XII.5.3 CKM-Matrix und CP-Verletzung

Die in Gl. (XII.33) eingeführte unitäre Matrix $\mathcal{V}_{\rm CKM}$ ist die Verallgemeinerung auf drei Generationen der Mischungsmatrix (XI.13), und wird *Cabibbo–Kobayashi*[(bv)]*–Maskawa*[(bw)]*-Matrix*, oder kurz *CKM-Matrix* genannt. Deren Elemente werden als

$$\mathcal{V}_{\rm CKM} \equiv \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \tag{XII.34}$$

geschrieben, wobei jedes V_{ij} eine komplexe Zahl ist. Im Rahmen des Standardmodells sind diese Zahlen freie Parameter, die aber experimentell gemessen werden können. Dabei findet man für die Beträge der Matrixelemente (vgl. Kap. 12 der Review of Particle Physics [1])

$$|\mathcal{V}_{\rm CKM}| \approx \begin{pmatrix} 0,974 & 0,225 & 0,004 \\ 0,225 & 0,973 & 0,042 \\ 0,009 & 0,041 & 0,999 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Mischung zwischen der 3. Generation und den zwei ersten ziemlich klein.

Eine spezielle unitäre 3×3-Matrix wird allgemein durch $3^2 = 9$ reelle Parameter bestimmt.[(83)] Aus diesen 9 Parametern können 6 als Phasen geschrieben werden — z.B. als die Phasen der Matrixelemente V_{ij} mit $i \leq j$ —, während die 3 anderen Winkel sind.[(84)] 5 dieser Phasen können in den Definitionen der Quark-Felder $\hat\psi_s$, $\hat\psi_b$, $\hat\psi_{d'}$, $\hat\psi_{s'}$ und $\hat\psi_{b'}$ absorbiert werden, entsprechend einer Verschiebung ihrer relativen Phasen zur Phase des $\hat\psi_d$-Feldes. Es bleiben allgemein also 4 reelle Parameter, einschließlich einer Phase. Somit lautet eine übliche Parametrisierung der CKM-Matrix

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\rm CKM} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}\,{\rm e}^{-{\rm i}\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}\,{\rm e}^{{\rm i}\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}\,{\rm e}^{-{\rm i}\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}\,{\rm e}^{{\rm i}\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}\,{\rm e}^{{\rm i}\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}\,{\rm e}^{{\rm i}\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}\,{\rm e}^{{\rm i}\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{XII.35}$$

wobei $c_{ij} = \cos\vartheta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\vartheta_{ij}$ mit drei Winkeln ϑ_{12}, ϑ_{13}, ϑ_{23}.

Zur Illustration dieser Absorption der Phasen in einer Neudefinition der Felder kann man der Einfachheit halber ein Beispiel mit nur zwei Generationen betrachten. Es seien also zwei „Masseneigenzustände" $\hat\psi_1$, $\hat\psi_2$ und dementsprechend „Wechselwirkungseigenzustände" $\hat\psi_{1'}$, $\hat\psi_{2'}$, wobei die Letzteren unitäre Linearkombinationen der Ersteren sind:

$$\begin{pmatrix} \hat\psi_{1'} \\ \hat\psi_{2'} \end{pmatrix} = \mathcal{V}_2 \begin{pmatrix} \hat\psi_1 \\ \hat\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,{\rm e}^{{\rm i}\delta_1} & s\,{\rm e}^{{\rm i}\delta_3} \\ -s\,{\rm e}^{{\rm i}\delta_2} & c\,{\rm e}^{{\rm i}(\delta_2+\delta_3-\delta_1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat\psi_1 \\ \hat\psi_2 \end{pmatrix}$$

mit einer unitären Matrix $\mathcal{V}_2$, deren allgemeine Parametrisierung durch einen Winkel ϑ (mit $c \equiv \cos\vartheta$, $s \equiv \sin\vartheta$) und drei Phasen δ_i geschrieben wurde. $\mathcal{V}_2$ lässt sich noch schreiben als

$$\mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} {\rm e}^{{\rm i}\delta_1} & 0 \\ 0 & {\rm e}^{{\rm i}\delta_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {\rm e}^{{\rm i}(\delta_3-\delta_1)} \end{pmatrix}.$$

[(83)] Eine spezielle unitäre $n\times n$-Matrix lässt sich als ${\rm e}^{{\rm i}H}$ schreiben, wobei H eine hermitische Matrix ist. Die Letztere wird durch n reelle diagonale Elemente und $n(n-1)/2$ komplexe Elemente H_{ij} mit $i < j$ charakterisiert, entsprechend insgesamt $n + 2n(n-1)/2 = n^2$ reellen Parametern.

[(84)] In $n = 3$ Dimensionen kann man $n(n-1)/2 = 3$ paarweise orthogonale Ebene finden; die $n(n-1)/2$ Winkel entsprechen Drehungen in diesen Ebenen.

