Kapitel II

Spezielle Relativitätstheorie

Ich möchte dieses Kapitel modifizieren, und zwar mindestens eine längere Einleitung hinzufügen. N.B.

In diesem Kapitel werden einige Elemente der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) dargestellt. Das Ziel dabei ist hauptsächlich, ein paar Definitionen und Ergebnisse zu sammeln, die für die Elementarteilchenphysik relevant sind, sowie Notationen einzuführen. Insbesondere wird angenommen, dass die Leserin bzw. der Leser schon ausführlichere Kenntnisse zur SRT hat — z.B. zur Bedeutung von Lorentz-Transformationen oder zu dazugehörigen physikalischen Effekten wie Lorentz-Kontraktion oder Zeitdilatation.(4)

In einem ersten Schritt (Abschn. II.1) wird der Fall des mehr intuitiven dreidimensionalen euklidischen Raums der nicht-relativistischen Physik diskutiert, beginnend mit dessen Isometrien, dann über die mathematischen Größen, die sich unter solchen Isometrien einfach transformieren, bis hin zur unterliegenden Algebra der Gruppe der Drehungen. Abschnitt II.2 befasst sich dann mit dem Minkowski-Raum der relativistischen Physik und mit dessen Lorentz-Transformationen. Schließlich wird in Abschn. II.3 das Verhalten physikalischer Größen unter solchen Lorentz-Transformationen diskutiert.

II.1 Isometrien des dreidimensionalen euklidischen Raums

Dieser Abschnitt fasst einige Ergebnisse über Isometrien, insbesondere Drehungen, des dreidimensionalen Raums $\mathscr{E}_3$ der klassischen nicht-relativistischen Physik zusammen. Dabei wird $\mathscr{E}_3$ als einen reellen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ betrachtet.

Zunächst werden Isometrien definiert und die charakteristische Eigenschaft deren Darstellungsmatrizen eingeführt (§ II.1.1). Dann befasst sich § II.1.2 mit den mathematischen Größen mit einem

(4) Am Ende des Kapitels werden einige Literaturhinweise angegeben, in denen der hier weggelassene Stoff behandelt wird.

wohldefinierten Verhalten unter der Wirkung beliebiger Isometrien. Einige Elemente der Theorie der linearen Darstellungen der Drehgruppe, die der Existenz dieser Größen zugrunde liegt, werden in § II.1.3 dargelegt. Schließlich werden noch Spinoren und ihre Transformation unter Drehungen eingeführt (§ II.1.4).

Streng genommen ist das Lesen dieses Abschnitts keine notwendige Voraussetzung für den Rest des Kapitels bzw. des Skripts. Das Ziel ist, die Einführung von Skalaren, Vektoren, Spinoren, usw. — die in der Teilchenphysik vorkommen — irgendwie zu erklären. Dabei ist eine Argumentation im Rahmen des dreidimensionalen euklidischen Raums vielleicht einfacher zu akzeptieren, als wenn man direkt in der relativistischen Raumzeit arbeitet. Die in Abschn. II.2 und II.3 eingeführten Begriffe und mathematischen Größen können dann in Analogie zur nicht-relativistischen Konstruktion gesehen werden.

II.1.1 Isometrien

Sei eine lineare Abbildung vom dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathscr{E}_3$ in sich selbst der Form

$$\vec{x} \to \vec{x}\,' = \mathscr{R}(\vec{x}). \tag{II.1}$$

Die *Isometrien* sind solche Abbildungen, die das euklidische Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{x}$ invariant lassen. Darunter sind z.B. die Translationen sowie Transformationen mit mindestens einem Fixpunkt, wie die Drehungen oder die Punktspiegelungen. Im Folgenden wird die Diskussion auf solche Isometrien beschränkt, die einen gewissen Punkt invariant lassen, der als Ursprungspunkt eines kartesischen Koordinatensystems gewählt wird. Dementsprechend werden nur Vektoren $\vec{x}$ ausgehend von dieser Ursprung betrachtet.

> Um genauer zu sein, sollte man zwischen einem 3-dimensionalen affinen Punktraum — dessen Abbildungen in sich selbst Fixpunkte haben können — und dem assoziierten euklidischen Vektorraum unterscheiden, was hier der Kurze halber nicht gemacht wurde.

Stellt man die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{x}\,'$ von $\mathscr{E}_3$ als reelle einspaltige 3×1-Matrizen X, X' und $\mathscr{R}$ als eine reelle 3×3-Matrix $\mathcal{R}$ dar, so lässt sich Gl. (II.1) als

$$X \to X' = \mathcal{R}X \tag{II.2a}$$

umschreiben.[5] Unter Verwendung der jeweiligen Koordinaten x_i, x'_i mit $i = 1,2,3$ der Vektoren X, X' und der Matrixelemente $\mathcal{R}_{ij}$ mit $i,j = 1,2,3$ der Abbildungsmatrix $\mathcal{R}$ lautet dies auch

$$x_i \to x'_i = \mathcal{R}_{ij}x_j, \tag{II.2b}$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes[6] benutzt wurde.

In Matrixdarstellung lautet das Skalarprodukt X^TX, wobei X^T den einzeiligen transponierten Vektor von X bezeichnet. Damit $\mathcal{R}$ eine Isometrie darstellt, muss für jeden $X \in \mathbb{R}^3$

$$X^TX = X'^TX' = (\mathcal{R}X)^T\mathcal{R}X = X^T\mathcal{R}^T\mathcal{R}X$$

gelten; d.h. die Matrix $\mathcal{R}$ muss der Eigenschaft

$$\mathcal{R}^T\mathcal{R} = \mathbb{1}_3 \tag{II.3}$$

mit der 3×3-Identitätsmatrix $\mathbb{1}_3$ genügen. Umgekehrt stellt jede Matrix $\mathcal{R}$, die diese Gleichung erfüllt, eine Isometrie des dreidimensionalen Raums dar.

---

[5] X, X' sind Elemente eines mit $\mathscr{E}_3$ assoziierten (und oft identifizierten) *Koordinatenraums* $\mathbb{R}^3$.

[6] S. die Bemerkung über die Stelle der Indizes in den einführenden Vorbemerkungen.

Man prüft einfach nach, dass die Isometrien von $\mathscr{E}_3$ eine Gruppe bilden.[7] Ebenfalls formen die assoziierten reellen 3×3-Matrizen mit der Eigenschaft (II.3) die *orthogonale Gruppe* O(3).

Bemerkung: Dank der Beschränkung auf Isometrien mit einem festen Fixpunkt ist die Korrespondenz zwischen solchen Isometrien von $\mathscr{E}_3$ und den Matrizen von O(3) bijektiv.

Mathematisch gesagt ist diese Korrespondenz eine sog. *lineare Darstellung*. Da die Matrizen der O(3) linearen Abbildungen vom dreidimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^3$, dem *Darstellungsraum*, in sich selbst entsprechen, spricht man von einer Darstellung vom Grad 3. Die O(3)-Matrizen sind unitär—sie sind reell und erfüllen Gl. (II.3)—, so dass die Darstellung auch als *unitär* bezeichnet wird. Schließlich ist die Darstellung *irreduzibel*, weil es keinen nicht-trivialen Unterraum des Darstellungsraums gibt, der invariant unter der Wirkung der O(3) ist.

Bildet man die Determinante der Gleichung (II.3), so erhält man $(\det \mathcal{R})^2 = 1$, d.h. $\det \mathcal{R} = \pm 1$. Solche Matrizen mit Determinante $+1$ formen die *spezielle orthogonale Gruppe* SO(3), deren Elemente die dreidimensionalen Drehungen (um den Ursprungspunkt) darstellen. Die Isometrien[8] mit Determinante -1 ergeben sich durch Komposition der Drehungen mit der Punktspiegelung um den Ursprungspunkt, auch *Raumspiegelung* genannt, die der Abbildungsmatrix $-\mathbb{1}_3$ entspricht.

Bemerkung: Die Bijektivität der Korrespondenz zwischen Isometrien von $\mathscr{E}_3$ mit einem festen Fixpunkt und O(3)-Matrizen wird benutzt, um die letzteren ebenfalls als „Isometrien“ zu nennen, vgl. Fußnote 8. Dementsprechend werden die Matrizen von SO(3) als „Drehungen“ bezeichnet.

