XIII.1.2 Neutrino-Oszillationen

Bei seiner Erzeugung oder seinem Nachweis befindet sich ein Neutrino (oder Antineutrino) in einem Wechselwirkungseigenzustand ν_ℓ, weil beide Ereignisse auf schwachen Prozessen beruhen.[88] Zwischen den Ereignissen ist das Neutrino dagegen frei: dann propagiert jeder „ν_i-Anteil" in der Neutrino-Wellenfunktion gemäß einem einfachen Gesetz. Im Allgemeinen unterscheidet sich die Zusammensetzung der Masseneigenzustände zum Zeitpunkt der Messung von jener bei der Erzeugung. Dies führt zur Möglichkeit, dass ein in einem gegebenen Flavour erzeugtes Neutrino später als ein Neutrino eines anderen Flavours detektiert wird.

Der entsprechende Formalismus wird erstens vereinfacht dargestellt. Dann werden einige Beispiele von experimentellen Beobachtungen des Phänomens diskutiert, und zwar für Neutrinos, die aus unterschiedlichen Quellen kommen.

XIII.1.2 a Formalismus

Der Einfachheit halber werden in der folgenden Herleitung nur zwei Neutrino-Flavours ν_ℓ, $\nu_{\ell'}$ und damit zwei Masseneigenzustände ν_j, ν_k betrachtet

$$\begin{pmatrix}\nu_\ell\\ \nu_{\ell'}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_j\\ \nu_k\end{pmatrix}.$$

Dabei wird der Mischungswinkel als α bezeichnet, um ihn von den Mischungswinkeln in einem Drei-Flavour-Szenario zu unterscheiden.

Die freien Masseneigenzustände ν_j, ν_k propagieren gemäß[89]

$$|\nu_i(\mathsf{x})\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}_i\cdot\mathsf{x}}\,|\nu_i\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_it-\vec{p}_i\cdot\vec{x})}\,|\nu_i\rangle, \tag{XIII.4}$$

wobei E_i bzw. $\vec{p}_i$ die Energie bzw. den Impuls des Zustands bezeichnet. Nach einer Strecke der Länge L, die in einer Zeitspanne t_L zurückgelegt wird, gibt dies

$$|\nu_i(t_L)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_it_L-p_iL)}\,|\nu_i\rangle$$

mit $p_i \equiv |\vec{p}_i|$.

Ein Neutrino[90] mit Energie E sei zur Zeit $t=0$ als Flavour-Eigenzustand erzeugt, z.B. als ν_ℓ: sein Zustand lautet dann $|\nu(0)\rangle = |\nu_\ell\rangle = \cos\alpha\,|\nu_j\rangle + \sin\alpha\,|\nu_k\rangle$. Zum Zeitpunkt t_L, d.h. nachdem es eine Strecke der Länge L zurückgelegt hat, ist der Zustand gegeben durch

$$|\nu(t_L)\rangle = \cos\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(Et_L-p_jL)}\,|\nu_j\rangle + \sin\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(Et_L-p_kL)}\,|\nu_k\rangle,$$

wobei $p_i = \sqrt{E^2-m_i^2}$.

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass das Neutrino dann als ein Neutrino des anderen Flavours $\nu_{\ell'}$ beobachtet wird, wird gegeben durch die Projektion von dessen Zustand $|\nu(t_L)\rangle$ auf $\langle\nu_{\ell'}| = -\sin\alpha\langle\nu_j| + \cos\alpha\langle\nu_k|$, und zwar

$$\langle\nu_{\ell'}|\,\nu(t_L,L)\rangle = \cos\theta'\sin\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et_L}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_kL}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_jL}\right) = \mathrm{i}\sin(2\alpha)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et_L}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_j+p_k)L/2}\sin\frac{(p_k-p_j)L}{2}.$$

Diese Amplitude entspricht einer Wahrscheinlichkeit

$$\mathcal{P}(\nu_\ell\to\nu_{\ell'}) = \left|\langle\nu_{\ell'}|\,\nu(t_L,L)\rangle\right|^2 = \sin^2(2\alpha)\sin^2\frac{(p_k-p_j)L}{2} \tag{XIII.5}$$

[88] Typischerweise entsteht das (Anti)Neutrino in einem Prozess, der den geladenen Leptonenstrom $\bar{\hat{\psi}}_{\nu_\ell,\mathrm{L}}\gamma^\rho\hat{\psi}_{\ell,\mathrm{L}}$ oder dessen Ladungskonjugierte involviert, während die Detektion entweder über geladene Ströme oder über neutrale Ströme erfolgt.

