III.2 Lösung der freien Klein–Gordon-Gleichung

In diesem Abschnitt wird zunächst die Form der allgemeine Lösung der freien Klein–Gordon-Gleichung (III.4) hergeleitet (§ III.2.1). Der Versuch, der allgemeinen Form für die Klein–Gordon-Wellenfunktion $\phi(\mathsf{x})$ eine ähnliche physikalische Deutung wie die der Schrödinger-Wellenfunktion zu geben, scheitert aber schnell (§ III.2.2).

III.2.1 Allgemeine Lösung

Da die Klein–Gordon-Gleichung eine lineare partielle Differentialgleichung ist, kann man als Lösungsansatz eine ebene Welle

$$\phi(\mathsf{x}) = \mathcal{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{k}\cdot\mathsf{x}}$$

mit einer Amplitude $\mathcal{N}$ annehmen. Unter Nutzung von $\mathsf{k}\cdot\mathsf{x} = k_\mu x^\mu = k^\mu x_\mu$ ergibt das Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (III.4)

$$\left(-\hbar^2 k_\mu k^\mu + m^2c^2\right)\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{k}\cdot\mathsf{x}} = 0.$$

Damit dies in jedem Raumzeitpunkt x gilt, soll die Dispersionsrelation

$$k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2c^2/\hbar^2}$$

erfüllt werden. Das heißt, für jeden Wert des Wellenvektors $\vec{k}$ kann die Zeitkomponente k^0 zwei verschiedene Werte annehmen.

Eine allgemeine Lösung der Klein–Gordon-Gleichung ist eine Linearkombination solcher ebenen Wellen mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Um die beiden möglichen Vorzeichen von k^0 einfacher zu berücksichtigen, bezeichnet man

$$\omega_{\vec{k}} \equiv +c\sqrt{\vec{k}^2 + m^2c^2/\hbar^2}. \tag{III.6}$$

Dann lautet die allgemeine Lösung

$$\phi(t,\vec{x}) = \int\left[\mathcal{N}_+(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t+\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} + \mathcal{N}_-(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t+\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3},$$

wobei das Integral über alle Werte $\vec{k}\in\mathbb{R}^3$ läuft. Unter Nutzung der offensichtlichen Eigenschaft $\omega_{-\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}$ gibt die Substitution $\vec{k}\to-\vec{k}$ im zweiten Summanden

$$\phi(t,\vec{x}) = \int\left[\mathcal{N}_+(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t+\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} + \mathcal{N}_-(-\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}.$$

Führt man nun die Substitutionen $\vec{k}\to\vec{p}/\hbar$ und $\omega_{\vec{k}}\to p^0c/\hbar \equiv E_{\vec{p}}/\hbar$ durch — somit sind p^0 und $E_{\vec{p}}$ definitionsgemäß nicht-negativ —, so gilt einerseits

$$\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x} \to \frac{\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}}{\hbar},$$

wobei die eingeführten Größen p^0 und $\vec{p}$ zu einem Vierervektor p kombiniert wurden. Dank Gl. (III.6) genügt der Letztere der Beziehung $\mathsf{p}^2 = m^2c^2$.
Dazu kann man noch die bisher nicht präzisierten Koeffizienten $\mathcal{N}_+(\vec{k})$, $\mathcal{N}_-(-\vec{k})$ durch neue Koeffizienten $a_{\vec{p}}$, $b_{\vec{p}}$ wie folgt ersetzen[20]

$$\mathcal{N}_+(\vec{k}) \to \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}\hbar c}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\,a_{\vec{p}}, \qquad \mathcal{N}_-(-\vec{k}) \to \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}\hbar c}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\,b^*_{\vec{p}}.$$

[20] Die auf den ersten Blick willkürlich aussehenden Faktoren von $\hbar$, c oder $E_{\vec{p}}$ werden später in Abschn. III.3 zu einfacheren Gleichungen führen.

Die allgemeine Lösung der Klein–Gordon-Gleichung (III.4) wird dann zu

$$\boxed{\phi(\mathsf{x}) = \int \left[a_{\vec{p}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar} + b^*_{\vec{p}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}\right] \frac{\hbar c\, \mathrm{d}^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}},} \tag{III.7}$$

wobei das Integral über alle Werte $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ läuft.

Wenn $a_{\vec{p}}$ und $b_{\vec{p}}$ für jeden Wert von $\vec{p}$ unabhängig voneinander sind, dann ist das Skalarfeld $\phi(\mathsf{x})$ komplexwertig, entsprechend zwei reellen Freiheitsgraden. Ein solches Feld beschreibt z.B. geladene Pionen $\pi^\pm$. Dagegen ist $\phi(\mathsf{x})$ reellwertig wenn $a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}}$ für jeden $\vec{p}$, entsprechend einem einzigen Freiheitsgrad: dies beschreibt z.B. neutrale Pionen π^0.

III.2.2 Teilchen-Interpretation der Klein–Gordon-Wellenfunktion

Sucht man jetzt nach einer speziellen Lösung, die ein einziges Teilchen mit Masse m und Impuls $\vec{q}$ beschreibt, so trifft man auf eine Schwierigkeit.