II.1.2 Skalare, Vektoren und Tensoren

In diesem Abschnitt werden Klassen von mathematischen Objekten definiert, die sich unter den Isometrien von $\mathscr{E}_3$ gemäß allgemeinen Gesetzen transformieren. Somit eignen sich solche Objekte zur mathematischen Darstellung von physikalischen Größen — weshalb sie hiernach etwas salopp als „physikalische Größen“ bezeichnet werden.

Die unterliegende Idee ist, dass die mathematische Formulierung von physikalischen Gesetzen gleichgültig unter Isometrien (z.B. Drehungen) von $\mathscr{E}_3$ bleiben soll, entsprechend z.B. der nicht-Existenz einer privilegierten Ausrichtung im absoluten newtonschen Raum. Dementsprechend sollen mathematische Objekte benutzt werden, die sich „gut“ unter Isometrien verhalten.

II.1.2 a Skalare

Als *Skalar* wird eine (physikalische) Größe bezeichnet, die unter Isometrien invariant bleibt. Zum Beispiel ist das infinitesimale Volumenelement $\mathrm{d}^3\vec{x} \equiv \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$ ein Skalar, denn aus Gl. (II.2b) folgt $\mathrm{d}^3\vec{x}\,' = |\det \mathcal{R}|\,\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}^3\vec{x}$ für alle $\mathcal{R} \in \mathrm{O}(3)$.

Sei $f(\vec{x})$ eine Funktion auf $\mathscr{E}_3$, entsprechend einer ortsabhängigen physikalischen Größe. In einer isometrischen Transformation $\vec{x} \to \vec{x}\,'$ wird diese Funktion zu einer neuen Funktion $f'(\vec{x}\,')$. Die Funktion f wird *skalar* genannt — und wird als *Skalarfeld* bezeichnet —, wenn für jede Isometrie $\vec{x} \to \vec{x}\,'$ die transformierte Funktion f' der Gleichung $f'(\vec{x}\,') = f(\vec{x})$ genügt. Ein Beispiel von Skalarfeld ist das elektrostatische Skalarpotential $\Phi(\vec{x})$.

Bemerkungen:

∗ Für das Verständnis der Bedeutung der transformierten Funktion f' lohnt es sich, die Transformation $\vec{x} \to \vec{x}\,'$ nicht als eine „aktive Transformation“—entsprechend einer Änderung des Zustands eines physikalischen Systems (z.B. dessen Orientierung, wenn das System nicht punktförmig ist) bei unverändertem Koordinatensystem—, sondern als eine „passive Transformation“—wobei der Zustand des Systems unverändert bleibt, während das Koordinatensystem transformiert ist. Beispielsweise

[7] 1. Die Komposition zweier Isometrien ergibt eine Isometrie. 2. Die Komposition ist assoziativ. 3. Die Identität wirkt als neutrales Element bzgl. der Komposition. 4. Jede Isometrie besitzt ein inverses Element.

[8] Genauer, die durch eine Matrix mit Determinante -1 dargestellten Isometrien.

ist die aktive Drehung eines Vektors um einen Winkel θ um eine gegebene Achse äquivalent zur passiven Drehung um den Winkel $-\theta$ um die gleiche Achse.[9]

* Auch wenn eine Funktion f skalar ist, kann deren Variation $f'(\vec{x}) - f(\vec{x})$ in einem Punkt nicht null sein. Diese Variation wird in § II.1.3 c für den Fall einer infinitesimalen Drehung berechnet.

Einige physikalischen Größen bleiben invariant unter der Wirkung der Drehungen, ändern aber ihr Vorzeichen unter der Raumspiegelung — und somit, unter der Isometrien mit Determinante -1. Eine solche Größe wird *Pseudoskalar* genannt.

II.1.2 b Vektoren

In der Physik wird nicht jedes Element eines Vektorraums als *Vektor* bezeichnet. Die Bezeichnung wird nur für solche Größen verwendet, deren Koordinaten sich unter einer Isometrie ähnlich verhalten, wie die Raumkoordinaten. Somit transformieren sich die Koordinaten V_i, $i = 1, 2, 3$ eines Vektors gemäß [vgl. Gl. (II.2b)]

$$V_i \to V'_i = \mathcal{R}_{ij} V_j. \tag{II.4a}$$

In Matrixdarstellung lautet diese Transformation

$$V \to V' = \mathcal{R} V. \tag{II.4b}$$

Ein triviales Beispiel von Vektor ist die Geschwindigkeit eines Teilchens.

Analog zu den Skalarfeldern bzw. Pseudoskalaren werden *Vektorfelder* bzw. *Pseudovektoren* definiert. Die Letzteren werden auch *Axialvektoren* genannt.
Ein wichtiges Beispiel von Vektorfeld ist der Gradient-Operator $\vec{\nabla}_{\vec{x}}$, wobei der Index $\vec{x}$ weggelassen wird, wenn es keine Mehrdeutigkeit geben kann. Unter einer Isometrie (II.1)–(II.2) transformiert sich dessen Matrixdarstellung gemäß

$$\nabla_{\vec{x}} \to \nabla_{\vec{x}\,'} = \mathcal{R} \nabla_{\vec{x}}. \tag{II.5}$$

Beweis: Betrachtet man die Komponenten des Gradienten, so liefert die Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} = \mathcal{R}_{ji} \frac{\partial}{\partial x'_j} = (\mathcal{R}^T)_{ij} \frac{\partial}{\partial x'_j}.$$

In Matrixdarstellung lautet dies $\nabla_{\vec{x}} = \mathcal{R}^T \nabla_{\vec{x}\,'}$, woraus Gl. (II.5) nach Inversion unter Verwendung von $(\mathcal{R}^T)^{-1} = \mathcal{R}$ [vgl. Gl. (II.3)] folgt. □

Infolgedessen ist das elektrostatische Feld $\vec{\mathscr{E}}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$ ein Vektorfeld.

II.1.2 c Tensoren beliebiger Stufe

Ein *Tensor* ist eine Größe, deren Koordinatendarstellung eine beliebige feste Zahl von Indizes — die *Stufe* des Tensors — erfordert, z.B. $\mathcal{T}_{ij}$, wobei jeder Index sich unter Isometrien wie die Komponenten eines Vektors transformiert, also gemäß Gl. (II.4a). Beispielsweise lautet die Transformation eines Tensors 2. Stufe

$$\mathcal{T}_{ij} \to \mathcal{T}'_{ij} = \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{jl} \mathcal{T}_{kl}. \tag{II.6}$$

Der auf die Tensorkoordinaten wirkenden Operator für die Isometrie ist somit das Produkt der Isometrien auf jeden Index.

Dazu definiert man noch *Pseudotensoren*, deren Komponenten sich unter Isometrien wie die Komponenten von Pseudovektoren verhalten, sowie ortsabhängige *Tensorfelder*.

Bemerkungen:

* Da jeder Index die Werte 1,2,3 annehmen kann, hat ein Tensor k-ter Stufe insgesamt 3^k Komponenten.

---
[9] Zu aktiven und passiven Transformationen, s. z.B. Ref. [2], Kap. 7.1.

∗ Skalare bzw. Vektoren sind Tensoren 0. bzw. 1. Stufe.

∗ Die Komponenten eines Tensors 2. Stufe $\mathcal{T}_{ij}$ können als die Elemente einer 3×3-Matrix $\mathcal{T}$ betrachtet werden. Dann wird das Transformationsgesetz (II.6) zu

$$\mathcal{T} \to \mathcal{T}' = \mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{R}^T = \mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{R}^{-1}, \tag{II.7}$$

entsprechend der Transformation einer Matrix unter eine Änderung des Koordinatensystems.

Invariante Tensoren

Nimmt man $\mathcal{T}_{ij} = \delta_{ij}$ in Gl. (II.6), wobei δ_{ij} das übliche Kronecker[(a)]-Symbol ($\delta_{ij} = 1$ wenn $i = j$, sonst 0) bezeichnet, so erhält man $\mathcal{T}'_{ij} = \mathcal{T}_{ij}$. Ein solcher Tensor, dessen Komponenten unter Isometrien gleich bleiben, heißt *invarianter Tensor*.