[(bv)] M. Kobayashi, 1944– [(bw)] T. Maskawa, 1940–

Definiert man neue Felder $\hat{\psi}'_1 \equiv \hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}'_2 \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_3-\delta_1)}\,\hat{\psi}_2$, $\hat{\psi}'_{1'} \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_1}\,\hat{\psi}_{1'}$ und $\hat{\psi}'_{2'} \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_2}\,\hat{\psi}_{2'}$, so gilt

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}'_{1'} \\ \hat{\psi}'_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}'_1 \\ \hat{\psi}'_2 \end{pmatrix},$$

d.h. die Matrix $\mathcal{V}_2$ und die ursprünglichen Felder werden durch eine Matrix $\mathcal{V}'_2$ ohne Phase und durch neue Felder, die sich von den alten einfach um eine Phase unterscheiden, ersetzt. Man sieht noch, dass das Feld $\hat{\psi}_1$ nicht mehr um eine Phase gedreht werden kann, ohne die Determinante von $\mathcal{V}'_2$ zu ändern. Dementsprechend können nur $2n-1$ Phasen einer speziellen unitären $n \times n$-Matrix absorbiert werden.

Die Phase δ stellt ein wichtiges Merkmal der CKM-Matrix dar. Ist diese Phase nämlich nicht Null, so kann man keinen rein reellen Ausdruck der CKM-Matrix finden. Dies hat dann zur Folge, dass es im Standardmodell CP-verletzende Prozesse geben kann, wie jetzt an einem Beispiel gezeigt wird.

Betrachte man also den Zerfall $B^0 \to K^+ + \pi^-$, wobei im Quarkmodell $B^0 = d\bar{b}$, $K^+ = u\bar{s}$ und $\pi^- = d\bar{u}$, sowie den $\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{P}}$-konjugierten Prozess $\bar{B}^0 \to K^- + \pi^+$. Hiernach wird der erstere Prozess als (Z) und der Letztere als $(\widetilde{\mathrm{Z}})$ bezeichnet.

Zur niedrigsten Ordnung in der schwachen Kopplungskonstanten g trägt der in Abb. XII.3 dargestellte „direkte“ Prozess

$$\text{(ZD)} \quad \bar{b} \to \bar{u} + W^+ \to \bar{u} + u + \bar{s}$$

zur Amplitude für den Zerfall (Z) bei. Das Diagramm zeigt sofort, dass die Amplitude für diesen Prozess proportional zum Produkt $V^*_{ub}V_{us}$ von Matrixelementen der CKM-Matrix ist. Genauer findet

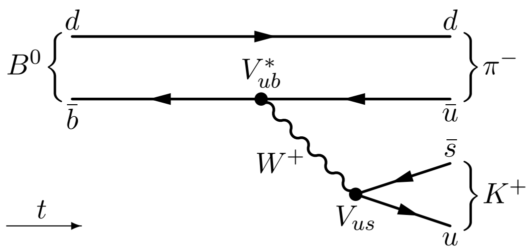

Abbildung XII.3 – „Direkter“ Prozess für den Zerfall $B^0 \to K^+ + \pi^-$.

man eine Amplitude $\mathcal{M}_D = |\mathcal{A}_D|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_D}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_D}$ mit δ_D der Phase von $V^*_{ub}V_{us}$ — und zwar $\delta_D = \delta$, obwohl das für das Folgende unwesentlich ist — und θ_D einer „starken“ Phase, die aus der hadronischen Physik kommt.[85]

Ähnlich diesem Prozess (ZD) erhält die Amplitude für den Prozess $(\widetilde{\mathrm{Z}})$ einen Beitrag aus dem Prozess $(\widetilde{\mathrm{ZD}})$, der $\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{P}}$-konjugiert zu (ZD) ist, und sich mit dem gleichen Diagram wie in Abb. XII.3 darstellen lässt, indem die Teilchen durch ihre Antiteilchen ersetzt werden. Die zugehörige Amplitude ist dann proportional zu $V_{ub}V^*_{us}$, und genauer beträgt $\widetilde{\mathcal{M}}_D = |\mathcal{A}_D|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_D}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_D}$: die starke Phase ist die gleiche wie in $\mathcal{M}_D$ — weil die starke Wechselwirkung unter $\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{P}}$ symmetrisch ist —, die schwache Phase ist aber das Negative von dieser des $\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{P}}$-konjugierten Prozesses. Somit führt die Anwesenheit einer nicht-verschwindenden Phase in der CKM-Matrix zu einen Unterschied zwischen den Amplituden für einen Prozess und dessen $\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{P}}$-konjugierten.

Wenn (ZD) bzw. $(\widetilde{\mathrm{ZD}})$ der einzige Prozess wäre, der zur führenden Ordnung eine Rolle beim Zerfall (Z) bzw. $(\widetilde{\mathrm{Z}})$ spielt, dann wären die Raten für (Z) und $(\widetilde{\mathrm{Z}})$ gleich, da eine Rate nur vom Betragsquadrat der Amplitude abhängt, vgl. Fermis Goldene Regel. Die Phase der CKM-Matrix würde dann im Endeffekt keine Rolle spielen.

