierung der Maxwell-Wellenfunktion

Führt man jetzt die zweite Quantisierung der allgemeinen Lösung (IV.12) durch, indem die komplexen Amplituden $a^{(\lambda)}_{\vec{p}}$ durch Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}$ mit den Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{(\lambda')\,\dagger}_{\vec{q}}\right] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \qquad \left[\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{(\lambda')}_{\vec{q}}\right] = \left[\hat{a}^{(\lambda)\,\dagger}_{\vec{p}}, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}_{\vec{q}}\right] = 0 \tag{IV.15}$$

ersetzt werden, so erhält man den Feldoperator

$$\hat{A}^{\mu}(\mathsf{x}) = \int \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^{\mu}_{(\lambda)}(\vec{p}) \left[\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar} + \hat{a}^{(\lambda)\,\dagger}_{\vec{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}\right] \frac{\hbar c\, \mathrm{d}^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}}. \tag{IV.16}$$

Verglichen mit dem Feldoperator (III.11a) gibt es hier keinen Operator des $\hat{b}$-Typs, entsprechend der Hermitizität von $\hat{A}^{\mu}(\mathsf{x})$ bzw. der Reellwertigkeit dessen Vakuumserwartungswerts $A^{\mu}(\mathsf{x})$. Es gibt also kein unabhängiges Antiteilchen zu dem durch $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}$ beschriebenen Teilchen — z.B., wenn $\hat{a}^{(\lambda)\,\dagger}_{\vec{p}}$ ein Quantum des elektromagnetischen Feldes, ein *Photon*, mit der Polarisation λ erzeugt, bedeutet dies, dass es kein Antiphoton gibt: das Photon ist sein eigenes Antiteilchen.

Die Operatoren $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}$, $\hat{a}^{(\lambda)\,\dagger}_{\vec{p}}$ lassen sich wie in Abschn. III.3 interpretieren:

- $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}_{(\lambda)}(\vec{p})$, das also im Anfangszustand eines Stoßprozesses vorhanden sein muss. Somit repräsentiert dieser Vernichtungsoperator ein *einlaufendes Teilchen*.

- $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)\dagger}$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Polarisation λ, das sich also im Endzustand einer Streuung befinden wird: dieser Erzeuger repräsentiert ein *auslaufendes Teilchen*.

Bemerkung: Der erste Kommutator (IV.15) liefert die Dimension der Leiteroperatoren $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)}$, $\hat{a}_{\vec{p}}^{(\lambda)\dagger}$, und somit die Dimension des Vektorfelds $\hat{A}^\mu(\mathsf{x})$, Gl. (IV.16). Wie im Fall des Klein–Gordon-Feldes gilt $\big[\hat{A}^\mu\big] = \big[\mathsf{M}^{1/2}\,\mathsf{L}^{1/2}\,\mathsf{T}^{-1}\big]$: dies entspricht nicht der üblichen Dimension des elektromagnetischen Potentials, lässt sich aber einfacher auf andere Vektorfelder verallgemeinern.

Literatur zum Kapitel IV

- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [19], Kap. 7.4.
- Landau & Lifschitz, *Band IV: Quantenelektrodynamik* [17], Kap. I § 2–4.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [18], Kap. 7.1.