

## XII.2 Lagrange-Dichte des Standardmodells

In diesem Abschnitt wird das durch Glashow<sup>(bl)</sup>, Salam<sup>(bm)</sup>, Weinberg<sup>(bn)</sup> und andere konstruierte Standardmodell der Elementarteilchenphysik dargestellt.

### XII.2.1 Bausteine des Standardmodells

#### XII.2.1 a Lokale Symmetriegruppen

Am Herzen des Standardmodells der Elementarteilchenphysik liegt die *Eichgruppe*, unter dessen Transformationen die Theorie invariant bleibt. Somit ist die Symmetriegruppe des Standardmodells die Produktgruppe

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y. \quad (\text{XII.3})$$

- Die  $SU(3)_c$ -Gruppe stellt die Symmetriegruppe für die starke Wechselwirkung dar, wobei der tiefgestellte Index  $c$  daran erinnert, dass die Gluonen an die Farbe („color“) koppeln.
- $SU(2)_L$  ist die Eichgruppe der schwachen Wechselwirkung, insbesondere für deren linkshändigen Anteil. Die dazu zugehörigen Vektorbosonen  $\hat{W}_1^\rho, \hat{W}_2^\rho, \hat{W}_3^\rho$ , die später die massiven  $W^\pm$  und  $Z^0$ -Bosonen liefern werden, bilden ein  $SU(2)$ -Triplet. Die Ladung, an die die  $\hat{W}_i^\rho$ -Bosonen koppeln, wird *elektroschwacher* oder kurz *schwacher Isospin* genannt und als  $I^W$  bezeichnet.
- $U(1)_Y$  ist eine Eichgruppe, die teilweise zur elektromagnetischen Wechselwirkung und teilweise zur schwachen Wechselwirkung zwischen neutralen Strömen führt. Die entsprechende Ladung ist die sog. *Hyperladung*, bezeichnet als  $Y_W$  oder manchmal  $Y$ . Das Vektorboson, das an die Hyperladung koppelt, wird als  $\hat{B}^\rho$  geschrieben. Später wird es (teilweise) das Photon liefern, sowie zum  $Z^0$ -Boson beitragen.

Der  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Anteil wird als *elektroschwache Wechselwirkung* bezeichnet.

#### XII.2.1 b Materie-Teilchen

Die „Materie“-Teilchen, die diesen Wechselwirkungen unterliegen, sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen, die zwei Arten gehören:

##### Leptonen

Erstens kommen drei  $SU(2)_L$ -Dubletts von linkshändigen Dirac-Teilchen, die der starken Wechselwirkungen nicht unterliegen

$$L_{1,L} = \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad L_{2,L} = \begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad L_{3,L} = \begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix}. \quad (\text{XII.4a})$$

Dazu hat man die rechtshändigen Anteile der Teilchen, die die unteren Komponenten dieser Dubletts darstellen

$$e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R. \quad (\text{XII.4b})$$

Dagegen gibt es keine linkshändigen Neutrinos.

##### Quarks

Zweitens enthält das Standardmodell sechs  $SU(3)_c$ -Triplets von Quarks, deren linkshändige Anteile sich in  $SU(2)_L$ -Dubletts austeilen lassen

$$Q'_{1,L} = \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \quad Q'_{2,L} = \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \quad Q'_{3,L} = \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}, \quad (\text{XII.4c})$$

<sup>(bl)</sup>S. L. GLASHOW, 1932–    <sup>(bm)</sup>A. SALAM, 1926–1996    <sup>(bn)</sup>S. WEINBERG, 1933–

während die rechtshändigen Anteile  $SU(2)_L$ -Singulets sind

$$\begin{array}{ccc} u_R, & c_R, & t_R, \\ d_R, & s_R, & b_R. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(XII.4d)} \\ \text{(XII.4e)} \end{array}$$

Im Folgenden werden die Dirac-Felder, die diese Leptonen und Quarks beschreiben, als  $\hat{\psi}_{\ell,L/R}$ ,  $\hat{\psi}_{\nu\ell,L}$ ,  $\hat{\psi}_{q,L/R}$  mit  $\ell = e, \mu$  oder  $\tau$  und  $q = u, d, s, c, b$  oder  $t$  geschrieben. Gestrichene Teilchen/Felder ( $d'_L, s'_L, b'_L$ ) stellen Linearkombinationen der entsprechenden nicht-gestrichenen Felder dar.

