XII.5 Fermionen im Standardmodell

Die nicht-triviale Konfiguration des Higgs-Feldes, die mit der spontanen Symmetriebrechung der $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{U}(1)_Y$-Eichsymmetrie einhergeht, gibt nicht nur Massen zu den schwachen Vektorbosonen, sondern auch zu den Fermionen, die zum Higgs-Feld koppeln. Somit erhalten sowohl die elektrisch geladenen Leptonen (§ XII.5.1) als auch die Quarks (§ XII.5.2) eine Masse. Bei den Letzteren unterscheiden sich die Masseneigenzustände von den Zuständen, die einfach zu den schwachen $W^{\pm}$-Bosonen koppeln. Diese Tatsache erlaubt die Existenz im Standardmodell von Prozessen, die die CP-Symmetrie verletzen (§ XII.5.3), wie experimentell beobachtet wurde.

Hiernach wird für das Higgs-Feld die Form

$$\hat{\Phi}(\mathsf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\hat{\phi}_0(\mathsf{x})\end{pmatrix}, \quad \text{entsprechend} \quad \bar{\hat{\Phi}}(\mathsf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v+\hat{\phi}_0(\mathsf{x}) \\ 0\end{pmatrix},$$

angenommen.

XII.5.1 Wechselwirkung der Leptonen mit dem Higgs-Feld

Mit der obigen Feldkonfiguration für $\hat{\Phi}$ lautet der erste Term in der Lagrange-Dichte (XII.12) für die Wechselwirkung zwischen Elektron- und Higgs-Feld

$$-h_e\Big(\bar{\hat{L}}_{1,\mathrm{L}}\,\hat{\Phi}\,\hat{\psi}_{e,\mathrm{R}} + \bar{\hat{\psi}}_{e,\mathrm{R}}\,\hat{\Phi}^{\dagger}\hat{L}_{1,\mathrm{L}}\Big) = -\frac{h_e v}{\sqrt{2}}\Big(\bar{\hat{\psi}}_{e,\mathrm{L}}\,\hat{\psi}_{e,\mathrm{R}} + \bar{\hat{\psi}}_{e,\mathrm{R}}\,\hat{\psi}_{e,\mathrm{L}}\Big) - \frac{h_e}{\sqrt{2}}\Big(\bar{\hat{\psi}}_{e,\mathrm{L}}\,\hat{\psi}_{e,\mathrm{R}} + \bar{\hat{\psi}}_{e,\mathrm{R}}\,\hat{\psi}_{e,\mathrm{L}}\Big)\hat{\phi}_0.$$

Für die zweite und dritte Generation, d.h. für das Myon und das Tau, gelten ähnliche Gleichungen. Schreibt man dann $\bar{\hat{\psi}}_{\mathrm{L}}\,\hat{\psi}_{\mathrm{R}} = \bar{\hat{\psi}}\,\mathcal{P}_{\mathrm{R}}\mathcal{P}_{\mathrm{R}}\,\hat{\psi} = \bar{\hat{\psi}}\,\mathcal{P}_{\mathrm{R}}\,\hat{\psi}$ und ebenso $\bar{\hat{\psi}}_{\mathrm{R}}\,\hat{\psi}_{\mathrm{L}} = \bar{\hat{\psi}}\,\mathcal{P}_{\mathrm{L}}\,\hat{\psi}$, so kommt unter Nutzung von $\mathcal{P}_{\mathrm{R}} + \mathcal{P}_{\mathrm{L}} = \mathbb{1}_4$

$$\hat{\mathcal{L}}^{\Phi\ell} = -\frac{h_e v}{\sqrt{2}}\,\bar{\hat{\psi}}_e\,\hat{\psi}_e - \frac{h_\mu v}{\sqrt{2}}\,\bar{\hat{\psi}}_\mu\,\hat{\psi}_\mu - \frac{h_\tau v}{\sqrt{2}}\,\bar{\hat{\psi}}_\tau\,\hat{\psi}_\tau - \frac{h_e}{\sqrt{2}}\,\bar{\hat{\psi}}_e\,\hat{\psi}_e\,\hat{\phi}_0 - \frac{h_\mu}{\sqrt{2}}\,\bar{\hat{\psi}}_\mu\,\hat{\psi}_\mu\,\hat{\phi}_0 - \frac{h_\tau}{\sqrt{2}}\,\bar{\hat{\psi}}_\tau\,\hat{\psi}_\tau\,\hat{\phi}_0. \quad \text{(XII.31)}$$