Ein weiteres Beispiel ist der vollständig antisymmetrische *Levi–Civita*[(b)]*-Tensor*

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von (1,2,3) ist,} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von (1,2,3) ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{II.8}$$

Da jeder Index sich gemäß Gl. (II.6) transformiert, erhält man

$$\epsilon_{ijk} \to \epsilon'_{ijk} = \mathcal{R}_{ii'}\mathcal{R}_{jj'}\mathcal{R}_{kk'}\,\epsilon_{i'j'k'} = (\det\mathcal{R})\,\epsilon_{ijk}. \tag{II.9}$$

Somit ist der Levi–Civita-Tensor ein invarianter Pseudotensor, der unverändert unter Drehungen bleibt, während er unter Raumspiegelung sein Vorzeichen ändert.

Kontraktion zweier Tensoren

Es seien V_i, W_j die Komponenten zweier Vektoren. Dann sind die 9 Produkte V_iW_j die Komponenten eines Tensors 2. Stufe. Setzt man die zwei Indizes i und j gleich und summiert man dann über alle Werte von i, so erhält man V_iW_i. Das ist gerade das Skalarprodukt der zwei Vektoren, d.h. ein Tensor 0. Stufe.

Allgemeiner erhält man ausgehend von einem Tensor k-ter Stufe einen Tensor der Stufe $k-2$, indem zwei Indizes des Ausgangstensors gleichgesetzt und dann die Summe über alle Werte des Index gebildet wird. Diese Operation wird *Kontraktion* gennant.

Beispielsweise liefert die Kontraktion der zwei Indizes eines Tensors 2. Stufe $\mathcal{T}_{ij}$ gerade die Spur $\mathrm{Tr}\,\mathcal{T}$ der assoziierten Matrix $\mathcal{T}$. Betrachtet man den Pseudotensor 5. Stufe $\epsilon_{ijk}V_lW_m$, mit V_l, W_m den Komponenten zweier Vektoren $\vec{V}$ und $\vec{W}$, und bildet man die doppelte Kontraktion zum einen der Indizes j und l, zum anderen von k und m, so ergibt sich der Pseudovektor mit Komponenten $\epsilon_{ijk}V_jW_k$, d.h. der Kreuzprodukt $\vec{V}\times\vec{W}$.

II.1.3 Irreduzible Darstellungen

In diesem Paragraph wird das Verhalten physikalischer Größen unter Isometrien von $\mathscr{E}_3$, und insbesondere unter Drehungen, etwa systematischer untersucht. Dafür werden einige Begriffe und Ergebnisse der Gruppentheorie eingeführt und ohne Beweis verwendet.

II.1.3 a Infinitesimale Drehungen

Eine Drehung um den infinitesimal kleinen Winkel $\mathrm{d}\theta$ um die Koordinatenachse j transformiert einen Vektor $\vec{x}$ von $\mathscr{E}_3$ in

$$\vec{x}\,' = \mathscr{R}(\vec{x}) = \vec{x} + \mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{e}}_j \times \vec{x}, \tag{II.10a}$$

wobei $\vec{\mathrm{e}}_j$ der Einheitsvektor in Richtung j ist. In Koordinaten lautet dies

$$x'_k = \mathcal{R}_{kl}x_l = x_k + \mathrm{d}\theta\,\epsilon_{jkl}\,x_l. \tag{II.10b}$$

(a) L. Kronecker, 1823–1891 (b) T. Levi-Civita, 1873–1941

Somit sind die Elemente der Darstellungsmatrix $\mathcal{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{R}_{kl} = \delta_{kl} + \mathrm{d}\theta\,\epsilon_{jkl}. \tag{II.10c}$$

Diese Drehmatrix kann als

$$\mathcal{R} = \mathbb{1}_3 - \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta\,\mathcal{J}_j \tag{II.10d}$$

ungeschrieben werden, wobei $\mathcal{J}_j$ eine 3×3-Matrix ist, die als *Generator* oder *Erzeuger* der Gruppe SO(3) bezeichnet ist Aus den zwei letzteren Gleichungen leitet man die Matrixelemente von $\mathcal{J}$ ab:

$$(\mathcal{J}_j)_{kl} = -\mathrm{i}\,\epsilon_{jkl}. \tag{II.11a}$$

In Matrixdarstellung lauten die drei Generatoren von SO(3)

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{II.11b}$$

Diese Matrizen sind hermitesch. Man prüft einfach nach, dass die Generatoren $\mathcal{J}_j$ den Vertauschungsrelationen

$$\boxed{[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\,\mathcal{J}_k} \tag{II.11c}$$

genügen.

Allgemein lautet die infinitesimale Drehung um den Winkel $\mathrm{d}\theta$ um die Richtung mit Einheitsvektor $\vec{\mathrm{e}}$

$$\mathcal{R} = \mathbb{1}_3 - \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathcal{J}}, \tag{II.12}$$

wobei zu beachten ist, dass das Punktprodukt $\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathcal{J}}$ eine Matrix bezeichnet. Eine Drehung um einen beliebigen Winkel θ kann dann als Produkt von N Drehungen um den Winkel θ/N um die gleiche Achse ausgedrückt werden. Somit erhält man

$$\mathcal{R} = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1}_3 - \mathrm{i}\,\frac{\theta}{N}\,\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathcal{J}}\right)^N = \exp\!\left(-\mathrm{i}\theta\,\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathcal{J}}\right). \tag{II.13}$$

Bemerkung: Die Einführung des Faktors i in Gl. (II.10d), und entsprechend in die Matrizen $\mathcal{J}_j$ Gl. (II.11), ist zwar überraschend, da die SO(3)-Matrizen reell sind. Dieser Faktor erlaubt aber eine einfache Verallgemeinerung auf Gruppen komplexer Matrizen, wie z.B. in § II.1.4 unten.

II.1.3 b Lineare Darstellungen der Gruppe der Drehungen

Wie schon in § (II.1.1) erwähnt wurde, handelt es sich bei den 3×3-Matrizen $\mathcal{R}$ im vorigen Paragraph um die Operatoren (auf $\mathbb{R}^3$) einer *linearen Darstellung* von Grad 3 der Drehungen $\mathscr{R}$ des euklidischen Raums $\mathscr{E}_3$.

Allgemeiner kann man die Drehungen als Operatoren (bzw. Matrizen, wenn $\mathcal{E}$ endlicher Dimension ist) $S(\mathscr{R})$ auf einem Vektorraum $\mathcal{E}$ darstellen, wobei S ein Gruppenhomomorphismus von der Drehgruppe in die Gruppe der Operatoren auf $\mathcal{E}$ ist. Betrachtet man dann eine infinitesimale Drehung, so lässt sich der assoziierte Operator in der Form (II.12) schreiben, wobei $\mathcal{R}$ bzw. die Matrizen $\mathcal{J}_j$ durch $S(\mathscr{R})$ bzw. durch drei Operatoren $J_j^{(\mathcal{E})}$ zu ersetzen sind. Meistens benutzt man unitäre Darstellungen, so dass die Generatoren $J_j^{(\mathcal{E})}$ hermitesch sind.[10] Dank Gl. (II.13) bestimmen die Letzteren völlig die Transformationen durch Drehungen.

Ein wichtiger Punkt ist, dass die Vertauschungsrelationen (II.11c) auch für die Generatoren $J_j^{(\mathcal{E})}$ gelten. Diese Relationen werden (in der Physik) *Lie*[c]*-Algebra der Gruppe* genannt. Daraus folgen einige Ergebnisse:[11]

[10] Aus $J_j^{(\mathcal{E})\dagger} = J_j^{(\mathcal{E})}$ folgt für die Drehung um θ um die j-Achse $S(\mathscr{R})^\dagger = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta J_j^{(\mathcal{E})}}\right)^\dagger = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta J_j^{(\mathcal{E})}} = S(\mathscr{R})^{-1}$.

[11] Diese Eigenschaften sollten aus der Quantenmechanik-Vorlesung schon bekannt sein.