Neben den Vektorbosonen (§ XII.2.1 a) und diesen Fermionen gibt es im Standardmodell noch ein Skalarfeld  $\hat{\Phi}$ , das sog. *Higgs<sup>(bo)</sup>-Feld*.

### XII.2.1 c Quantenzahlen

Eine weitere Zutat des Standardmodells besteht aus den Werten der verschiedenen Ladungen der im vorigen Paragraph eingeführten Felder. Diese Quantenzahlen bestimmen, wie sich die Felder unter den Eichsymmetrien des Modells transformieren.

Erstens tragen alle links- und rechtshändigen Leptonen und das Higgs-Feld keine Farbladung, während jeder Quark-Flavour in jeder Farbe vorkommt. Hiernach wird die Farbladung der Quarks nicht weiter spezifiziert, und es wird nicht mehr auf den  $SU(3)_c$ -Sektor der Theorie eingegangen.

Der elektroschwache Isospin der Fermionen lässt sich direkt auf der Dublett-Struktur lesen: die Dubletts haben  $I^W = \frac{1}{2}$ , wobei die obere bzw. untere Komponente die Projektion  $I_3^W = +\frac{1}{2}$  bzw.  $I_3^W = -\frac{1}{2}$  hat, während für die  $SU(2)_L$ -Singulets — die rechtshändigen Teilchen — natürlich  $I^W = 0$  gilt.

Dazu kommt das Higgs-Feld tatsächlich auch als ein  $SU(2)_L$ -Dublett vor, vgl. Gl. (XII.8a) unten.

Dann lauten die Hyperladungen der unterschiedlichen Fermionen wie folgt<sup>(75)</sup>

$$\begin{array}{cccccc} \text{Teilchen} & L_{i,L} & e_R, \mu_R, \tau_R & Q'_{i,L} & u_R, c_R, t_R & d_R, s_R, b_R \\ Y_W & -\frac{1}{2} & -1 & +\frac{1}{6} & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \quad \text{(XII.5)}$$

während das Higgs-Feld  $\hat{\Phi}$  die Hyperladung  $Y_W = +\frac{1}{2}$  trägt.

Schließlich ist jedes Vektorboson, das mit einer der Gruppe  $SU(3)_c$ ,  $SU(2)_L$  oder  $U(1)_Y$  assoziiert ist, ungeladen unter den zwei anderen Eichsymmetrien: die Gluonen tragen nur eine Farbladung, die  $\hat{W}_i^\rho$ -Felder nur einen schwachen Isospin und das  $\hat{B}^\rho$ -Feld nur eine Hyperladung.

**Bemerkung:** Dagegen sollen die physikalischen  $W^+$ - und  $W^-$ -Bosonen der QED und der schwachen Wechselwirkung unterliegen, was schon zeigt, dass es keine genaue Äquivalenz zwischen der Letzteren und der  $SU(2)_L$  gibt.

### XII.2.1 d Renormierbarkeit

Wie schon am Anfang des § XII.1.2 erwähnt wurde, sollen die in der Theorie erlaubten Wechselwirkungsterme einerseits Lorentz-invariant sein, andererseits entweder drei fermionischen und bosonischen Felder oder vier bosonischen Felder miteinander koppeln, damit die Theorie renormierbar ist.

### XII.2.1 e Kopplungskonstanten

Schreibt man die allgemeinst mögliche Lagrange-Dichte für die in § (XII.2.1 a) und (XII.2.1 b) eingeführten Felder, so sind noch etliche freie Parameter nötig, und zwar Kopplungskonstanten für

<sup>(75)</sup> Statt dieser Werte kann ist die Beziehung (XII.29) zwischen Hyperladung, schwachem Isospin und der mehr bekannten elektrischen Ladung einfacher zu merken — insbesondere, weil die Konvention für die Hyperladung nicht universell ist.