In der Tat führen die natürlichen Versuche $a_{\vec{p}} \propto \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})$ oder $b_{\vec{p}} \propto \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})$ jeweils zu Lösungen $\phi(t,\vec{x}) \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{q}}\,t/\hbar+\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}$ oder $\phi(t,\vec{x}) \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{q}}\,t/\hbar-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}$. Die Letztere könnte aber auch ein Teilchen mit negativer Energie $-E_{\vec{q}}$ und Impuls $-\vec{q}$ beschreiben, was physikalisch unannehmbar ist: wenn Teilchen mit negativer Energie existieren, dann kann man immer die Energie des Universums durch die Erzeugung neuer Teilchen reduzieren, und das Universum wird instabil.

Dieses Problem lässt sich anders betrachten. Sei $\phi(\mathsf{x})$ eine Lösung der Klein–Gordon-Gleichung. Definiert man dann einen Viererstrom (genauer, eine Viererstromdichte) durch(21)

$$j^\mu_{\mathrm{KG}}(\mathsf{x}) \equiv \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left[\phi(\mathsf{x})^*\partial^\mu\phi(\mathsf{x}) - \phi(\mathsf{x})\partial^\mu\phi(\mathsf{x})^*\right] \equiv \begin{pmatrix} c\rho_{\mathrm{KG}}(t,\vec{x}) \\ \vec{\jmath}_{\mathrm{KG}}(t,\vec{x}) \end{pmatrix}, \tag{III.8}$$

so findet man

$$\partial_\mu j^\mu_{\mathrm{KG}}(\mathsf{x}) = \frac{\partial\rho_{\mathrm{KG}}(t,\vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}_{\mathrm{KG}}(t,\vec{x}) = 0. \tag{III.9}$$

Dies hat die allgemeine Form einer *Kontinuitätsgleichung* — wie z.B. jene der Elektrodynamik. Damit prüft man einfach nach, dass das Integral

$$\int \rho_{\mathrm{KG}}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

Beweis der Gl. (III.9):
Multipliziert man die Klein–Gordon-Gleichung (III.4) links mit $\mathrm{i}\phi(\mathsf{x})^*$ und subtrahiert man davon das Produkt von $\mathrm{i}\phi(\mathsf{x})$ mit der komplex konjugierten Gleichung zu Gl. (III.4), so ergibt sich (die x-Abhängigkeit wird der Kürze halber nicht geschrieben)

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{i}\phi^*\left(\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2\triangle + m^2c^2\right)\phi - \mathrm{i}\phi\left(\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2\triangle + m^2c^2\right)\phi^* \\ &= \frac{\hbar^2}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{i}\left(\phi^*\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{1}{c}\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)\right] + \hbar^2\vec{\nabla}\cdot\left[-\mathrm{i}\left(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*\right)\right], \end{aligned}$$

entsprechend bis auf einen Faktor $1/2m\hbar$ der Gleichung (III.9). □

(21) Der Faktor $\hbar/2m$ wurde eingeführt in Ähnlichkeit mit der Definition der Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\vec{\jmath}_{\mathrm{Schr.}} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\right)$$

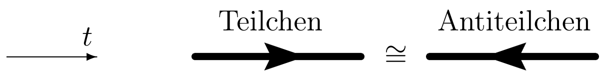
der Schrödinger-Gleichung.

In Anlehnung an den nicht-relativistischen Formalismus möchte man $\rho_{\rm KG}(t,\vec{x})$ bzw. $\vec{j}_{\rm KG}(t,\vec{x})$ als eine Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. eine Wahrscheinlichkeitsstromdichte interpretieren.[22] Im Fall einer ebenen Welle $\phi(\mathsf{x}) = \mathcal{N}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}$ findet man aber $j^\mu_{\rm KG}(\mathsf{x}) = \pm|\mathcal{N}|^2 p^\mu/m$. Für eine Lösung in $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}$, d.h. mit negativer Energie, gilt somit $\rho_{\rm KG} < 0$, was für eine Wahrscheinlichkeitsdichte nicht gelten darf.

Diese Lösungen mit negativer Energie — die man nicht einfach wegwerfen darf, da $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}$ eine ebenso gültige Lösung der Klein–Gordon Gleichung wie $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}$ ist — haben historisch viel Verwirrung verursacht.

Die triviale Gleichung $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}E_{\vec{p}}\,t/\hbar} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{p}}(-t)/\hbar}$ deutet eine mögliche problemlose Deutung der Lösungen mit negativer Energie an, die auf Stückelberg[o] and Feynman[p] zurückgeht. Somit wird in dieser *Feynman–Stückelberg-Interpretation* ein Teilchen mit negativer Energie ($\mathrm{e}^{+\mathrm{i}E_{\vec{p}}\,t/\hbar}$) als ein Teilchen mit positiver Energie, das rückwärts in der Zeit propagiert, interpretiert. In einem zweiten Schritt wird das Letztere als ein Antiteilchen mit positiver Energie, das sich vorwärts in der Zeit bewegt, angesehen.

Bildlich lässt sich die Äquivalenz zwischen Teilchen, die vorwärts in Zeit propagieren, und deren Antiteilchen, die rückwärts propagieren, so darstellen:



Um die anscheinende Willkür dieser Interpretation etwa zu begründen, wird jetzt die korrekte Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen, basierend auf Quantenfeldern, jetzt eingeführt.

[22] Eigentlich sollte $j^\mu_{\rm KG}$ noch durch $\hbar c$ geteilt werden, um die passende physikalische Dimension für eine solche Interpretation zu erhalten. Die Schrödinger- und die Klein–Gordon-Wellenfunktion haben nämlich nicht die gleiche Dimension, vgl. Bemerkung am Ende des § III.3.2.

[o] E. Stückelberg, 1905–1984 [p] R. P. Feynman, 1918–1988