XII.5.1 a Leptonen-Massen

Um die Eichinvarianz des Modells nicht zu verletzen, haben die Leptonen — und allgemeiner die Fermionen — ursprünglich keinen Massenterm in der Lagrange-Dichte: die Eichsymmetrie wird also nicht explizit gebrochen. Mit den Definitionen

$$m_e \equiv \frac{h_e v}{\sqrt{2}}, \qquad m_\mu \equiv \frac{h_\mu v}{\sqrt{2}}, \qquad m_\tau \equiv \frac{h_\tau v}{\sqrt{2}} \quad \text{(XII.32a)}$$

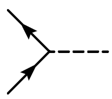
lassen sich die drei ersten Terme in $\hat{\mathcal{L}}^{\Phi\ell}$ [Gl. (XII.31)] als Massenterme

$$\hat{\mathcal{L}}^{\ell}_M = -m_e\,\bar{\hat{\psi}}_e\,\hat{\psi}_e - m_\mu\,\bar{\hat{\psi}}_\mu\,\hat{\psi}_\mu - m_\tau\,\bar{\hat{\psi}}_\tau\,\hat{\psi}_\tau \quad \text{(XII.32b)}$$

für die elektrisch geladenen Leptonen identifizieren, wobei m_e, m_μ, m_τ die Leptonenmassen sind. Somit kriegen nach der spontanen Brechung der Eichsymmetrie die Fermionen eine Masse, ohne dabei die Renormierbarkeit der Theorie zu gefährden: eine zufällige Wahl der Natur zerstört nicht die mathematische Wohldefiniertheit des Standardmodells.

XII.5.1 b Wechselwirkung der Leptonen mit dem Higgs-Boson

Die drei letzten Terme in Gl. (XII.31) stellen Wechselwirkungsterme zwischen einem der drei Leptonen und dem Higgs-Boson dar. Genauer handelt es sich um Dreiervertizes



wobei die Kopplungskonstante zwischen jeder Leptonart und dem Higgs-Boson jeweils gleich $h_e/\sqrt{2}$, $h_\mu/\sqrt{2}$ und $h_\tau/\sqrt{2}$ ist.

Die Beziehungen (XII.32a) zeigen, dass die Yukawa-Kopplung h_i mit $i = e, \mu$ oder τ proportional zur entsprechenden Teilchenmasse m_i sein soll. Somit koppeln schwere Leptonen stärker zum Higgs-Boson als leichte Leptonen.
Diese Bemerkung gilt auch für die Kopplung zwischen dem Higgs-Boson und den Quarks im folgenden Paragraph.

XII.5.2 Quark-Massen

Unter Vernachlässigung des skalaren Feldes $\hat{\phi}_0$ des Higgs-Bosons gilt für die Wechselwirkung zwischen dem Higgs-Feld und den Feldern für die Quarks der ersten Generation

$$-h_u\Big(\hat{\bar{Q}}'_{1,\mathrm{L}}\hat{\bar{\Phi}}\,\hat{\psi}_{u'',\mathrm{R}} + \hat{\bar{\psi}}_{u'',\mathrm{R}}\hat{\bar{\Phi}}^\dagger\hat{Q}'_{1,\mathrm{L}}\Big) - h_d\Big(\hat{\bar{Q}}'_{1,\mathrm{L}}\hat{\Phi}\,\hat{\psi}_{d'',\mathrm{R}} + \hat{\bar{\psi}}_{d'',\mathrm{R}}\hat{\Phi}^\dagger\hat{Q}'_{1,\mathrm{L}}\Big) \simeq \\ -\frac{h_u\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\bar{\psi}}_{u,\mathrm{L}}\hat{\psi}_{u'',\mathrm{R}} + \hat{\bar{\psi}}_{u'',\mathrm{R}}\hat{\psi}_{u,\mathrm{L}}\Big) - \frac{h_d\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\bar{\psi}}_{d',\mathrm{L}}\hat{\psi}_{d'',\mathrm{R}} + \hat{\bar{\psi}}_{d'',\mathrm{R}}\hat{\psi}_{d',\mathrm{L}}\Big).$$

