KAPITEL III

Klein–Gordon-Gleichung

Dieses Kapitel und die zwei darauf folgenden befassen sich mit relativistischen Wellengleichungen, und zwar für Teilchen mit dem Spin 0 (hiernach), $\frac{1}{2}$ (Kap. **??**) oder 1 (Kap. IV). In jedem dieser Fälle lässt sich ein solcher auf Wellenfunktionen basierter Formalismus sinnvoll nur auf *wechselwirkungsfreie* (oder kurz: freie) Teilchen anwenden — in Anwesenheit von Wechselwirkungen können nämlich Teilchen im relativistischen Regime leicht erzeugt werden, oder sie können zerfallen, was mit Wellenfunktionen nicht beschrieben werden kann.

Zunächst wird in Abschn. III.1 die freie Klein–Gordon-Gleichung eingeführt, deren Lösungen dann in Abschn. III.2 diskutiert werden. Die physikalische Deutung einiger dieser Lösungen führt zu Schwierigkeiten, die sich am besten im Rahmen einer quantenfeldtheoretischen Beschreibung vermeiden lassen. Somit werden in Abschn. III.3 einige Elemente der zweiten Quantisierung der Klein–Gordon-Wellenfunktion kurz dargestellt.

III.1 Heuristische Herleitung

Bekannterweise lautet die Schrödinger[(j)]-Wellengleichung in Ortsdarstellung für ein nicht-relativistisches freies Teilchen mit der Masse m

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi(t,\vec{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi(t,\vec{x}) \tag{III.1}$$

mit dem Laplace[(k)]-Operator $\triangle = \vec{\nabla}^2$. Diese Gleichung folgt aus der nicht-relativistischen Energie–Impuls-Beziehung $E = \vec{p}^{\,2}/2m$, wenn die Energie E und der Impuls $\vec{p}$ jeweils durch die auf Wellenfunktionen wirkenden Differentialoperatoren $\mathrm{i}\hbar\partial/\partial t$ und $-\mathrm{i}\hbar\vec{\nabla}$ ersetzt werden. Dazu liefert das Betragsquadrat $|\psi(t,\vec{x})|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass sich das Teilchen zur Zeit t im Punkt t befindet.

Wendet man jetzt — nach Schrödinger, vgl. [14], Gl. (34)–(36) — diese Korrespondenz auf die relativistische Energie–Impuls-Relation $E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2 = m^2c^4$ an, so ergibt sich die Wellengleichung

$$\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 c^2 \triangle\right) \phi(t,\vec{x}) = m^2c^4 \phi(t,\vec{x}). \tag{III.2}$$

Diese Gleichung wird (wechselwirkungsfreie) *Klein*[(l)]*–Gordon*[(m)]*-Gleichung* genannt [15, 16].

(j) E. Schrödinger, 1887–1961 (k) P.-S. Laplace, 1749–1827 (l) O. Klein, 1894–1977 (m) W. Gordon, 1893–1939

In relativistischer Notation gilt

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle = \partial_0\partial^0 + \partial_i\partial^i = \partial_\mu\partial^\mu \equiv \Box, \tag{III.3}$$

mit dem *d'Alembert*[(n)]*-Operator* $\Box$. Der Letztere offenbar relativistisch kovariant ist, denn es handelt sich um ein Lorentz-Quadrat. Dann lautet die Klein–Gordon-Gleichung (III.2) in relativistisch kovarianter Schreibweise

$$\boxed{\left(\hbar^2\Box + m^2c^2\right)\phi(\mathsf{x}) = 0.} \tag{III.4}$$

Dank der Lorentz-Kovarianz des d'Alembert-Operators ist das Verhalten dieser Gleichung unter einer beliebigen Lorentz-Transformation $\mathsf{x} \to \mathsf{x}'$ völlig bestimmt durch das Verhalten der Wellenfunktion $\phi(\mathsf{x})$ unter der Transformation. Falls sich die Letztere gemäß $\phi(\mathsf{x}) \to \phi'(\mathsf{x}') = \phi(\mathsf{x})$ transformiert, stellt die Klein–Gordon-Gleichung auch eine skalare Gleichung dar. In diesem Fall ist $\phi(\mathsf{x})$ ein Lorentz-Skalar, entsprechend einem Teilchen mit Spin 0.

Bemerkungen:

$*$ Die Korrespondenzen $E \to \mathrm{i}\hbar\partial/\partial t$, $\vec{p} \to -\mathrm{i}\hbar\vec{\nabla}$ lassen sich kurz als

$$p^\mu \to \mathrm{i}\hbar\partial^\mu \tag{III.5}$$

zusammenfassen. Wird dies in $p_\mu p^\mu = m^2c^2$ eingesetzt, so folgt Gl. (III.4) sofort.

$*$ Statt von der Beziehung $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4$ auszugehen, könnte man die Korrespondenz in die genauere Gleichung $E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$ einsetzen, da die Energie eines Teilchens positiv sein soll. Wendet man aber den auf der rechten Seite resultierenden Differentialoperator $\sqrt{m^2c^4 - \hbar^2c^2\triangle}$ auf Wellenfunktionen an, so ergeben sich Ortsableitungen der Letzteren beliebiger Ordnung, entsprechend einer nicht-lokalen Gleichung, was unbefriedigend ist.

$*$ Eine Lösung $\phi(\mathsf{x})$ der Klein–Gordon-Gleichung kann entweder reell- oder komplexwertig sein. Die Möglichkeiten werden im nächsten Abschnitt anhand der allgemeinen Lösung der Gleichung (III.4) weiter diskutiert.

[(n)] J. le Rond d'Alembert, 1717–1783