<sup>(bo)</sup> P. HIGGS, 1929–

alle erlaubten Vertices der Theorie. <sup>(76)</sup>

### XII.2.1 f Offene Fragen

Das aus den oben dargestellten Bausteinen bestehende Standardmodell ist ziemlich einfach, doch lässt Raum für viele Fragen, die sich im Rahmen des Modells nicht beantworten lassen:

- Warum besitzt die Theorie die Symmetriegruppe <sup>(XII.3)</sup>?
- Warum findet man diese Felder und nicht andere?
- Warum besitzen jene Felder gerade die in § XII.2.1 c gegebenen Quantenzahlen?
- Warum nehmen die Kopplungskonstanten bestimmte Werte und nicht andere an?

Im Rahmen des Standardmodells sind die Quantenzahlen und die Kopplungskonstanten Parameter, die experimentell mehr oder weniger gut bekannt sind.

## XII.2.2 Lagrange-Dichte des elektroschwachen Sektors

Die Lagrange-Dichte  $\hat{\mathcal{L}}_{\text{SM}}$  des Standardmodells ist ein Funktional der in § XII.2.1 eingeführten Feldoperatoren und deren Viergradienten. Hiernach werden die unterschiedlichen Terme für den elektroschwachen  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Sektor der Theorie erläutert.

### XII.2.2 a Eichkovariante Ableitung

Um die Eichinvarianz der Theorie zu gewährleisten, sollen in der Lagrange-Dichte die Viergradienten  $\partial_\rho$  in den „kinetischen Termen“ <sup>(77)</sup> der verschiedenen Fermionen und des Higgs-Feldes durch sog. *eichkovariante Ableitungen* ersetzt werden. Für ein  $SU(2)_L$ -Dublett mit Hyperladung  $Y_W$  lautet diese Ableitung <sup>(78)</sup>

$$\hat{D}_\rho \equiv \partial_\rho + ig \vec{T} \cdot \hat{W}_\rho + iY_W g' \hat{B}_\rho. \quad (\text{XII.6})$$

Dabei sind  $g, g'$  die jeweiligen Kopplungskonstanten der Gruppen  $SU(2)_L, U(1)_Y$ , und  $T_1, T_2, T_3$  drei  $2 \times 2$ -Matrizen, und zwar  $T_j \equiv \frac{1}{2} \sigma_j$ , wobei die  $\sigma_j$  die Pauli-Matrizen sind.

Für ein  $SU(2)_L$ -Singulett fällt natürlich der zweite Term in Gl. <sup>(XII.6)</sup> weg.

Für ein  $SU(2)_L$ -Dublett  $\hat{\Psi}(x)$  mit Hyperladung  $Y_W$  lautet eine Eichtransformation

$$\hat{\Psi}(x) \rightarrow \hat{\Psi}'(x) = e^{-iY_W \alpha(x)} e^{-i\beta_j(x) T_j} \hat{\Psi}(x), \quad (\text{XII.7a})$$

mit vier beliebigen reellen Funktionen  $\alpha(x)$  und  $\beta_j(x)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Gleichzeitig transformieren sich die Eichfelder gemäß

$$\vec{T} \cdot \hat{W}_\rho(x) \rightarrow \vec{T} \cdot \hat{W}'_\rho(x) = \mathcal{U}(x) \vec{T} \cdot \hat{W}_\rho(x) \mathcal{U}(x)^{-1} + \frac{i}{g} [\partial_\rho \mathcal{U}(x)] \mathcal{U}(x)^{-1}, \quad (\text{XII.7b})$$

mit  $\mathcal{U}(x) \equiv e^{-i\beta_j(x) T_j} = e^{-i\vec{\beta}(x) \cdot \vec{T}}$ , und

$$\hat{B}_\rho(x) \rightarrow \hat{B}'_\rho(x) = \hat{B}_\rho(x) + \frac{1}{g'} \partial_\rho \alpha(x), \quad (\text{XII.7c})$$

vgl. Gl. <sup>(XII.1)</sup>.