[c] S. Lie, 1842–1899

- Der Operator $\big(\vec{J}^{(\mathcal{E})}\big)^2 \equiv \big(J_1^{(\mathcal{E})}\big)^2 + \big(J_2^{(\mathcal{E})}\big)^2 + \big(J_3^{(\mathcal{E})}\big)^2$ kommutiert mit jedem Generator $J_j^{(\mathcal{E})}$ und damit mit jedem Operator $S(\mathscr{R})$. Somit ist jeder Eigenunterraum von $\big(\vec{J}^{(\mathcal{E})}\big)^2$ invariant unter der Gruppe der $S(\mathscr{R})$.

- Die möglichen Eigenwerte von $\big(\vec{J}^{(\mathcal{E})}\big)^2$ sind der Form $j(j+1)$ mit j ganz- oder halbzahlig.

- Die Eigenwerte von $J_3^{(\mathcal{E})}$ im Eigenunterraum $\big(\vec{J}^{(\mathcal{E})}\big)^2$ assoziiert mit dem Eigenwert j sind die $2j+1$ reellen Zahlen $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$. Ein zugehöriger Eigenvektor wird hiernach als $|j,m\rangle$ bezeichnet.

- Ausgehend von einem Eigenvektor $|j,m_0\rangle$ erhält man durch sukzessive Anwendungen der Leiteroperatoren $J_\pm^{(\mathcal{E})} \equiv J_1^{(\mathcal{E})} \pm \mathrm{i} J_2^{(\mathcal{E})}$ — die m um ± 1 vergrößern — alle $|j,m\rangle$ für einen gegebenen Wert j. Diese Vektoren erzeugen einen einen Untervektorraum $\mathcal{E}_j$ der Dimension $2j+1$, invariant unter den Drehoperatoren $S(\mathscr{R})$. Die Einschränkungen der $S(\mathscr{R})$ auf $\mathcal{E}_j$ bilden also eine Darstellung der Drehungen. Da kein nicht-trivialer Unterraum von $\mathcal{E}_j$ invariant unter allen Drehungen ist, ist diese Darstellung irreduzibel. Dazu kann man zeigen, dass alle Darstellungen mit dem gleichen Eigenwert j äquivalent zueinander sind, so dass j die Darstellung vollständig charakterisiert.

Beispiele

Bei der Darstellung mithilfe von 3×3-Matrizen des § II.1.3 a handelte es sich um eine Darstellung von Grad 3. Für die Generatoren (II.11) gilt $\vec{\mathcal{J}}^2 = 2 \cdot \mathbb{1}_3$, entsprechend $j = 1$. Da $2j+1 = 3$ ist die Darstellung irreduzibel. Somit charakterisiert $j = 1$ die Transformation eines Vektors $\vec{x}$ von $\mathscr{E}_3$.

Betrachten wir jetzt die Transformationen der Tensoren 2. Stufe. Der assoziierten Darstellungsraum ist der Dimension $3^2 = 9$. Gemäß Gl. (II.6) ist jetzt der Operator $S(\mathscr{R})$ gleich dem Produkt zweier auf einem einzigen Index wirkenden Operatoren. Für eine infinitesimale Drehung gilt

$$S(\mathscr{R}) = \big(\mathbb{1}_3 - \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathcal{J}}_{(1)}\big) \otimes \big(\mathbb{1}_3 - \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathcal{J}}_{(2)}\big) = \mathbb{1}_9 - \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{e}}\cdot\big(\vec{\mathcal{J}}_{(1)} + \vec{\mathcal{J}}_{(2)}\big) + \mathcal{O}\big((\mathrm{d}\theta)^2\big),$$

wobei $\vec{\mathcal{J}}_{(1)}$ und $\vec{\mathcal{J}}_{(2)}$ die Generatoren der Drehungen auf jeden Index sind.[12]

Der Generator der Transformation für Tensoren ist somit $\vec{\mathcal{J}} \equiv \vec{\mathcal{J}}_{(1)} + \vec{\mathcal{J}}_{(2)}$,[12] d.h. die Summe zweier miteinander kommutierenden Operatoren gehorchend der Lie-Algebra (II.11c). Die möglichen Eigenwerte von $\vec{\mathcal{J}}$ sind dann[11] $j(j+1)$ mit $j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2$, wobei j_1, j_2 die Eigenwerte von $\vec{\mathcal{J}}_{(1)}$, $\vec{\mathcal{J}}_{(2)}$ sind. Hier gilt $j_1 = j_2 = 1$, so dass j die Werte 0, 1 und 2 annehmen kann: der Darstellungsraum der Tensoren ist die direkte Summe der zugehörigen Eigenräumen mit der jeweiligen Dimension 1, 3 und 5.

Was sollen diese Eigenräume bzw. die zugehörigen Tensoren sein? Das Transformationsgesetz (II.6) zeigt, dass sich ein symmetrischer bzw. antisymmetrischer Tensor 2. Stufe unter Drehungen in einen symmetrischen bzw. antisymmetrischen Tensor transformiert; d.h. die Symmetrie unter Austausch der Indizes bleibt erhalten unter Drehungen. Somit bilden die antisymmetrischen Tensoren einen unter Drehungen invarianten Unterraum der Dimension 3, entsprechend der Angabe von $\mathcal{T}_{12}$, $\mathcal{T}_{13}$ und $\mathcal{T}_{23}$. Dieser Unterraum entspricht einer vektoriellen ($j = 1$) Darstellung — tatsächlich kann mit jedem antisymmetrischen Tensor $\mathcal{T}_{jk}$ ein Vektor $V_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{T}_{jk}$ assoziiert werden.[13]

Zum anderen bilden die symmetrischen Tensoren 2. Stufe einen Unterraum der Dimension 6. In § II.1.2 c wurde schon erwähnt, dass solche, die proportional zur Identität sind $\mathcal{T}_{ij} \propto \delta_{ij}$, invariant unter Drehungen sind: diese Tensoren bilden eine skalare Darstellung ($j = 0$). Indem man schreibt

$$\mathcal{T}_{ij} = \frac{1}{3}\mathcal{T}_{kk}\delta_{ij} + \bigg(\mathcal{T}_{ij} - \frac{1}{3}\mathcal{T}_{kk}\delta_{ij}\bigg),$$

[12] Im rechten Glied der Gleichung ist $\vec{\mathcal{J}}_{(1)} + \vec{\mathcal{J}}_{(2)}$ eine Kurzform für $\vec{\mathcal{J}}_{(1)} \otimes \mathbb{1}_3 + \mathbb{1}_3 \otimes \vec{\mathcal{J}}_{(2)}$.
[13] Die Abbildung zwischen $\mathcal{T}_{jk}$ und V_i ist bijektiv: $\mathcal{T}_{jk} = \epsilon_{ijk}V_i$.

lässt sich jeder symmetrische Tensor in einen Anteil proportional zur Identität und einen spurlosen Anteil zerlegen. Da die Spur invariant unter Rotationen ist [vgl. Gl. (II.7)], bilden die spurlosen symmetrischen Tensoren die Darstellung vom Grad 5, entsprechend $j = 2$.

Bemerkung: Im Fall einer anderen Gruppe — z.B. für die Gruppe der D-dimensionalen Drehungen, entsprechend natürlich der speziellen orthogonalen Gruppe $\mathrm{SO}(D)$ —, verallgemeinern sich die Vertauschungsrelationen (II.11c) der zugehörigen Generatoren — deren Anzahl nicht mehr unbedingt gleich 3 ist — auf die Lie-Algebra $[J_i, J_j] = \mathrm{i} f_{ijk} J_k$, mit sog. *Strukturkonstanten* f_{ijk}.

II.1.3 c Transformation eines skalaren Feldes

Bei den zwei Beispielen im letzteren Abschnitt handelt es sich um Darstellungen der Drehgruppe auf einem Darstellungsraum endlicher Dimension. Jetzt wird die Wirkung von Drehungen auf skalare Felder untersucht, d.h. auf die Elemente eines Vektorraums unendlicher Dimension.