[89] Die hier benutzten Zustände $|\nu_i\rangle$ sind auf 1 normiert und orthogonal zueinander: $\langle\nu_k|\,\nu_j\rangle = \delta_{jk}$.

[90] Genauer, eine Menge von Neutrinos mit identischen kinematischen Eigenschaften.

dafür, dass sich das Neutrino nach einer Strecke L von einem ν_ℓ- in ein $\nu_{\ell'}$-Neutrino umwandelt hat. Dabei sieht man, dass diese Wahrscheinlichkeit unabhängig von der Zeitspanne ist.

Nimmt man an, dass das Neutrino ultrarelativistisch ist, d.h. $E \gg m_i$, so gilt

$$p_i \sim E - \frac{1}{2}\frac{m_i^2}{E},$$

und die Umwandlungswahrscheinlichkeit (XIII.5) wird zu

$$\mathcal{P}(\nu_\ell \to \nu_{\ell'}) = \sin^2(2\alpha)\sin^2\frac{\Delta m_{jk}^2 L}{4E} \quad \text{mit} \quad \Delta m_{jk}^2 \equiv m_j^2 - m_k^2. \tag{XIII.6}$$

Bei fester Energie des Neutrinos ist diese Wahrscheinlichkeit eine periodische Funktion der zurückgelegten Strecke L, d.h. der Flavour des Neutrinos oszilliert entlang seiner Trajektorie: dieses Phänomen wird als *Neutrinooszillationen* bezeichnet. Die Amplitude dieser Schwingungen wird durch den Mischungswinkel α festgelegt: maximale Mischung gibt die größten Oszillationen, während es in Abwesenheit von Mischung keine Oszillation gibt.

Die Wellenlänge der Oszillationen wird bestimmt durch die Energie des Neutrinos und durch die Differenz der Massenquadrate der Eigenzustände, die propagieren. Experimentell findet man für diese Differenzen[87]

$$|\Delta m_{21}^2| \equiv |m_2^2 - m_1^2| \simeq 7,4\cdot 10^{-5}\,\text{eV}^2, \qquad |\Delta m_{32}^2| \equiv |m_3^2 - m_2^2| \simeq 2,4\text{–}2,5\cdot 10^{-3}\,\text{eV}^2. \tag{XIII.7}$$

Aus diesen Werten folgert man sofort $|\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2|$ für die dritte Differenz der Massenquadrate.

Bemerkungen:

∗ Die Oszillation bedeutet, dass die individuellen Leptonenflavour-Quantenzahlen nicht erhalten sind.

∗ In einem realistischeren Drei-Flavour-Szenario ist der Ausdruck der Umwandlungswahrscheinlichkeit natürlich komplizierter, doch im Endeffekt hängt sie noch von den gleichen Parametern ab, und zwar von den Einträgen der Mischungsmatrix, die die Amplitude bestimmen, und von den Δm_{ij}^2, die eine Rolle in der Wellenlänge spielen. Somit findet man für die Wahrscheinlichkeit der Umwandlung von einem Neutrino ν_ℓ in $\nu_{\ell'}$ nach einer Strecke L

$$\mathcal{P}(\nu_\ell \to \nu_{\ell'}) = \sum_{j=1}^{3}|U_{\ell' j}|^2|U_{\ell j}|^2 + 2\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{3}\left|U_{\ell' j}U_{\ell j}^* U_{\ell k}U_{\ell' k}^*\right|\cos\!\left(\frac{\Delta m_{jk}^2 L}{2E} - \varphi_{\ell'\ell;jk}\right), \tag{XIII.8a}$$

wobei $\varphi_{\ell'\ell;jk}$ das Argument der komplexen Zahl $U_{\ell' j}U_{\ell j}^* U_{\ell k}U_{\ell' k}^*$ ist. Für Antineutrinos gilt ähnlich

$$\mathcal{P}(\bar\nu_\ell \to \bar\nu_{\ell'}) = \sum_{j=1}^{3}|U_{\ell' j}|^2|U_{\ell j}|^2 + 2\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{3}\left|U_{\ell' j}U_{\ell j}^* U_{\ell k}U_{\ell' k}^*\right|\cos\!\left(\frac{\Delta m_{jk}^2 L}{2E} + \varphi_{\ell'\ell;jk}\right). \tag{XIII.8b}$$

Falls $\varphi_{\ell'\ell;jk}$ nicht Null ist — was passieren kann, falls $\delta_{\mathsf{CP}} \neq 0$ in der PMNS-Matrix —, sind die Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}(\nu_\ell \to \nu_{\ell'})$ und $\mathcal{P}(\bar\nu_\ell \to \bar\nu_{\ell'})$ im Allgemeinen ungleich, entsprechend einer Verletzung der CP-Symmetrie.