**Bemerkung:** Die kinetischen Terme für die Eichfelder in der Lagrange-Dichte lauten

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{kin}}^{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} \hat{F}_i^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} \hat{B}^{\mu\nu} \hat{B}_{\mu\nu}$$

wobei  $\hat{F}_{\mu\nu}^i \equiv \partial_\mu \hat{W}_\nu^i - \partial_\nu \hat{W}_\mu^i - g \varepsilon_{ijk} \hat{W}_\mu^j \hat{W}_\nu^k$  für  $i = 1, 2, 3$  bzw.  $\hat{B}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \hat{B}_\nu - \partial_\nu \hat{B}_\mu$  der  $SU(2)_L$ - bzw.  $U(1)_Y$ -Feldstärketensor ist.

<sup>(76)</sup> 3 Kopplungskonstanten ( $g_s, g, g'$ ) für die Vertices zwischen jedem Vektorfeld (Gluon,  $\hat{W}^\rho, \hat{B}^\rho$ ) und den Fermionen; 9 „Yukawa“ <sup>(bp)</sup> Kopplungen ( $h_i$ ) für die Vertices zwischen dem Higgs-Feld und den Fermionen; 2 Parameter ( $\lambda, \mu$ ) für das Potential des Higgs-Feldes.

<sup>(77)</sup> Solche Terme entsprechen der kinetischen Energie des Feldes.

<sup>(78)</sup> In diesem Fall ist  $\hat{D}_\rho$  tatsächlich eine auf Dubletts wirkende  $2 \times 2$ -Matrix, und man sollte den ersten und den dritten Term auf der rechten Seite der Gl. <sup>(XII.6)</sup> mit der  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix  $\mathbb{1}_2$  multiplizieren.

<sup>(bp)</sup> H. YUKAWA, 1907–1981

### XII.2.2 b Higgs-Sektor

Wie oben schon erwähnt wurde transformiert das skalare Higgs-Feld  $\hat{\Phi}$  wie ein Dublett

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\Phi}^+ \\ \hat{\Phi}^0 \end{pmatrix}, \quad (\text{XII.8a})$$

unter  $SU(2)_L$ -Transformationen, wobei die Skalarfelder  $\hat{\Phi}^+$  und  $\hat{\Phi}^0$  komplexwertig sind. Dies entspricht also insgesamt 4 Freiheitsgraden.

Für das Folgende lohnt es sich, das ladungskonjugierte Dublett

$$\hat{\bar{\Phi}} = \begin{pmatrix} (\hat{\Phi}^0)^* \\ -(\hat{\Phi}^+)^* \end{pmatrix} = i\sigma_2 \hat{\Phi}^* \quad (\text{XII.8b})$$

einzuführen.

### Kinetischer Term und Wechselwirkung des Higgs-Feldes mit den Eichfeldern

Ein erster Beitrag zur Lagrange-Dichte des Standardmodells im Higgs-Sektor besteht aus der Summe des kinetischen Terms für das Higgs-Feld und dessen Wechselwirkungsterm mit den  $SU(2)_L$ - und  $U(1)_L$ -Eichfeldern. Das ganze lässt sich einfach mithilfe der eichkovarianten Ableitung (XII.6) schreiben

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{kin}}^{\Phi} + \hat{\mathcal{L}}^{\Phi/\text{gauge}} = (\hat{D}_{\rho} \hat{\Phi})^{\dagger} (\hat{D}^{\rho} \hat{\Phi}), \quad (\text{XII.9})$$

mit hier  $Y_W = \frac{1}{2}$ . Diese Terme werden mehr detailliert in Abschn. XII.4 hiernach untersucht.

### Selbstwechselwirkung

In der Lagrange-Dichte können noch Terme auftreten, die nur das Higgs-Feld enthalten, und zwar der Art  $\hat{\mathcal{L}}^{\Phi\Phi} = -V(\hat{\Phi})$  mit einem „Potential“  $V$  für das Feld. Die einzige Möglichkeit, die Lorentz- und Eichinvarianz berücksichtigt und zu Vertices mit maximal vier Feldern führt, ist

$$V(\hat{\Phi}) = \kappa \hat{\Phi}^{\dagger} \hat{\Phi} + \lambda (\hat{\Phi}^{\dagger} \hat{\Phi})^2, \quad (\text{XII.10})$$

mit freien reellen Parametern  $\kappa$  und  $\lambda$ .