Sei wieder die Drehung um einen infinitesimal kleinen Winkel $\mathrm{d}\theta$ um die j-Achse. Die Variation einer skalaren Funktion $[f'(\vec{x}\,') = f(\vec{x})]$ im Punkt $\vec{x}$ unter dieser Drehung lautet

$$f'(\vec{x}) - f(\vec{x}) = f'(\vec{x}) - f'(\vec{x}\,') \simeq -\frac{\partial f'(\vec{x})}{\partial x_k}\,\delta x_k$$

mit $\delta x_k \equiv x'_k - x_k$, wobei die zweite Gleichung aus einer Taylor-Entwicklung folgt. Zur erster Ordnung kann f' durch f ersetzt werden. Unter Verwendung des Ausdrucks (II.10b) für δx_k ergibt sich dann

$$f'(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \mathrm{d}\theta\,\epsilon_{jkl}\,x_l\frac{\partial f}{\partial x_k} = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta\,J_j f(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad J_j \equiv -\mathrm{i}\epsilon_{jlk}\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{II.14}$$

einem differentiellen Operator. Vektoriell lässt sich der letztere als das Kreuzprodukt

$$\vec{J} = \vec{x} \times (-\mathrm{i}\vec{\nabla}) \tag{II.15}$$

umschreiben: bis auf einen fehlenden Faktor $\hbar$ erkennt man den Ausdruck des Bahndrehimpulses in Ortsdarstellung in der Quantenmechanik.

Der Darstellungsraum ist der Raum der Funktionen auf $\mathbb{R}^3$. Da die Drehungen nur auf die Winkelkoordinaten θ und φ wirken, kann man Funktionen von nur diesen Winkeln betrachten. Der entsprechende Raum $\mathcal{E}$ ist wieder unendlicher Dimension. Die Darstellung lässt sich als eine unendliche direkte Summe irreduzibler Darstellungen, entsprechend jedem möglichen Wert von j, zerlegen:[11]

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \cdots$$

Eine Basis des Unterraums $\mathcal{E}_\ell$ — dessen Dimension $2\ell+1$ ist — besteht aus den Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$, die die Eigenvektoren von J_z [Gl. (II.14)] mit den Eigenwerten $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$ sind.

II.1.3 d Tensoroperatoren

Bisher wurde die Transformation unter Drehungen für die Elemente des Darstellungsraums $\mathcal{E}$ betrachtet. In diesem Abschnitt wollen wir die Transformation der Matrixelemente von Operatoren auf $\mathcal{E}$ untersuchen.

Hiernach werden einige Notationen der Quantenmechanik verwendet: ein Element von $\mathcal{E}$ wird als $|\psi\rangle$ bezeichnet, und das unter einer Drehung $\mathcal{R}$ transformierte Element als $|\psi'\rangle = S(\mathcal{R})\,|\psi\rangle$. Die konjugierten Bras lauten $\langle\psi|$ und $\langle\psi'| = \langle\psi|\,S(\mathcal{R})^{-1}$.[14]

Ein Operator Σ auf $\mathcal{E}$ wird *skalar* genannt, wenn seine Matrixelemente unverändert unter Drehungen bleiben, d.h. wenn für alle $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ in $\mathcal{E}$ und für jede Drehung $\mathcal{R}$

$$\langle\psi'_1|\Sigma|\psi'_2\rangle = \langle\psi_1|\Sigma|\psi_2\rangle\,. \tag{II.16a}$$

[14] Im Fall einer unitären Darstellung gilt auch $\langle\psi'| = \langle\psi|\,S(\mathcal{R})^\dagger$; für nicht-unitäre Darstellungen soll man aber $S(\mathcal{R})^{-1}$ benutzen.

Dies gibt sofort

$$S(\mathscr{R})^{-1}\,\Sigma\,S(\mathscr{R}) = \Sigma, \tag{II.16b}$$

d.h. Σ soll mit jedem Operator $S(\mathscr{R})$ kommutieren, insbesondere mit den Generatoren $J_j^{(\mathcal{E})}$ der auf $\mathcal{E}$ wirkenden Drehoperatoren:

$$\big[\Sigma, J_j^{(\mathcal{E})}\big] = 0. \tag{II.16c}$$

Ein Beispiel von skalarem Operator ist einfach $\big(\vec{J}^{(\mathcal{E})}\big)^2$.

Ähnlich bilden drei Operatoren V_1, V_2, V_3 einen sog. *Vektoroperator*, wenn sich die Matrixelemente gemäß

$$\langle\psi_1'|V_i|\psi_2'\rangle = \mathcal{R}_{ik}\,\langle\psi_1|V_k|\psi_2\rangle \tag{II.17a}$$

für alle $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ in $\mathcal{E}$ und für jede Drehung $\mathscr{R}$ transformieren, entsprechend

$$S(\mathscr{R})^{-1}\,V_i\,S(\mathscr{R}) = \mathcal{R}_{ik}V_k. \tag{II.17b}$$

Schreibt man diese Beziehung für die infinitesimale Drehung (II.10d) um die j-Achse mit $\mathcal{J}_j$ ersetzt durch $J_j^{(\mathcal{E})}$, so findet man zur ersten Ordnung in $\mathrm{d}\theta$

$$\big[V_i, J_j^{(\mathcal{E})}\big] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}V_k. \tag{II.17c}$$

Der Gleichung (II.11c) nach ist $\vec{J}^{(\mathcal{E})}$ selber ein Vektoroperator.

Man definiert noch *Tensoroperatoren* höherer Stufe, durch die Verallgemeinerung der Beziehung (II.17a) auf mehrere Indizes.

II.1.4 Spinoren

Bisher wurden nur Darstellungen entsprechend ganzzahligen Werten von j diskutiert. Wenn $j = \frac{1}{2}$, dann ist der Darstellungsraum von Dimension $2j+1 = 2$. In einer geeigneten Basis lauten die Generatoren der Drehungen $\vec{J} = \vec{\sigma}/2$ mit den Pauli[(d)]-Matrizen σ_i:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{II.18}$$

Diese Matrizen genügen der Eigenschaft

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{II.19}$$

woraus die Vertauschungsrelationen (II.11c) für $\vec{\sigma}/2$ sofort folgen.

Eine wichtige Besonderheit der Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung ist, dass J_1 und J_3 reelle Matrizen sind. Infolgedessen können die Drehmatrizen (II.13) in dieser Darstellung auch komplexe Koeffizienten haben: man findet einfach, dass der Operator für eine Rotation um den Winkel θ um die Richtung mit Einheitsvektor $\vec{e}$ durch[(15)]

$$S(\mathscr{R}) = \exp\!\left(-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{e}\right) = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathbb{1}_2 - \mathrm{i}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}\cdot\vec{\sigma} \tag{II.20}$$

gegeben ist. Somit ist der Darstellungsraum ein komplexer Vektorraum, statt eines reellen Vektorraums. Die zweikomponentigen Elemente dieses Darstellungsraums werden als *Spinoren* bezeichnet.

Die Matrizen $S(\mathscr{R})$ sind komplexe 2×2-Matrizen. Dank der Hermitizität der Pauli-Matrizen sind diese Matrizen unitär, vgl. Fußnote 10. Man prüft einfach nach, dass deren Determinante 1 ist. Somit handelt es sich um die Matrizen der *speziellen unitären Gruppe* SU(2).

[(15)] Der Beweis der zweiten Gleichung beruht auf der Identität $(\vec{\sigma}\cdot\vec{e})^2 = \mathbb{1}_2$ für einen auf 1 normierten Vektor $\vec{e}$, die sich aus dem Produkt (II.19) einfach herleiten lässt.

[(d)] W. Pauli, 1900–1958

Gleichung (II.20) zeigt, dass die mit einer Drehung von $\mathscr{E}_3$ um 2π assoziierten Matrix tatsächlich $S(\mathscr{R}) = -\mathbb{1}_2$ ist. In der Tat ist SU(2) keine lineare Darstellung von SO(3), sondern nur eine sogenannte *projektive Darstellung*, für die $S(\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2)}S(\mathscr{R}_1)S(\mathscr{R}_2)$ mit $\phi(\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2)$ einer nicht-verschwindenden Phase gilt. Man kann zeigen, dass es einen Gruppenhomomorphismus von SU(2) nach SO(3) gibt, nicht aber von SO(3) nach SU(2). Somit ist jede lineare Darstellung von SO(3) auch eine Darstellung von SU(2), während es lineare Darstellungen von SU(2) gibt — insbesondere die Darstellung von SU(2) durch SU(2) selber —, die SO(3) nicht treu darstellen. Dies gilt, auch wenn SU(2) und SO(3) die gleiche Lie-Algebra (II.11c) haben.