∗ Setzt man numerische Werte ein, so findet man, dass die Wellenlänge der Schwingung durch

$$\lambda\,[\text{km}] = 2,48\,\frac{E\,[\text{GeV}]}{\Delta m^2\,[\text{eV}^2]}$$

gegeben ist. Damit die Umwandlungswahrscheinlichkeit nicht klein ist, soll L der Ordnung dieser Wellenlänge bzw. eines Vierfachen davon sein: für eine typische Neutrinoenergie von etwa 1 GeV soll der Abstand zwischen Erzeugungs- und Beobachtungspunkt des Neutrinos von etwa 10^3 km sein. Dies wird in den nächsten Paragraphen illustriert.

XIII.1.2 b Sonnen-Neutrinos

Eine erste Quelle von Neutrinos, deren Oszillation gemessen wurde, ist die Sonne. Gemäß dem Standard-Sonnenmodell werden im Kern der Sonne nur Elektron-Neutrinos ν_e erzeugt, in den dort stattfindenden Kernreaktionen:

- pp I-Kette: $4p \to {}^4\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu_e$, wobei die Neutrinos aus β^+-Prozesse kommen;
- pp II-Kette: $e^- + {}^3\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \to e^- + {}^7\mathrm{Be} \to {}^7\mathrm{Li} + \nu_e$.
- pp III-Kette: $p + {}^3\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \to p + {}^7\mathrm{Be} \to {}^8\mathrm{B} \to 2\,{}^4\mathrm{He} + e^+ + \nu_e$.

Dabei haben die Neutrinos Energien von etwa 0.1–10 MeV.

Der auf der Erde gemessene Fluss von Elektron-Neutrinos aus den *pp* II- und *pp* III-Ketten,[(91)] entsprechend ν_e die eine Strecke von etwa $1,5 \cdot 10^8$ km zurückgelegt haben, beträgt nur ungefähr ein Drittel des erwarteten Flusses [47]

$$\frac{\text{gemessener } \nu_e\text{-Fluss}}{\text{erwarteter } \nu_e\text{-Fluss}} \approx 0,35. \tag{XIII.9}$$

Das SNO Experiment[(92)] konnte den erwarteten Fluss, der im Nenner steht, experimentell bestätigen, und zwar durch die Messung des gesamten Flusses an allen Neutrinos (ν_e, ν_μ und ν_τ).

Dabei wurden nicht nur inelastische Reaktionen, die auf geladenen Strömen — auf dem Prozess $\nu_e+n \to e^-+p$, wobei das Neutron einem Atomkern gehört — beruhen, in der Messung benutzt, sondern auch Prozesse mit neutralen Strömen für die drei Neutrino-Flavours. Genauer wurden im SNO Experiment sowohl der Prozess $\nu_e + \mathrm{d} \to e^- + p + p$ als auch $\nu_\ell + \mathrm{d} \to \nu_\ell + p + n$ und $\nu_\ell + e^- \to \nu_\ell + e^-$ für alle drei ν_ℓ gemessen, wobei d das Deuteron (gebundener Zustand aus einem Proton und einem Neutron) bezeichnet.

Die Deutung der Beobachtung des Verhältnisses (XIII.9) ist, dass sich die erzeugten Elektron-Neutrinos in die zwei anderen Flavours, die nicht separat gemessen werden, auf dem Weg zur Erde umwandeln. Genauer liefert die Messung Information über den den Winkel θ_{12} und die Differenz Δm^2_{21}.[(93)]

XIII.1.2 c Atmosphärische Neutrinos

Die Streuung von kosmischer Strahlung, insbesondere Protonen, an den Atomkernen der oberen Atmosphäre führt zur Entstehung von positiven Pionen. Jedes π^+ zerfällt dann meistens in ein Antimyon μ^+ und ein Myon-Neutrino ν_μ. Wiederum zerfällt das Antimyon gemäß $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar\nu_\mu$. Die dabei entstehenden Neutrinos werden kollektiv als *atmosphärische Neutrinos* bezeichnet und haben eine Energie von etwa $E = 1$–10 GeV.