Die Rolle dieses Terms im Standardmodell wird in Abschn. XII.3 erläutert.

### Wechselwirkung des Higgs-Feldes mit den Fermionen

Schließlich kann das Higgs-Feld noch mit den Fermionen wechselwirken. Um der Eichinvarianz unter  $SU(2)_L$  zu genügen, soll das Higgs-Dublett einerseits an die Dubletts  $Q'_{i,L}$ ,  $L_{i,L}$  koppeln. Dazu soll noch ein zweites, rechtshändiges Fermion — gleicher Natur (Quark oder Lepton), wegen der  $SU(3)_c$  Symmetrie — im Term vorkommen, um die Lorentz-Invarianz zu gewährleisten. Hiernach wird der Allgemeinheit halber angenommen, dass jenes Fermion nicht genau eines der rechtshändigen Fermionen des § XII.2.1b ist, sondern nur eine Linearkombination davon, die mit zwei Strichen geschrieben wird:  $\hat{\psi}_{q',R}$ .

Insgesamt lautet also der Wechselwirkungsterm zwischen dem Higgs-Feld und den Quarks

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}^{\Phi q} = & -h_u (\hat{Q}'_{1,L} \hat{\Phi} \hat{\psi}_{u',R} + \hat{\psi}_{u',R} \hat{\Phi}^{\dagger} \hat{Q}'_{1,L}) - h_d (\hat{Q}'_{1,L} \hat{\Phi} \hat{\psi}_{d',R} + \hat{\psi}_{d',R} \hat{\Phi}^{\dagger} \hat{Q}'_{1,L}) \\ & + \text{ähnliche Terme für die 2. und 3. Generationen,} \end{aligned} \quad (\text{XII.11})$$

mit sog. *Yukawa-Kopplungskonstanten*  $h_u$ ,  $h_d$ , usw., die hiernach reelle Zahlen sein werden.

Für den Wechselwirkungsterm zwischen dem Higgs-Feld und den Leptonen kann man schon berücksichtigen, dass es im Standardmodell keine „Leptonen-Mischung“ gibt, im Gegensatz zur Quark-Mischung in der schwachen Wechselwirkung. Somit wird auf die Einführung von Feldern  $\hat{\psi}_{\ell',R}$  verzichtet. Der Wechselwirkungsterm lautet dann

$$\hat{\mathcal{L}}^{\Phi \ell} = -h_e (\hat{L}_{1,L} \hat{\Phi} \hat{\psi}_{e,R} + \hat{\psi}_{e,R} \hat{\Phi}^{\dagger} \hat{L}_{1,L}) + \text{ähnliche Terme für die 2. und 3. Generationen,} \quad (\text{XII.12})$$

mit drei reellen Yukawa-Kopplungskonstanten  $h_e$ ,  $h_{\mu}$ ,  $h_{\tau}$ .

Die Wechselwirkungsterm (XII.11) und (XII.12) werden in Abschn. XII.5 weiter diskutiert.

**Bemerkung:** Vom Anfang an wurden keine rechtshändige Neutrinos eingeführt. Somit können Neutrinos nicht mit dem Higgs-Feld wechselwirken, so dass sie keine Masse kriegen werden.

### XII.2.2c Fermionischer Sektor

Die Lagrange-Dichte enthält noch Terme, die die kinetischen Energien der Fermionen und ihre Wechselwirkungen mit den Eichfeldern beschreiben, und zwar der Art

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{kin}}^{q,\ell} + \hat{\mathcal{L}}^{q,\ell/\text{gauge}} = \sum_{\psi_{\text{L}}} \hat{\psi}_{\text{L}} i \hat{\mathcal{D}} \hat{\psi}_{\text{L}} + \sum_{\psi_{\text{R}}} \hat{\psi}_{\text{R}} i \hat{\mathcal{D}} \hat{\psi}_{\text{R}}, \quad (\text{XII.13})$$

wobei die Summen über alle links- bzw. rechtshändigen Fermionen laufen, während  $\hat{\mathcal{D}} \equiv \gamma^\rho \hat{D}_\rho$  ist.