II.2 Lorentz-Transformationen

Bekannterweise ist die Gruppe der Isometrien des dreidimensionalen euklidischen Raums nicht die „gute“ Symmetriegruppe für die Gesetze der Physik, insbesondere für die Maxwell[(e)]-Gleichungen des Elektromagnetismus. Stattdessen soll man Transformationen in einer vierdimensionalen Raumzeit betrachten. In diesem Abschnitt werden diese Transformationen eingeführt und ihre Deutung (schnell) studiert.

II.2.1 Linienelement

Die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) beruht auf zwei durch Einstein[(f)] eingeführten und experimentell motivierten Postulaten und zwar

SRT I. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c ist in allen Inertialsystemen gleich.

SRT II. Die Gesetze der Physik sollen in allen solchen Bezugssystemen die gleiche Form annehmen (*Relativitätsprinzip*).

Um dem ersten Postulat zu genügen, soll Zeit nicht mehr als eine absolute Größe betrachtet werden, sondern muss mit den Ortskoordinaten — die in diesem Abschnitt entweder als x, y, z oder als x^1, x^2, x^3 bezeichnet werden — in einen Punkt x mit Koordinaten $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ der *Raumzeit* vereinigt werden. Lässt man Gravitation weg, so handelt es sich bei der letzteren um einen vierdimensionalen reellen Vektorraum, der als *Minkowski*[(g)]*-Raum* $\mathscr{M}_4$ bezeichnet wird. Die Punkte von $\mathscr{M}_4$ werden auch *Ereignisse* genannt.

Der Abstand, oder *Linienelement*, zwischen zwei solchen unendlich benachbarten Ereignissen (ct, x, y, z) und $\big(c(t+\mathrm{d}t), x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z\big)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{x}^{\,2}. \tag{II.21}$$

Man kann $\mathrm{d}x^0 = c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x, \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}y, \mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}z$ als die Komponenten einer einspaltigen Matrix $\mathrm{d}X$ betrachten. Führt man dann den *metrischen Tensor* 2. Stufe η, mit der Matrizendarstellung

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{II.22a}$$

so lässt sich das Linienelement (II.21) als

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}X^T \eta\, \mathrm{d}X \tag{II.22b}$$

umschreiben. Sei $\eta_{\mu\nu}$ das Matrixelement (μ, ν) der Matrix (II.22a), mit $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Das Matrizenprodukt (II.22b) lautet noch

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu,} \tag{II.22c}$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention benutzt wurde.

[(e)] J. C. Maxwell, 1831–1879 [(f)] A. Einstein, 1879–1955 [(g)] H. Minkowski, 1864–1909

Bemerkungen:

∗ Die Stelle der Lorentz-Indizes μ, ν ist wichtig! Somit sollen beide Indizes des metrischen Tensors unten sein — manchmal wird η als $\binom{0}{2}$-Tensor bezeichnet. Dies wird weiter in Abschn. II.3 diskutiert.

∗ Je nach dem Vorzeichen des Linienelements spricht man von einem *zeitartigen* ($\mathrm{d}s^2 > 0$), *lichtartigen* ($\mathrm{d}s^2 = 0$), oder *raumartigen* ($\mathrm{d}s^2 < 0$) Intervall zwischen den zwei Ereignissen.

∗ Wenn das Intervall zwischen zwei Ereignissen zeitartig ist, dann existiert ein Inertialsystem, in dem die Ereignisse im gleichen Ort stattfinden. $\mathrm{d}s^2$ entspricht dem infinitesimalen Zeitintervall in diesem Bezugssystem:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2, \tag{II.23}$$

mit der *Eigenzeit* τ.

∗ Einige Autoren benutzen, statt der hier verwendeten $(+,-,-,-)$ Signatur für den metrischen Tensor (II.22a), die entgegengesetzte Konvention $(-,+,+,+)$.

II.2.2 Lorentz-Transformationen

Sei eine lineare Transformation der Koordinaten x^μ der Form

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{II.24a}$$

oder äquivalent in Matrixform

$$X \to X' = \Lambda X, \tag{II.24b}$$

mit Λ der Matrix, deren Matrixelement (μ,ν) $\Lambda^\mu{}_\nu$ ist.

Die Transformation Λ heißt *Lorentz*[h]*-Transformation*, wenn sie das Linienelement (II.22b) invariant lässt. Somit muss für jede infinitesimale Verschiebung $\mathrm{d}X$, entsprechend einer transformierten Verschiebung $\mathrm{d}X'$, die Identität

$$\mathrm{d}X^T\eta\,\mathrm{d}X = \mathrm{d}X'^T\eta\,\mathrm{d}X'$$

gelten. Aus der Linearität der Transformation Λ folgt $\mathrm{d}X' = \Lambda\,\mathrm{d}X$, so dass diese Gleichung äquivalent zur Bedingung

$$\boxed{\eta = \Lambda^T\eta\Lambda} \tag{II.25a}$$

ist. Mithilfe der Matrixelemente lautet dies[16]

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu\,\eta_{\rho\sigma}\Lambda^\sigma{}_\nu. \tag{II.25b}$$

Bildet man die Determinante der Gl. (II.25a), so erhält man sofort $\det\Lambda = \pm 1$. Infolgedessen bleibt das 4-Volumenelement $\mathrm{d}^4\mathrm{x} \equiv \mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3$ invariant unter Lorentz-Transformationen, denn es transformiert sich gemäß

$$\mathrm{d}^4\mathrm{x} \to \mathrm{d}^4\mathrm{x}' = \left|\det\Lambda\right|\mathrm{d}^4\mathrm{x}. \tag{II.26}$$

Die Lorentz-Transformationen formen eine Gruppe, die sog. *Lorentz-Gruppe* (oder manchmal *homogene Lorentz-Gruppe*), die hiernach als $\mathcal{L}$ bezeichnet wird.[17]

---

(16) $\Lambda^\rho{}_\mu$ ist das Element (ρ,μ) der Matrixdarstellung von Λ, und also das Element (μ,ρ) von Λ^T. Manchmal findet man die Notation $\Lambda_\mu{}^\rho$ anstatt $\Lambda^\rho{}_\mu$. Jedenfalls bleibt der Zeilenindex solcher Lorentz-Transformationen oben, der Spaltenindex unten.

(17) Eine alternative Bezeichnung ist O(1,3); dementsprechend wird der Minkowski-Raum auch als $\mathbb{R}^{1+3}$ bezeichnet, die eigentliche Lorentz-Gruppe als SO(1,3), und die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe als $\mathrm{SO}_+(1,3)$.

(h) H. Lorentz, 1853–1926

Die Transformationen mit Determinante +1, die *eigentlichen Lorentz-Transformationen*, bilden eine Teilgruppe $\mathcal{L}_+$, die *eigentliche Lorentz-Gruppe*.[(17)] Darüber hinaus werden die Transformationen mit $\Lambda^0{}_0 > 0$ *orthochron* gennant; diese bilden auch eine Gruppe, $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Je nach den Vorzeichen der Determinante $\det\Lambda$ und der Komponente $\Lambda^0{}_0$ erhält man die vier Zusammenhangskomponenten $\mathcal{L}_+^\uparrow$, $\mathcal{L}_+^\downarrow$, $\mathcal{L}_-^\uparrow$ und $\mathcal{L}_-^\downarrow$ der Lorentz-Gruppe.

Bemerkungen:

∗ In der Tat bleibt das Linienelement (II.21) nicht nur unter den Lorentz-Transformationen invariant, sondern allgemeiner unter den linearen Transformationen der *Poincaré*[(i)]*-Gruppe* (oder *inhomogene Lorentz-Gruppe*), d.h. der Form

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \tag{II.27}$$

Die Transformationen mit $\Lambda = \mathbb{1}_4$ und beliebigem a^μ sind offensichtlich die Raumzeit-Translationen.