Die rechte Seite kann noch geschrieben werden als

$$-\frac{h_u\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\bar{\psi}}_u\mathcal{P}_\mathrm{R}\hat{\psi}_{u''} + \hat{\bar{\psi}}_{u''}\mathcal{P}_\mathrm{L}\hat{\psi}_u\Big) - \frac{h_d\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\bar{\psi}}_{d'}\mathcal{P}_\mathrm{R}\hat{\psi}_{d''} + \hat{\bar{\psi}}_{d''}\mathcal{P}_\mathrm{L}\hat{\psi}_{d'}\Big).$$

Für die zweite und dritte Generationen gelten ähnliche Gleichungen.

Dabei sollen die „nicht-gestrichenen Quarks“ u, d, s, c, b und t die QCD-Eigenzustände sein, entsprechend z.B. den Valenz-Quarks in einem Hadron. Das Feld $\hat{\psi}_{d'}$ (und in ähnlicher Weise $\hat{\psi}_{s'}$ oder $\hat{\psi}_{b'}$) stellt die unitäre Linearkombination der Quark-Felder $\hat{\psi}_d$, $\hat{\psi}_s$ und $\hat{\psi}_b$ dar, die mit $\hat{\psi}_u$ (bzw. $\hat{\psi}_c$, $\hat{\psi}_t$) über ein W^+-Boson wechselwirkt. Wiederum sind die Felder $\hat{\psi}_{u''}$, $\hat{\psi}_{c''}$ und $\hat{\psi}_{t''}$ unitäre Linearkombinationen von $\hat{\psi}_u$, $\hat{\psi}_c$ und $\hat{\psi}_t$, die je einfach mit einem dieser Felder und mit dem Higgs-Feld wechselwirken. Schließlich sind $\hat{\psi}_{d''}$, $\hat{\psi}_{s''}$ und $\hat{\psi}_{b''}$ unitäre Linearkombinationen der Felder $\hat{\psi}_d$, $\hat{\psi}_s$ und $\hat{\psi}_b$, die je einfach mit dem Higgs-Feld und entweder $\hat{\psi}_{d'}$, $\hat{\psi}_{s'}$ oder $\hat{\psi}_{b'}$ wechselwirken.

Experiment zeigt, dass $\hat{\psi}_u$, $\hat{\psi}_c$ und $\hat{\psi}_t$ eigentlich auch Masseneigenzustände sind. Damit die Theorie dies gibt, sollen $\hat{\psi}_{u''} = \hat{\psi}_u$, $\hat{\psi}_{c''} = \hat{\psi}_c$ und $\hat{\psi}_{t''} = \hat{\psi}_t$ gelten. Dann kommt tatsächlich in der Lagrange-Dichte

$$-\frac{h_u\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\bar{\psi}}_u\mathcal{P}_\mathrm{R}\hat{\psi}_{u''} + \hat{\bar{\psi}}_{u''}\mathcal{P}_\mathrm{L}\hat{\psi}_u\Big) = -\frac{h_u\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\Big[\hat{\bar{\psi}}_u(\mathcal{P}_\mathrm{R}+\mathcal{P}_\mathrm{L})\hat{\psi}_u\Big] = -\frac{h_u\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\hat{\bar{\psi}}_u\hat{\psi}_u \equiv -m_u\hat{\bar{\psi}}_u\hat{\psi}_u,$$

wobei m_u die Masse des u-Quarks ist. Für die c und t-Quarks gelten ähnliche Ergebnisse.