Solche atmosphärischen Neutrinos werden dann durch einen Detektor, der sich nah an der Erdoberfläche befindet, nachgewiesen, und zwar durch die Reaktion $\nu_\ell + A \to \ell + A'$, wobei $\ell = e^-$ oder μ^-, während A und A' Atomkerne bezeichnen — somit werden die Antineutrinos aus dem μ^+-Zerfall ignoriert. Die im Detektor reagierenden Neutrinos können entweder direkt aus der Atmosphäre oberhalb des Labors kommen, oder sie erreichen den Detektor, nachdem sie durch die Erde durchgeflogen sind, d.h. sie kommen „von unten“. Im ersteren Fall haben sie eine Strecke von einige 10 km zurückgelegt, während im letzteren Fall die Strecke etwa $L \approx 10^4$ km beträgt.

[(91)] Die ersten Messungen der Sonnen-Neutrinos — anhand der Reaktion $\nu_e + {}^{37}\mathrm{Cl} \to e^- + {}^{37}\mathrm{Ar}$ — und deren Defizit wurden durch R. Davis Jr.[(cb)] in der Homestake-Goldmine durchgeführt

[(92)] Sudbury Neutrino Observatory (Kanada)

[(93)] Da $\sin^2(2\theta_{13})$ ziemlich kleiner als $\sin^2(2\theta_{12})$ ist, hängt die Messung viel weniger von θ_{13} und Δm^2_{31} ab.

[(cb)] R. Davis Jr., 1914–2006

Messungen der Flüsse von Myon-Neutrinos aus beiden Richtungen durch das Super-Kamiokande Experiment haben gezeigt, dass etwa die Hälfte der Myon-Neutrinos, die durch die Erde propagieren, den Detektor nicht als ν_μ, sondern als Neutrinos eines anderen Flavours erreichen [48]

$$\frac{\text{Fluss von } \nu_\mu \text{ von unten}}{\text{Fluss von } \nu_\mu \text{ von oben}} \approx 0,54.$$

Dieses Ergebnis wird meistens als die Oszillation von Myon- in τ-Neutrinos interpretiert, d.h. die Messung liefert Einschränkungen über θ_{23} und $|\Delta m^2_{32}|$.

Bemerkung: Bei der Interpretation muss man für die Neutrinos, die die Erde durchqueren, sog. Materie-Effekte — auch bekannt als *Mikheyev*[cc]*–Smirnov*[cd]*–Wolfenstein*-[ce](MSW) *Effekt* — berücksichtigen. In Materie werden die Massen m_i bzw. die Mischungswinkel θ_{ij} durch effektive Massen bzw. effektive Mischungswinkel ersetzt, was die Amplitude der Oszillationen verstärken kann.

Dieser Effekt spielt auch eine Rolle für die Sonnen-Neutrinos aus der pp III-Kette, die viel mehr oszillieren, als solche aus der pp I- und pp II-Ketten, wenn sie durch die Sonne propagieren.

XIII.1.2 d Beschleuniger-Neutrinos

Andere Ergebnisse betreffen Neutrinos und Antineutrinos, die in einem (kontrollierten) Experiment bei einem Teilchen-Beschleuniger erzeugt werden, und danach in einem entfernten Detektor gemessen werden. Dabei ist der Abstand zwischen Erzeugungs- und Messungspunkt kleiner als bei Sonnen- oder atmosphärischen Neutrinos, was etwas ungünstig ist, um Oszillationen beobachten zu können. Dieser Nachteil wird aber kompensiert durch die Tatsache, dass die Energie und der Fluss der Neutrinos hier ziemlich genau bekannt sind. Insbesondere wird oft einen „nahen“ Detektor in einer Entfernung der Ordnung $L \approx 1$ km zur Bestimmung des Flusses benutzt.

Beispiele von solchen Experimenten sind K2K (KEK to Kamioka, in Japan, mit einem Abstand $L \approx 250$ km), OPERA & ICARUS (vom CERN nach dem Gran Sasso, entsprechend $L = 730$ km) oder MINOS (vom Tevatron am Fermilab nach der Soudan Mine, $L = 735$ km).

XIII.1.2 e Kernreaktor-Neutrinos

Schließlich benutzen einige Experimente die Neutrinos, die aus wirtschaftlichen Kernreaktoren emittiert werden. Hier auch sind Energie und Fluß der Neutrinos gut kontrolliert.