∗ Aus Gl. (II.24a) folgt $\Lambda^\mu{}_\nu = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$.

II.2.3 Beispiele

Die Isometrien des dreidimensionalen Raums $\mathscr{E}_3$ mit mindestens einem Fixpunkt sind natürlich auch Lorentz-Transformationen, die eine Untergruppe der (eigentlichen orthochronen) Lorentz-Gruppe bilden.

Die Raumspiegelung ist ebenfalls eine Lorentz-Transformation, diesmal aber eine uneigentliche Transformation ($\det\Lambda = -1$), mit der Matrixdarstellung

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{II.28}$$

Somit gehört die Raumspiegelung zu $\mathcal{L}_-^\uparrow$. Allgemeiner ergeben sich die uneigentlichen orthochronen Transformationen durch Multiplikation einer eigentlichen orthochronen Transformation mit dieser Raumspiegelung.

Auf ähnlicher Weise sind die Transformationen von $\mathcal{L}_-^\downarrow$ die Produkte einer eigentlichen orthochronen Transformation mit dem Operator des *Zeitumkehrs*, dessen Matrixdarstellung

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{II.29}$$

ist.

Die *speziellen Lorentz-Transformationen* (oder *Boosts*) entlang einer Richtung sind die eigentlichen orthochronen Transformationen, die die Ortskomponenten senkrecht zur Richtung unverändert bleiben. Im Beispiel eines Boosts entlang der x^1-Achse bleiben x^2 und x^3 invariant. Solche Transformationen sind der Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{II.30}$$

[(i)] H. Poincaré, 1854–1912

mit einer reellen Zahl ϕ, der *Rapidität* des Boosts. Ist die durch Λ beschriebene Transformation passiv, so bewegt sich der Ursprungspunkt $\vec{x} = \vec{0}$ des alten Bezugssystems mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = c \tanh\phi\, \vec{\mathrm{e}}_1$ im neuen Bezugssystem. Außerdem definiert man den entsprechenden *Lorentz-Faktor* γ als $\gamma = (1 - |\vec{v}|^2/c^2)^{-1/2} = \cosh\phi$.

Die Komposition zweier speziellen Lorentz-Transformationen entlang derselben Richtung mit Rapiditäten ϕ_1, ϕ_2 ergibt wieder eine spezielle Lorentz-Transformation — die Boosts entlang einer Richtung bilden eine Gruppe — mit Rapidität $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$. Daraus folgt sofort das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}.$$

II.3 Lorentz-Tensoren

In diesem Abschnitt wird das Verhalten physikalischer Größen unter Lorentz-Transformationen diskutiert. Ähnlich wie im Fall der Isometrien von $\mathscr{E}_3$ im § II.1.2 gibt es Skalare (§ II.3.1), Vektoren (§ II.3.2–II.3.3) und Tensoren (§ II.3.4) — wobei die zwei ersteren eigentlich Spezialfälle von Tensoren sind. Dabei sollen aber zwei Arten von Indizes eingeführt werden, sog. *kontravariante* und *kovariante* Indizes, entsprechend der Tatsache, dass der metrische Tensor $\mathsf{\eta}$ keine positiv definite Bilinearform ist.

II.3.1 Skalare

Ein *Lorentz-Skalar* ist eine Größe, die invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Beispiele davon sind definitionsgemäß das Linienelement (II.21) oder das 4-Volumenelement $\mathrm{d}^4\mathsf{x}$, Gl. (II.26).

Man definiert auch *Pseudoskalare*, die invariant unter der eigentlichen Lorentz-Gruppe sind, und ihr Vorzeichen unter uneigentlichen Transformationen — wie Raumspiegelung oder Zeitumkehr — ändern.

II.3.2 Kontravariante Vektoren

Ein sog. *kontravarianter (Vierer)Vektor* V ist eine Menge aus vier Größen V^μ, die sich unter Lorentz-Transformationen wie die Koordinaten x^μ transformieren, d.h.

$$V^\mu \to V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu, \tag{II.31a}$$

oder in Matrixform

$$\mathsf{V} \to \mathsf{V}' = \Lambda \mathsf{V}. \tag{II.31b}$$

Ein Beispiel ist die *Vierergeschwindigkeit* u^μ eines massiven Teilchens entlang seiner *Weltlinie* (Trajektorie in der Zeitraum) $X^\mu(s)$, die als

$$u^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}X^\mu(s)}{\mathrm{d}\tau} \tag{II.32a}$$

definiert ist, wobei s eine Parametrisierung der Weltlinie und τ die Eigenzeit des Teilchens sind. Dies folgt aus der Tatsache, dass das Eigenzeitelement $\mathrm{d}\tau$ im Zähler ein Lorentz-Skalar ist [vgl. Gl. (II.23)]. Komponentenweise gelten $u^0 = \gamma c, u^i = \gamma v^i$ für $i = 1, 2, 3$, mit dem Lorentz-Faktor γ und den Komponenten v^i der dreidimensionalen Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Teilchens. Der Kürze halber wird im Folgenden für diese Zerlegung in Zeit- und Ortskoordinaten die Notation

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix} \tag{II.32b}$$

benutzt.

Der kontravariante *Viererimpuls* eines Teilchens der Masse m entlang dieser Weltlinie ist

$$p^\mu = mu^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{II.33}$$

mit der Energie E und dem Impuls $\vec{p}$ des Teilchens.

Der Vergleich zwischen Gl. (II.32b) und (II.33) gibt die nützliche Beziehung $\vec{v} = \dfrac{\vec{p}c}{E}$.

Bemerkung: Die Vierergeschwindigkeit wird für ein masseloses Teilchen, z.B. ein Photon, nicht definiert, da solche Teilchen kein Ruhesystem haben, in welchem die Eigenzeit definiert werden kann: sie bewegen sich entlang lichtartiger Weltlinien.

II.3.3 Kovariante Vektoren

Ein *kovarianter (Vierer)Vektor* ist defintionsgemäß eine Menge aus vier Größen, die sich unter Lorentz-Transformationen wie der Gradient-Operator $\partial/\partial x^\mu$ verhalten, wobei der letztere auch als ∂_μ bezeichnet wird. Mithilfe der Kettenregel gilt

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu, \tag{II.34}$$

d.h., wenn man die einspaltige Matrix der ∂_μ als ∇ schreibt, $\nabla = \Lambda^T\,\nabla'$. Multipliziert man diese Gleichung links mit $\left(\Lambda^T\right)^{-1}$, so kommt

$$\nabla' = \left(\Lambda^T\right)^{-1}\nabla. \tag{II.35}$$

Zum anderen ergibt die charakteristische Eigenschaft (II.25a) von Lorentz-Transformationen, multipliziert links mit $\left(\Lambda^T\right)^{-1}$ und rechts mit η^{-1},[18] die Gleichung

$$\left(\Lambda^T\right)^{-1} = \eta\Lambda\eta^{-1}. \tag{II.36}$$

Aus den zwei letzteren Gleichungen folgt

$$\left(\eta^{-1}\nabla'\right) = \Lambda\left(\eta^{-1}\nabla\right), \tag{II.37}$$

d.h. $\eta^{-1}\nabla$ transformiert sich wie ein kontravarianter Vektor. Mit jedem kontravarianten Vektor V^μ kann man also einen kovarianten Vektor V_μ gemäß

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu}V^\nu \tag{II.38}$$

assoziieren. Komponentenweise gilt unter Verwendung des metrischen Tensors (II.22a)

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^0 \\ -V^1 \\ -V^2 \\ -V^3 \end{pmatrix}. \tag{II.39}$$

Umgekehrt kann mit jedem kovarianten Vektor V_μ der kontravariante Vektor

$$V^\mu = \eta^{\mu\nu}V_\nu \tag{II.40}$$

assoziiert werden, wobei die $\eta^{\mu\nu}$ die Matrixelemente von η^{-1} sind.

Bemerkungen:

∗ Der Unterschied zwischen der positiv definiten Metrik des euklidischen Raums $\mathscr{E}_3$ und der Metrik mit Signatur $(+,-,-,-)$ des Minkowski-Raums $\mathscr{M}_4$ spielt eine Rolle in Gl. (II.36), die mit Gl. (II.3) verglichen sein soll.