Für die d-, s- und b-Quarks sind die QCD-Eigenzustände $\hat{\psi}_d$, $\hat{\psi}_s$ und $\hat{\psi}_b$ auch Masseneigenzustände; sie sind aber nicht Eigenzustände zur Wechselwirkung mit den schwachen $W^\pm$-Bosonen, entsprechend der schon gesehenen Flavour-Mischung. Infolgedessen wechselwirken $\hat{\psi}_d$, $\hat{\psi}_s$, $\hat{\psi}_b$ nicht direkt mit dem Higgs-Feld, sondern nur als Linearkombinationen. Sei $\mathcal{V}_\mathrm{CKM}$ die spezielle unitäre 3×3-Matrix, die die Felder $\hat{\psi}_{d'}$, $\hat{\psi}_{s'}$, $\hat{\psi}_{b'}$ als Funktion der QCD-Eigenzustände gibt:

$$\begin{pmatrix}\hat{\psi}_{d'}\\ \hat{\psi}_{s'}\\ \hat{\psi}_{b'}\end{pmatrix} = \mathcal{V}_\mathrm{CKM}\begin{pmatrix}\hat{\psi}_d\\ \hat{\psi}_s\\ \hat{\psi}_b\end{pmatrix}. \tag{XII.33}$$

Nimmt man für die Felder $\hat{\psi}_{d''}$, $\hat{\psi}_{s''}$ und $\hat{\psi}_{b''}$ die Linearkombinationen

$$\begin{pmatrix}\hat{\psi}_{d''}\\ \hat{\psi}_{s''}\\ \hat{\psi}_{b''}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h_d^{-1} & 0 & 0\\ 0 & h_s^{-1} & 0\\ 0 & 0 & h_b^{-1}\end{pmatrix}\mathcal{V}_\mathrm{CKM}\begin{pmatrix}h_d & 0 & 0\\ 0 & h_s & 0\\ 0 & 0 & h_b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\psi}_d\\ \hat{\psi}_s\\ \hat{\psi}_b\end{pmatrix}$$

an, so lässt sich die Summe

$$-\frac{h_d\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\bar{\psi}}_{d'}\mathcal{P}_\mathrm{R}\hat{\psi}_{d''} + \hat{\bar{\psi}}_{d''}\mathcal{P}_\mathrm{L}\hat{\psi}_{d'}\Big) - \frac{h_s\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\bar{\psi}}_{s'}\mathcal{P}_\mathrm{R}\hat{\psi}_{s''} + \hat{\bar{\psi}}_{s''}\mathcal{P}_\mathrm{L}\hat{\psi}_{s'}\Big) - \frac{h_b\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\bar{\psi}}_{b'}\mathcal{P}_\mathrm{R}\hat{\psi}_{b''} + \hat{\bar{\psi}}_{b''}\mathcal{P}_\mathrm{L}\hat{\psi}_{b'}\Big)$$

als

$$-\frac{h_d\,\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\,\hat{\bar{\psi}}_d\,\hat{\psi}_d-\frac{h_s\,\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\,\hat{\bar{\psi}}_s\,\hat{\psi}_s-\frac{h_b\,\mathscr{v}}{\sqrt{2}}\,\hat{\bar{\psi}}_b\,\hat{\psi}_b\equiv -m_d\,\hat{\bar{\psi}}_d\,\hat{\psi}_d-m_s\,\hat{\bar{\psi}}_s\,\hat{\psi}_s-m_b\,\hat{\bar{\psi}}_b\,\hat{\psi}_b$$

umschreiben, entsprechend Massentermen für die d, s und b Quarks.

In Zusammenfassung erhalten die Quarks, wie die Leptonen, durch ihre Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld eine Masse, die proportional zu der jeweiligen Yukawa-Kopplung h_i ist.

Bemerkung: Berücksichtigt man auch das Higgs-Boson-Feld $\hat{\phi}_0$ in $\hat{\mathcal{L}}^{\Phi q}$, so findet man wie für die Leptonen in § XII.5.1 b, dass die Yukawa-Kopplungskonstante h_q ebenfalls die Stärke des Vertex $\hat{\bar{\psi}}_q\,\hat{\psi}_q\,\hat{\phi}_0$ für jeden Quark-Flavour q bestimmt.