Beispiele sind im Japan KamLAND — wobei im Kamioka-Laboratorium die $\bar{\nu}_e$-Antineutrinos aus etwa fünfzig Kernkraftwerken mit gut bekannten Leistungen gemessen werden —, CHOOZ (Frankreich), Daya Bay (China) oder RENO (Südkorea). Die zwei letzteren Experimente haben im Frühling[94] von 2012 die ersten Messungen von θ_{13} durchgeführt.

XIII.1.3 Neutrino-Massen

Die oben diskutierten Neutrino-Oszillationen zeigen, dass die Neutrinos massiv sind, liefern aber keine direkte Messung der Massen, sondern nur Information über die Beträge der Differenzen Δm^2_{jk} der Massenquadrate.

XIII.1.3 a Massen-Hierarchie

Wie schon erwähnt wurde, folgt aus den experimentell bestimmten Werten von $|\Delta m^2_{21}|$ und $|\Delta m^2_{32}|$, dass $|\Delta m^2_{31}| \sim |\Delta m^2_{32}|$ gilt. Somit sind m_1 und m_2 „nah an einander“, während m_3 „weit entfernt“ (auf einer Massenskala) ist. *Konventionsgemäß* ist $m_2 \geq m_1$ und daher $\Delta m^2_{21} \geq 0$. Dagegen ist das Vorzeichen von der Differenz Δm^2_{32} keine Konvention — und durch die bisherigen

[94] 8. März für Daya Bay [49], 3. April für RENO [50].

[cc] S. Mikheyev, 1940–2011 [cd] A. Yu. Smirnov, 1951– [ce] L. Wolfenstein, 1923–2015

Experimente noch nicht bestimmt worden. Anders gesagt ist die Reihenfolge der Massen noch unbekannt, und zwar ob $m_1 < m_2 \ll m_3$ oder $m_3 \ll m_1 < m_2$ gilt. Im ersteren Fall spricht man von einer *normalen Hierarchie* — ν_3 ist der Masseneigenzustand, der den größten Anteil an ν_τ enthält, d.h. am Partner des schwersten geladenen Leptons —, und im letzteren Fall von *invertierter Hierarchie*.

XIII.1.3 b Direkte Bestimmung der Massen

Kinematische Überlegungen — die auf Energie-Impuls-Erhaltung basieren — können prinzipiell benutzt werden, um die Massen von Neutrinos in Labor-basierten Experimenten zu bestimmen.

Ein Beispiel einer solchen Messung könnte in Untersuchungen des β-Zerfalls(95) von Tritium ^{3}H erfolgen. Dabei beeinflusst die Masse des emittierten Antineutrinos — genauer, eine effektive Masse m_ν(96) — die Position des Endpunkts des Energiespektrums für das emittierte Elektron(97) sowie die Krümmung des Spektrums in der Nähe des Endpunkts. Die Ergebnisse solcher Untersuchungen geben bisher nur eine obere Schranke: im September 2019 hat das KATRIN-Experiment eine maximale Neutrinomasse $m_\nu < 1,1$ eV [51] gemeldet. Weitere Messungen am KATRIN Experiment sollten noch die Schranke um einen Faktor 5 verbessern können, oder eine Masse von etwa 0,4 eV mit hoher Wahrscheinlichkeit messen.

Im Hot Big Bang Modell der Kosmologie beeinflussen die Eigenschaften von Neutrinos, insbesondere deren Flavour-Anzahl und Massen, die frühe Entwicklung des Universums.(98) Dies bedeutet auch, dass sich aus kosmologische Beobachtungen Rückschlüsse auf die Neutrino-Parameter ziehen lassen — obwohl diese Rückschlüsse zwar modellabhängig sind. Somit findet man für die Summe der Massen der „leichten" Neutrinos $m_{\text{tot}} \lesssim 0.5$ eV.

Literatur

- Cottingham & Greenwood, *An introduction to the standard model of particle physics* [44], Kap. 19–20.
- Griffiths, *Introduction to elementary particles* [8], Kap. 11.
- Particle Data Group, *Review of Particle Properties 2018* [1], Kap. 14 (bzw. Kap. 15 des online verfügbaren 2019 Updates).

(95) $^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + e^- + \bar\nu_e$

(96) $m_\nu^2 = \sum_j |\mathcal{U}_{ej}|^2 m_j^2$ mit den Einträgen der ersten Zeile der PMNS-Matrix.

(97) ... dessen Darstellung „Kurie(cf)-Plot" heißt.

(98) S. z.B. Kap. 25 der Review of Particle Properties [1].

(cf) F. N. D. Kurie, 1907–1972