[18] Gleichung (II.22a) gibt sofort $\eta^{-1} = \eta$, doch wir wollen diese Identität der Allgemeinheit halber nicht benutzen.

$*$ Der Grund für die Existenz in der Relativitätstheorie von kontra- und kovarianten Vierervektoren ist einfach, dass es sich dabei um Elemente unterschiedlicher Vektorräume handelt. Somit sind die kovarianten Vektoren die Linearformen auf dem Vektorraum der kontravarianten Vektoren, d.h. die Elemente dessen Dualraums. Diese Betrachtungsweise wird z.B. in Ref. [3] (s. Kap. 3) verwendet, und lässt sich auf die Tensoren des nächsten Abschnitts einfach verallgemeinern.

II.3.4 Tensoren

Ein *Tensor* ist eine Größe mit möglicherweise kontravarianten und kovarianten Indizes, wobei sich jeder Index wie ein entsprechender Vektor transformiert. Beispielsweise transformiert sich der Tensor 3. Stufe mit Komponenten $T^{\mu\nu}{}_{\rho}$ wie $V^{\mu}V^{\nu}V_{\rho}$. Ein solcher Tensor kann als zweimal kontra- und einmal kovarianter Tensor, oder kürzer $\binom{2}{1}$-Tensor oder gar Tensor vom Typ (2,1), bezeichnet werden.

Für einen zweimal kovarianten Tensor lautet das Transformationsgesetz unter Verwendung der Gl. (II.34)

$$T_{\mu\nu} = \Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}T'_{\rho\sigma}, \tag{II.41}$$

d.h. in Matrixform, indem $T_{\mu\nu}$ durch eine 4×4-Matrix dargestellt wird,

$$\mathsf{T} = \Lambda^{T}\,\mathsf{T}'\Lambda. \tag{II.42}$$

Der Vergleich mit Gl. (II.25a) zeigt, dass der metrische Tensor η invariant unter einer beliebigen Lorentz-Transformation bleibt. Dies erklärt im Nachhinein die Stelle der Indizes dessen Matrixelemente $\eta_{\mu\nu}$.

Mithilfe der Tensoren $\eta_{\mu\nu}$ bzw. $\eta^{\mu\nu}$ kann man kontra- bzw. kovariante Lorentz-Indizes herauf- bzw. herabziehen, ähnlich den Gleichungen (II.38) und (II.40). Wendet man diese Möglichkeit an $\eta^{\mu\nu}$ selber, so erhält man

$$\eta^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}, \tag{II.43}$$

mit dem üblichen Kronecker-Symbol: $\delta^{\mu}{}_{\nu} = 1$ wenn $\mu = \nu$ und 0 sonst. Dies entspricht einfach der Identität $\eta^{-1}\eta = \mathbb{1}_4$.

Ein anderer invarianter Tensor (genauer: *Pseudotensor*, da sein Vorzeichen sich unter uneigentlicher Transformationen ändert) ist der vollständig antisymmetrische Levi–Civita-Tensor[19]

$$\boxed{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine gerade Permutation von (0,1,2,3) ist,} \\ -1 & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine ungerade Permutation von (0,1,2,3) ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}} \tag{II.44}$$

Dieser Tensor transformiert sich nämlich gemäß

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \to \epsilon'^{\,\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\det\Lambda. \tag{II.45}$$

Hier sollte beachtet werden, dass $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123}$, während für den dreidimensionalen Levi–Civita Tensor $\epsilon_{123} = \epsilon^{123}$ gilt.

II.3.5 Kontraktion zweier Tensoren

Seien V^{μ} ein kontravarianter und W_{μ} ein kovarianter Vektor. Die Transformationsgesetze (II.31b) und (II.35) zeigen, dass $W_{\mu}V^{\mu} = \mathsf{W}^{T}\,\mathsf{V}$ ein Lorentz-Skalar ist — das uneigentlich genannte „Skalarprodukt“ der zwei Vektoren.

[19] Einige Autoren benutzen die Konvention $\epsilon_{0123} = +1$, entsprechend $\epsilon^{0123} = -1\ldots$

Dagegen sind $W^\mu V^\mu$ und $W_\mu V_\mu$ keine Skalare unter der Lorentz-Gruppe, und stellen somit keine „gültige" Tensorkontraktionen dar. Dem in § II.1.2 c gegebenen Rezept, um zwei Tensoren zu kontrahieren, muss man also die zusätzliche Regel hinzufügen, dass einer der kontrahierten Indizes kontra- und der andere kovariant sein soll.

Da $W_\mu V^\mu = \eta_{\mu\nu} W^\mu V^\nu = W^\nu V_\nu = W^\mu V_\mu$ ist, spielt es in einer Kontraktion keine Rolle, welcher Index oben und welcher unten ist.

Beispielsweise beträgt das skalare *Lorentz-Quadrat* des Viererimpulses (II.33) $p_\mu p^\mu = m^2c^2$, während für die Vierergeschwindigkeit (II.32a) immer $u_\mu u^\mu = c^2$ gilt.

Wenn V und W zwei Vierervektoren mit kontravarianten Koordinaten V^μ und W^μ bezeichnen, werden im Folgenden die Notationen

$$\mathsf{V} \cdot \mathsf{W} \equiv V_\mu W^\mu = W_\mu V^\mu \qquad \text{(II.46a)}$$

und, im Fall $\mathsf{V} = \mathsf{W}$

$$\mathsf{V}^2 \equiv \mathsf{V} \cdot \mathsf{V} \equiv V_\mu V^\mu \qquad \text{(II.46b)}$$

oft verwendet. Dementsprechend wird das Lorentz-Quadrat des Viererimpulses (multipliziert mit c^2) als $\mathsf{p}^2c^2 = E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2 = m^2c^4$ geschrieben.

II.3.6 Kovariante Formulierung eines physikalischen Gesetzes

Laut dem Einsteinschen Relativitätsprinzip (Postulat SRT II) sollen die Naturgesetze mathematisch so formuliert werden, dass die Form der entsprechenden Gleichungen in allen Inertialsystemen unverändert bleibt. Theorien, die diesem Prinzip genügen, werden als Lorentz- oder relativistisch *kovariant* bezeichnet.

Infolgedessen können solche Gleichungen nur Identitäten zwischen Lorentz-Tensoren der gleichen Stufe sein, nachdem alle möglichen Kontraktionen von Indizes berücksichtigt wurden.

Somit sind $V^\mu = W^\mu$ oder $V^\mu T_{\mu\nu} = W_\nu$ kovariante Gleichungen: eine Lorentz-Transformation transformiert sie in $V'^\mu = W'^\mu$ oder $V'^\mu T'_{\mu\nu} = W'_\nu$, d.h. sie nehmen die gleiche Form an. Dagegen stellen Identitäten wie $V^\mu = T^\mu{}_\nu$ oder $V^\mu = W_\mu$ keine relativistisch kovariante Gleichungen dar, sondern können einen (Tipp-?)Fehler signalisieren...

Bemerkung: Manchmal wird statt Lorentz-kovariant die Redensart „Lorentz-invariant" verwendet. Streng genommen bedeutet aber die Letztere, dass die Gleichungen unter Lorentz-Transformationen unverändert bleiben, was eine stärkere Bedingung ist, als die Invarianz der Form der Gleichungen.

Literatur zum Kapitel II

Zur Speziellen Relativitätstheorie:

- Feynman, *Vorlesungen über Physik. Band 1* [4] = *Lectures on Physics. Vol. I* [5], Kap. 15–17.
- Fließbach, *Mechanik* [6], Kap. IX.
- Griffiths, *Elektrodynamik* [7] = *Introduction to Electrodynamics* [8], Kap. 12.1.
- Landau & Lifschitz, *Band II: Klassische Feldtheorie* [9] = *The classical theory of fields* [10], Kap. I.
- Nolting, *Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik* [11], 1. Teil.

Zur Gruppentheorie in der (Teilchen)Physik:

- Georgi, *Lie algebras in particle physics* [12].
- Ramond, *Group theory. A physicist's survey* [13].