[85] Grob gesagt folgt diese Phase aus der Tatsache, dass das $\bar{b}$- bzw. $\bar{u}$-Antiquark nicht frei ist, sondern in einem B^0- bzw. π^--Meson eingeschlossen.

In der Tat ist (ZD) nicht der einzige Kanal für den Zerfall (Z) zur Ordnung g^2. Es gibt noch den durch das „Penguin-Diagram“ der Abb. XII.4 dargestellte Prozess

$$\text{(ZP)} \quad \bar{b} \to \bar{q} + W^+ \to g + \bar{q} + W^+ \to u + \bar{u} + \bar{q} + W^+ \to \bar{u} + u + \bar{s} \quad \text{mit} \quad \bar{q} = \bar{u}, \bar{c}, \bar{t},$$

dessen Amplitude proportional zum Produkt $V_{qb}^* V_{qs}$ ist. Genauer lautet die Teilamplitude für (ZP) $\mathcal{M}_P = |\mathcal{A}_P|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_P}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_P}$ mit δ_P der Phase von $V_{qb}^* V_{qs}$, die für $q = c$ oder t ungleich δ_D ist, und θ_P einer „starken“ Phase, die wiederum ungleich θ_D ist.

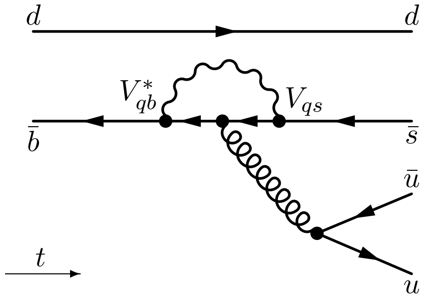

Abbildung XII.4 – „Penguin-Diagramm“ für den Zerfall $B^0 \to K^+ + \pi^-$.

Somit ist die gesamte Amplitude zur Ordnung g^2 für den Zerfall (Z) durch

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_D + \mathcal{M}_P = |\mathcal{A}_D|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_D}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_D} + |\mathcal{A}_P|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_P}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_P}$$

mit $\delta_D \neq \delta_P$ und $\theta_D \neq \theta_P$ gegeben.

Die Amplitude für den zu (ZP) $\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{P}}$-konjugierten Prozess ($\widetilde{\text{ZP}}$) ist dann $\widetilde{\mathcal{M}}_P = |\mathcal{A}_P|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_P}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_P}$, entsprechend für den Zerfall ($\widetilde{\text{Z}}$) der gesamten Amplitude

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_D + \widetilde{\mathcal{M}}_P = |\mathcal{A}_D|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_D}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_D} + |\mathcal{A}_P|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_P}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_P}.$$

Man prüft einfach nach, dass jetzt die Betragsquadrate von $\mathcal{M}$ und $\widetilde{\mathcal{M}}$ jetzt ungleich sind. Genauer gilt

$$\big|\widetilde{\mathcal{M}}\big|^2 - \big|\mathcal{M}\big|^2 = 4|\mathcal{A}_D||\mathcal{A}_P|\sin(\theta_D - \theta_P)\sin(\delta_D - \delta_P).$$

Daher ist die Zerfallsrate für den Zerfall $B^0 \to K^+ + \pi^-$ ungleich der Zerfallsrate für den $\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{P}}$-konjugierten Prozess $\bar{B}^0 \to K^- + \pi^+$, was eine Verletzung der CP-Symmetrie darstellt. Eine nötige Voraussetzung für diese Verletzung ist $\delta_D \neq \delta_P$, was überhaupt nur dann möglich ist, wenn die CKM-Matrix komplexe Elemente enthält.

Tatsächlich haben die BABAR [45] und BELLE [46] Experimente einen Unterschied zwischen den Raten für die Zerfälle der B^0- und $\bar{B}^0$-Mesonen in geladene Pionen und und Kaonen gemessen, und zwar eine Asymmetrie

$$\frac{\Gamma(\bar{B}^0 \to K^- + \pi^+) - \Gamma(B^0 \to K^+ + \pi^-)}{\Gamma(\bar{B}^0 \to K^- + \pi^+) + \Gamma(B^0 \to K^+ + \pi^-)} = -0,115 \pm 0,018,$$

deutlich ungleich Null.

Bemerkung: Eine zweite nötige Voraussetzung für die Verletzung der CP-Symmetrie ist natürlich auch ein Unterschied zwischen den starken Phasen θ_D und θ_P, die in Rahmen dieser Vorlesung schwer zu begründen ist — in der Praxis ist die Berechnung solcher Phasen hoch kompliziert.

Literatur zum Kapitel XII

- Cottingham & Greenwood, *An introduction to the Standard Model of particle physics* [44], Kap. 10–14 & 18.
- Griffiths, *Elementary Particle Physics* [8], Kap. 9.
- Halzen & Martin, *Quarks and Leptons* [22], Kap. 14.4–14.9, 15.1–15.6.
- Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik* [6], Kap. 22.